Matemáticas para administración y economía

Décima edición



Ernest F. Haeussler, Jr. • Richard S. Paul

Fórmula cuadrática

Si $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Líneas rectas

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	(fórmula de la pendiente)
$y - y_1 = m(x - x_1)$	(forma punto-pendiente)
$y = mx + b$	(forma pendiente-ordenada al origen)
$x = \text{constante}$	(recta vertical)
$y = \text{constante}$	(recta horizontal)

Desigualdades

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a(-c) > b(-c)$.

Logaritmos

$\log_b x = y$ donde $x = b^y$

$\log_b (mn) = \log_b m + \log_b n$

$\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

$\log_b m^r = r \log_b m$

$\log_b 1 = 0$

$\log_b b = 1$

$\log_b b^r = r$

$b^{\log_b m} = m$

$\log_b m = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}$

Alfabeto griego

alfa	Α	α	nu	Ν	ν
beta	Β	β	xi	Ξ	ξ
gamma	Γ	γ	ómicron	Ο	o
delta	Δ	δ	pi	Π	π
épsilon	Ε	ε	rho	Ρ	ρ
zeta	Ζ	ζ	sigma	Σ	σ
eta	Η	η	tau	Τ	τ
theta	Θ	θ	Ípsilon	Υ	υ
iota	Ι	ι	fi	Φ	$\phi\varphi$
kappa	Κ	κ	ji	Χ	χ
lambda	Λ	λ	psi	Ψ	ψ
mu	Μ	μ	omega	Ω	ω

DÉCIMA EDICIÓN

Matemáticas para administración y economía

Ernest F. Haeussler, Jr.
The Pennsylvania State University

Richard S. Paul
The Pennsylvania State University

TRADUCCIÓN
Víctor Hugo Ibarra Mercado
Universidad Anáhuac del Norte

REVISIÓN TÉCNICA
Roberto Valadez Soto
Salvador Sandoval Bravo
Universidad de Guadalajara
Centro Universitario de Ciencias Económico-Administrativas

Linda Medina Herrera
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Ciudad de México

Dora Elia Cienfuegos Zurita
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Monterrey

Faustino Yescas Martínez
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Estado de México

Alejandro Narváez Herazo
Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla

Jesús Castillo García
Universidad de las Américas, Puebla

Carlos Francisco Javier Báez Teutli
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

PEARSON
Educación®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

HAEUSSLER, F., ERNEST JR.
Matemáticas para administración y economía
Décima edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2003

ISBN: 970-26-0383-8
Área: Universitarios

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 912

ISBN 0-13-008750-5

Edición en español
Editor: Guillemo Trujano Mendoza
e-mail: guillermo.trujano@pearsoned.com
Supervisor de desarrollo: Diana Karen Montaño
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño
Fotografía portada: Photo Stock México

Edición en inglés
Acquisition Editor: Quincy McDonald
Editor in Chief: Sally Yagan
Vice President/Director of Production and Manufacturing: David W. Riccardi
Executive Managing Editor: Kathleen Schiaparelli
Senior Managing Editor: Linda Mihatov Behrens
Assistant Production Manager: Bayani DeLeon
Production Management: Elm Street Publishing Services, Inc.
Manufacturing Buyer: Alan Fischer
Manufacturing Manager: Trudy Pisciotti
Marketing Manager: Patric Lumumba Jones
Assistant Editor of Media: Vince Jansen
Editorial Assistant/Supplements Editor: Joanne Wendelken
Art Director: Heather Scott
Art Studio: Artworks
Senior Manager: Patty Burns
Production Manager: Ronda Whitson
Manager, Production Technologies: Matt Haas
Project Coordinator: Jessica Einsig
Illustrator: Steve McKinley

DÉCIMA EDICIÓN, 2003

Atlacomulco 500-5to. piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Edo. de México
E-mail: editorial.universidades@.pearsoned.com

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031



ISBN 970-26-0383-8

Impreso en México. Printed in Mexico.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 06 05 04 03

CONTENIDO

CAPÍTULO 16 Cálculo de varias variables 737

PREFACIO

Esta décima edición de *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida* continúa proporcionando los fundamentos matemáticos para estudiantes de negocios, economía y ciencias sociales y de la vida. Inicia con temas que no son de cálculo, como ecuaciones, funciones, álgebra de matrices, programación lineal y matemáticas financieras. Después avanza a través tanto de cálculo de una como de varias variables. Las demostraciones y condiciones técnicas, son descritas de manera suficiente pero sin abundar demasiado. En ocasiones, para conservar la claridad se dan argumentos intuitivos e informales.

Aplicaciones

Una gran cantidad y variedad de aplicaciones, destinadas al lector, aparecen en esta obra; de manera continua, los estudiantes ven cómo pueden utilizarse las matemáticas que están aprendiendo. Estas aplicaciones cubren áreas tan diversas como administración, economía, biología, medicina, sociología, psicología, ecología, estadística, ciencias de la tierra y arqueología. Muchas de estas situaciones de la vida cotidiana se tomaron de la literatura existente y las referencias están documentadas. En algunas se dan los antecedentes y el contexto con el fin de estimular el interés. Sin embargo, el texto prácticamente es independiente, en el sentido de que no supone un conocimiento previo de los conceptos sobre los cuales están basadas las aplicaciones.

Cambios en la décima edición

Temas introductorios de capítulo

Lo nuevo en la décima edición es que aparecen *temas introductorios* al principio de cada capítulo. Cada tema introductorio presenta una aplicación de la vida real de las matemáticas del capítulo. Este nuevo elemento proporciona a los estudiantes una introducción intuitiva a los temas que se presentan en el capítulo.

Actualización y ampliación de las aplicaciones prácticas

Para la décima edición, esta popular característica se ha ampliado para que aparezca al final de los capítulos 0 al 16. Cada aplicación práctica proporciona una interesante, y en ocasiones novedosa aplicación que incluye las matemáticas del capítulo en el que aparecen. Cada una de las aplicaciones prácticas contiene ejercicios —lo que refuerza el énfasis del capítulo en la práctica. El último ejercicio de cada aplicación incluye preguntas que son adecuadas para la discusión en grupo.

Exámenes de repaso del capítulo

En los problemas de repaso del capítulo 1 al 16, hay problemas seleccionados que son adecuados para que los estudiantes los utilicen como exámenes de práctica para medir su dominio del material del capítulo. Todos éstos son

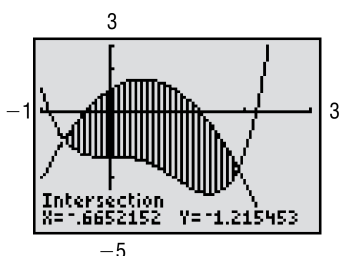
problemas con número impar, de modo que los estudiantes pueden verificar su trabajo contra las respuestas al final del texto.

Características que se conservaron

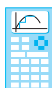
A lo largo del texto se encuentran muchas notas de advertencia para el estudiante, que señalan errores que se comenten con frecuencia. Estas notas de advertencia se indican con el título **Advertencia.** Las definiciones se establecen y muestran de manera clara. Los conceptos importantes, así como las reglas y fórmulas importantes, se colocan dentro de cuadros para enfatizar su importancia. Asimismo, a lo largo del texto se colocan notas al margen para el estudiante. Éstas sirven para hacer una reflexión rápida que complementa el estudio.

Más de 850 ejemplos se resuelven en detalle. Algunos incluyen una **estrategia** diseñada de manera específica para guiar al estudiante a través de la logística de la solución, antes de que ésta sea obtenida.

Se incluye una gran cantidad de diagramas (casi 500) y ejercicios (más de 5000). En cada conjunto de ejercicios, los problemas agrupados están dados en orden creciente de dificultad. En muchos conjuntos de ejercicios los problemas van desde los de tipo de habilidades básicas que se resuelven en forma mecánica, hasta los más interesantes que obligan a reflexionar. Se incluyen muchos problemas que se presentan en la vida cotidiana con datos reales. Se ha hecho un esfuerzo considerable para alcanzar el balance apropiado entre los ejercicios de tipo mecánico, y los problemas que requieren de la integración de los conceptos aprendidos. Muchos de los problemas han sido actualizados o revisados.

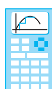


Con el objetivo que el estudiante aprecie el valor de la **tecnología** actual, a lo largo del texto aparece material opcional para calculadoras gráficas, tanto en la exposición como en los ejercicios. Esto se incluye por varias razones: como una herramienta matemática, para visualizar conceptos, como un auxilio computacional y para reforzar conceptos. A pesar de que pantallas para una calculadora TI-83 acompañan el estudio de tecnología correspondiente, nuestro enfoque es suficientemente general, de modo que puede aplicarse en otras calculadoras gráficas.



En los conjuntos de ejercicios, los problemas que se resuelven con calculadora se indican por medio de un icono. Para proporcionar flexibilidad para la planeación de asignaciones del instructor, estos problemas están colocados al final de un conjunto de ejercicios.

El elemento **Principios en práctica** provee a los estudiantes de más aplicaciones. Ubicados en los márgenes de los capítulos 1 al 16, estos ejercicios adicionales dan a los estudiantes aplicaciones del mundo real, y más oportunidades para ver el material del capítulo y ponerlo en práctica. Un icono indica las aplicaciones de Principios en práctica que pueden resolverse por medio de una calculadora gráfica. Las respuestas a las aplicaciones de Principios en práctica aparecen al final del texto.



Cada capítulo (excepto el 0), tiene una sección de repaso que contiene una lista de términos y símbolos importantes, un resumen del capítulo y gran cantidad de problemas de repaso.

Las respuestas a los problemas con número impar aparecen al final del libro. Para muchos de los problemas de diferenciación, las respuestas aparecen en forma no simplificada y simplificada. Esto permite a los estudiantes verificar con prontitud su trabajo.

Planeación del curso

Ya que los instructores planifican el perfil del curso, para que sirva a las necesidades individuales de una clase y temario particular, no intentamos proporcionar directrices de cursos. Sin embargo, dependiendo de los antecedentes de

los estudiantes, algunos instructores elegirán omitir el capítulo 0, *Repaso de álgebra*, o el capítulo 1, *Ecuaciones*; otros podrían excluir los temas de álgebra matricial y programación lineal. Ciertamente, hay otras secciones que pueden omitirse a juicio del instructor. Como una ayuda para planificar un de curso, tal vez algunos comentarios podrían ser útiles. La sección 2.1 introduce términos de administración, como ingreso, costo fijo, costo variable y utilidad. La sección 4.2 introduce la noción de ecuaciones de oferta y demanda, y en la sección 4.6 se estudia el punto de equilibrio. Secciones opcionales, que no causarán problemas si se omiten son: 7.3, 7.5, 13.4, 15.1, 15.2, 16.4, 16.6, 16.9 y 16.10. La sección 15.8 puede ser omitida, para aquellos que carezcan de bases de probabilidad.

Suplementos

Para los instructores

Instructor's Solution Manual. Se encuentra disponible en inglés y ofrece las soluciones desarrolladas para todos los ejercicios y aplicaciones de principios en práctica.
Archivo de preguntas de examen. Proporciona más de 1700 preguntas de examen, clasificadas por capítulo y sección.
Examen Personalizado de Prentice Hall. Permite al instructor ingresar al archivo de preguntas de examen computarizado, y preparar e imprimir exámenes personalmente. Incluye una característica de edición que permite agregar y cambiar preguntas.

Para instructores y estudiantes

Website acompañante de PH. Disponible en inglés y diseñado para complementar y expandir el texto, el website ofrece una variedad de herramientas de aprendizaje interactivas, que incluyen: enlaces a sitios de la red, trabajos prácticos para estudiantes y la capacidad para que los instructores revisen y evalúen el trabajo de los estudiantes en el website. Para más información, contacte a su representante local de Prentice Hall.
www.prenhall.com/Haeussler

Reconocimientos

Expresamos nuestro agradecimiento a los colegas siguientes quienes contribuyeron con comentarios y sugerencias que fueron valiosos para nosotros en el desarrollo de este texto:

R. M. Alliston (*Pennsylvania State University*); R. A. Alo (*University of Houston*); K. T. Andrews (*Oakland University*); M. N. de Arce (*University of Puerto Rico*); G. R. Bates (*Western Illinois University*); D. E. Bennett (*Murray State University*); C. Bernett (*Harper College*); A. Bishop (*Western Illinois University*); S. A. Book (*California State University*); A. Brink (*St. Cloud State University*); R. Brown (*York University*); R. W. Brown (*University of Alaska*); S. D. Bulman-Fleming (*Wilfrid Laurier University*); D. Calvetti (*National College*); D. Cameron (*University of Akron*); K. S. Chung (*Kapiolani Community College*); D. N. Clark (*University of Georgia*); E. L. Cohen (*University of 0ttawa*); J. Dawson (*Pennsylvania State University*); A. Dollins (*Pennsylvania State University*); G. A. Earles (*St. Cloud State University*); B. H. Edwards (*University of Florida*); J. R. Elliott (*Wilfrid Laurier University*); J. Fitzpatrick (*University of Texas at El Paso*); M. J. Flynn (*Rhode Island Junior College*); G. J. Fuentes (*University of Maine*); S. K. Goel (*Valdosta State University*); G. Goff (*Oklahoma State University*); J. Goldman (*DePaul University*); J. T. Gresser (*Bowling Green State University*); L. Griff (*Pennsylvania State University*); F. H. Hall (*Pennsylvania State University*); V. E. Hanks (*Western Kentucky University*); R. C. Heitmann (*The University of Texas at Austin*); J. N. Henry (*California State University*); W. U. Hodgson (*West Chester State College*); B. C. Horne Jr. (*Virginia Polytechnic Institute* y *State University*); J. Hradnansky (*Pennsylvania State University*); C. Hurd (*Pennsylvania State University*); J. A. Jiménez (*Pennsylvania State University*); W. C. Jones (*Western Kentucky University*); R. M. King (*Gettysburg College*); M. M. Kostreva (*University of Maine*); G. A. Kraus (*Gannon University*); J. Kucera (*Washington State University*); M. R. Latina (*Rhode Island Junior College*); J. F. Longman (*Villanova University*); I. Marshak (*Loyola University of Chicago*); D. Mason (*Elmhurst College*); F. B. Mayer (*Mt. San Antonio College*); P. McDougle (*University of Miami*); F. Miles (*California State University*); E. Mohnike (*Mt. San Antonio College*); C. Monk (*University of Richmond*); R. A. Moreland (*Texas Tech University*); J. G. Morris (*University of Wisconsin-Madison*); J. C. Moss (*Paducah Community College*); D. Mullin (*Pennsylvania State University*); E. Nelson (*Pennsylvania State University*); S. A. Nett (*Western Illinois University*); R. H. Oehmke (*University of Iowa*); Y. Y. Oh (*Pennsylvania State University*); N. B. Patterson (*Pennsylvania State University*); V. Pedwaydon (*Lawrence Technical University*); E. Pemberton (*Wilfrid Laurier University*); M. Perkel (*Wright State University*); D. B. Priest (*Harding College*); J. R. Provencio (*University of Texas*); L. R. Pulsinelli (*Western Kentucky University*); M. Racine (*University of Ottawa*); N. M. Rice (*Queen's University*); A. Santiago (*University of Puerto Rico*); J. R. Schaefer (*University of Wisconsin-Milwaukee*); S. Sehgal (*The Ohio State University*); W. H. Seybold, Jr. (*West Chester State College*); G. Shilling (*The University of Texas at Arlington*); S. Singh (*Pennsylvania State University*); L. Small (*Los Angeles Pierce College*); E. Smet (*Huron College*); M. Stoll (*University of South Carolina*); A. Tierman (*Saginaw Valley State University*); B. Toole (*University of Maine*); J. W. Toole (*University of Maine*); D. H. Trahan (*Naval Postgraduate School*); J. P. Tull (*The Ohio State University*); L. O. Vaughan, Jr. (*University of Alabama in Birmingham*); L. A. Vercoe (*Pennsylvania State University*); M. Vuilleumier (*The Ohio State University*); B. K. Waits (*The Ohio State University*); A. Walton (*Virginia Polytechnic Institute, and State University*); H. Walum (*The Ohio State University*); E. T. H. Wang (*Wilfrid Laurier University*); A. J. Weidner (*Pennsylvania State University*); L.

Weiss (*Pennsylvania State University*); N. A. Weigmann (*California State University*); G. Woods (*The Ohio State University*); C. R. B. Wright (*University of Oregon*); C. Wu (*University of Wisconsin-Milwaukee*).

Algunos ejercicios se tomaron de los problemas utilizados por los estudiantes de la Universidad Wilfrid Laurier. Deseamos extender nuestros agradecimientos especiales al Departamento de Matemáticas de la Universidad Wilfrid Laurier por conceder permiso a Prentice Hall de utilizar y publicar este material, y también agradecer a Prentice Hall quien a su vez nos permitió hacer uso de este material.

También agradecemos a LaurelTech por su aportación a los apéndices de conceptos de cálculo, por la verificación de errores del texto y por sus esfuerzos en el proceso de revisión.

Por último, expresamos nuestra sincera gratitud a la facultad y coordinadores de cursos de la Universidad Estatal de Ohio y la Universidad Estatal de Columbus, quienes tuvieron un gran interés en la décima edición, y ofrecieron una gran cantidad de valiosas sugerencias.

Ernest F. Haeussler, Jr.
Richard S. Paul



CAPÍTULO 0

Repaso de álgebra

Quienquiera que tenga un negocio necesita llevar el registro de cómo van las cosas. Pero, ¿cómo se hace esto? Con frecuencia los profesionales en finanzas miden el desempeño de una compañía por medio del cálculo de fracciones denominadas razones financieras. Existen más de 50 diferentes razones financieras de uso común. ¿Cuál utilizar? Depende de si el analista está tratando de valuar el crecimiento de una compañía, su productividad, su nivel de endeudamiento o algún otro aspecto de su desempeño.

Una razón importante en ventas al menudeo es la *razón de rotación de inventarios*. Para un periodo dado,

$$\text{razón de rotación de inventarios} = \frac{\text{ventas netas}}{\text{inventario promedio}},$$

en donde el inventario se mide en valor total en dólares en el punto de venta. Cuando sustituimos las expresiones apropiadas para las ventas netas y el inventario promedio, la fórmula se transforma en,

$$\begin{matrix}\text{razón de rotación}\\ \text{de inventarios}\end{matrix} = \frac{\text{ventas brutas} - \text{devoluciones y rebajas}}{\dfrac{\text{inventario inicial} + \text{inventario al cierre}}{2}}.$$

La razón de rotación de inventarios mide qué tan rápido se venden y reabastecen las existencias del vendedor de bienes: entre mayor sea este cociente, más rápida es la rotación. Un cociente muy pequeño significa grandes inventarios en los que los artículos permanecen en el almacén por largos periodos y están sujetos a deterioros. Una razón demasiado alta significa un inventario pequeño y un riesgo asociado para el vendedor, ya sea la pérdida de ventas o el pago de precios altos para reabastecer los artículos en pequeños lotes. La razón de rotación de inventario ideal varía de industria a industria, pero una razón anual ideal de seis es razonable para un detallista de bienes perdurables, como hardware o aparatos electrónicos. Por supuesto que la razón para un vendedor de verduras necesita ser mucho más alta.

La razón de rotación de inventarios es un ejemplo de una expresión algebraica. Su cálculo implica la sustitución de números reales para las cantidades variables (ventas brutas y otras) y la realización de operaciones aritméticas (suma, resta y división). Este capítulo revisará los números reales, las expresiones algebraicas y las operaciones básicas sobre ellos.

0.1 Objetivo

Este capítulo está diseñado para ofrecer un repaso breve sobre algunos términos y métodos para la manipulación de las matemáticas. Sin duda usted ya estudió mucho de este material con anterioridad. Sin embargo, ya que estos temas son importantes para el manejo de las matemáticas que vienen después, tal vez resulte benéfica una rápida exposición de ellos. Destine el tiempo que sea necesario para las secciones en que necesita un repaso.

OBJETIVO Familiarizarse con conjuntos, la clasificación de los números reales y la recta de los números reales.

0.2 Conjuntos y números reales

En términos sencillos, un *conjunto* es una colección de objetos. Por ejemplo, podemos hablar del conjunto de números pares entre 5 y 11, es decir, 6, 8 y 10. Un objeto de un conjunto se conoce como *elemento* o *miembro* de ese conjunto.

Una manera de especificar un conjunto es hacer una lista de sus elementos, en cualquier orden, dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto anterior es $\{6, 8, 10\}$, que podemos denotar por medio de una letra, como A. Un conjunto A se dice que es un subconjunto de un conjunto B si y sólo si todo elemento de A también es un elemento de B. Por ejemplo, si $A = \{6, 8, 10\}$ y $B = \{6, 8, 10, 12\}$, entonces A es un subconjunto de B.

Ciertos conjuntos de números tienen nombres especiales. Los números 1, 2, 3, y así sucesivamente, forman el conjunto de los **enteros positivos** (o **números naturales**):

$$\textit{conjunto de enteros positivos} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Los tres puntos significan que el listado de elementos continúa sin fin, aun cuando se sabe cuáles son los elementos.

Los enteros positivos junto con el cero, y los **enteros negativos** $-1, -2, -3, \ldots$, forman el conjunto de los **enteros:**

$$\textit{conjunto de enteros} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

La razón para que $q \neq 0$, es que no podemos dividir entre cero.

Todo entero es un número racional.

El conjunto de los **números racionales** consiste en números como $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{3}$, que pueden escribirse como una razón (cociente) de dos enteros. Esto es, un número racional es aquél que puede escribirse como p/q, donde p y q son enteros y $q \neq 0$. (el símbolo "$\neq$" se lee "no es igual a" o "diferente de".) Por ejemplo, los números $\frac{19}{20}$, $\frac{-2}{7}$ y $\frac{-6}{-2}$ son racionales. Observemos que $\frac{2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{-4}{-8}$ y 0.5 representan todos al mismo número racional. El entero 2 es racional ya que $2 = \frac{2}{1}$. De hecho, todo entero es racional.

Todos los números racionales pueden representarse por números decimales que *terminan*, como $\frac{3}{4} = 0.75$ y $\frac{3}{2} = 1.5$, o bien por *decimales repetidos que no terminan* (un grupo de dígitos que se repiten sin fin), como $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$, $\frac{-4}{11} = -0.3636\ldots$ y $\frac{2}{15} = 0.1333\ldots$ Los números que se representan por decimales *no repetidos que no terminan* se conocen como **números irracionales.** Un número irracional no puede escribirse como un entero dividido entre un entero. Los números π (pi) y $\sqrt{2}$ son irracionales.

Los números reales consisten en todos los números decimales.

Juntos, los números racionales y los números irracionales forman el conjunto de los **números reales.** Los números reales pueden representarse por puntos en una recta. Primero seleccionamos un punto en la recta para representar al cero. Este punto es llamado *origen* (véase la fig. 0.1). Después se elige una medida estándar de distancia, "unidad de distancia", y se marca sucesivamente en ambas direcciones a la derecha y a la izquierda del origen. Con cada punto sobre la recta asociamos una distancia dirigida, o *número con signo,* que depende de la posición del punto con respecto al origen. Las posiciones a la derecha del origen se consideran positivas (+) y las de la izquierda negativas (−). Por ejemplo, al punto ubicado a $\frac{1}{2}$ de unidad a la derecha del

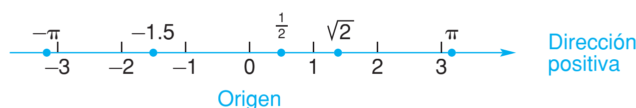


FIGURA 0.1 La recta de los números reales.

origen, le corresponde el número $\frac{1}{2}$, que se denomina **coordenada** de ese punto. En forma similar, la coordenada del punto situado a 1.5 unidades a la izquierda del origen es −1.5. En la figura 0.1 están marcadas las coordenadas de algunos puntos. La punta de la flecha indica que la dirección hacia la derecha a lo largo de la recta es positiva.

A cada punto sobre la recta le corresponde un número real único, y a cada número real le corresponde un punto único de la recta. Por esta razón decimos que hay una *correspondencia uno a uno* entre los puntos de la recta y los números reales. Llamamos a esta recta la **recta de coordenadas** o **recta de números reales.** Tenemos la libertad para tratar a los números reales como puntos sobre dicha recta y viceversa.

Ejercicio 0.2

En los problemas del 1 al 12, clasifique los enunciados como verdaderos o falsos. Si es falso, dé una razón.

1. −7 es un entero.

2. $\frac{1}{6}$ es racional.

3. −3 es un número natural.

4. 0 no es racional.

5. 5 es racional.

6. $\frac{7}{0}$ es un número racional.

7. $\sqrt{25}$ no es un entero positivo.

8. π es un número real.

9. $\frac{0}{6}$ es racional.

10. $\sqrt{3}$ es un número natural.

11. −3 está a la derecha de −4 en la recta de los números reales.

12. Todo entero es positivo o negativo.

OBJETIVO Establecer e ilustrar las propiedades siguientes de los números reales: transitiva, conmutativa, asociativa, inversa y distributiva. Definir la resta y la división en términos de la suma y la multiplicación, respectivamente.

0.3 Algunas propiedades de los números reales

Ahora establezcamos algunas propiedades importantes de los números reales. Sean a, b y c números reales.

1. Propiedad transitiva de la igualdad

Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Por tanto, dos números que sean iguales a un tercer número son iguales entre sí. Por ejemplo, si $x = y$ y $y = 7$, entonces $x = 7$.

2. Propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación

$$a + b = b + a \quad \text{y} \quad ab = ba.$$

Esto significa que dos números pueden sumarse o multiplicarse en cualquier orden. Por ejemplo, $3 + 4 = 4 + 3$ y $7(-4) = (-4)(7)$.

3. Propiedad asociativa de la suma y de la multiplicación

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{y} \quad a(bc) = (ab)c.$$

Esto significa que en la suma o multiplicación, los números pueden agruparse en cualquier orden. Por ejemplo, $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$; en ambos casos la suma es 9. En forma semejante, $2x + (x + y) = (2x + x) + y$ y $6(\frac{1}{3} \cdot 5) = (6 \cdot \frac{1}{3}) \cdot 5$.

4. Propiedades del inverso

Para cada número real a, existe un único número real denotado por $-a$ tal que,

$$a + (-a) = 0.$$

El número $-a$ es llamado el **inverso aditivo** o **negativo** de a.

Por ejemplo, ya que $6 + (-6) = 0$, el inverso aditivo de 6 es -6. El inverso aditivo de un número no necesariamente es un número negativo. Por ejemplo, el inverso aditivo de -6 es 6, ya que $(-6) + (6) = 0$. Esto es, el negativo de -6 es 6, de modo que podemos escribir $-(-6) = 6$.

Para cada número real a, excepto el cero, existe un único número real denotado por a^{-1} tal que,

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

El número a^{-1} se conoce como el **inverso multiplicativo** de a.

El cero no tiene inverso multiplicativo, ya que no existe número que cuando se multiplica por cero dé como resultado 1.

Por tanto, todos los números, con excepción del cero, tienen un inverso multiplicativo. Como se recordará, a^{-1} puede escribirse como $\frac{1}{a}$ y también se llama el *recíproco* de a. Por ejemplo, el inverso multiplicativo de 3 es $\frac{1}{3}$, ya que $3(\frac{1}{3}) = 1$. Por lo que $\frac{1}{3}$ es el recíproco de 3. El recíproco de $\frac{1}{3}$ es 3, ya que $(\frac{1}{3})(3) = 1$. **El recíproco de 0 no está definido.**

5. Propiedades distributivas

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{y} \quad (b + c)a = ba + ca.$$

Por ejemplo, aunque $2(3 + 4) = 2(7) = 14$, podemos escribir

$$2(3 + 4) = 2(3) + 2(4) = 6 + 8 = 14.$$

En la misma forma,

$$(2 + 3)(4) = 2(4) + 3(4) = 8 + 12 = 20,$$

$$\text{y } x(z + 4) = x(z) + x(4) = xz + 4x.$$

La propiedad distributiva puede ser extendida a la forma

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad.$$

De hecho, puede ser extendida para sumas con cualquier número de términos.

La **resta** se define en términos de la suma:

$$a - b \text{ significa } a + (-b),$$

en donde $-b$ es el inverso aditivo de b. Así, $6 - 8$ significa $6 + (-8)$.

En forma semejante, definimos la **división** en términos de la multiplicación. Si $b \neq 0$, entonces $a \div b$, o $\frac{a}{b}$, está definida por

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1}).$$

Como $b^{-1} = \frac{1}{b}$,

$$\frac{a}{b} = a(b^{-1}) = a\left(\frac{1}{b}\right).$$

$\frac{a}{b}$ significa a veces el recíproco de b.

Así, $\frac{3}{5}$ significa 3 veces $\frac{1}{5}$, en donde $\frac{1}{5}$ es el inverso multiplicativo de 5. Algunas veces nos referimos a $a \div b$ o $\frac{a}{b}$ como la *razón* de a a b. Observemos que como 0 no tiene inverso multiplicativo, **la división entre 0 no está definida.**

Los ejemplos siguientes muestran algunas aplicaciones de las propiedades anteriores.

EJEMPLO 1 Aplicación de las propiedades de los números reales

a. $x(y - 3z + 2w) = (y - 3z + 2w)x$, por la propiedad conmutativa de la multiplicación.

b. Por la propiedad asociativa de la multiplicación, $3(4 \cdot 5) = (3 \cdot 4)5$. Por tanto, el resultado de multiplicar 3 por el producto de 4 y 5 es el mismo que el de multiplicar el producto de 3 y 4 por 5. En cualquier caso el resultado es 60.

EJEMPLO 2 Aplicación de las propiedades de los números reales

a. *Demostrar que* $2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2$.

Solución: por la definición de resta, $2 - \sqrt{2} = 2 + (-\sqrt{2})$. Sin embargo, por la propiedad conmutativa de la suma, $2 + (-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + 2$. Así, por la propiedad transitiva, $2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2$. De manera más concisa, omitimos pasos intermedios y escribimos directamente

$$2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2.$$

b. *Demostrar que* $(8 + x) - y = 8 + (x - y)$.

Solución: al empezar con el lado izquierdo, tenemos

$$\begin{aligned} (8 + x) - y &= (8 + x) + (-y) && \text{(definición de la resta)} \\ &= 8 + [x + (-y)] && \text{(propiedad asociativa)} \\ &= 8 + (x - y) && \text{(definición de la resta).} \end{aligned}$$

Por lo que, por la propiedad transitiva,

$$(8 + x) - y = 8 + (x - y).$$

c. *Demostrar que* $3(4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$.

Solución: por la propiedad distributiva,

$$3(4x + 2y + 8) = 3(4x) + 3(2y) + 3(8).$$

Pero por la propiedad asociativa de la multiplicación,

$$3(4x) = (3 \cdot 4)x = 12x \quad \text{y de manera similar} \quad 3(2y) = 6y.$$

Por tanto, $3(4x + 2y + 8) = 12x + 6y + 24$.

EJEMPLO 3 Aplicación de las propiedades de los números reales

a. *Demostrar que* $\frac{ab}{c} = a\left(\frac{b}{c}\right)$ *para* $c \neq 0$.

Solución: por la definición de división,

$$\frac{ab}{c} = (ab) \cdot \frac{1}{c} \text{ para } c \neq 0.$$

Pero por la propiedad asociativa,

$$(ab) \cdot \frac{1}{c} = a\left(b \cdot \frac{1}{c}\right).$$

Sin embargo, por la definición de la división, $b \cdot \frac{1}{c} = \frac{b}{c}$. Por tanto,

$$\frac{ab}{c} = a\left(\frac{b}{c}\right).$$

También podemos demostrar que $\frac{ab}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)b$.

b. *Demostrar que* $\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ *para* $c \neq 0$.

Solución: por la definición de la división y la propiedad distributiva,

$$\frac{a + b}{c} = (a + b)\frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c}.$$

Sin embargo,

$$a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

De aquí que,

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Observamos que $\frac{a}{b + c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$. Por ejemplo,

$$\frac{3}{2+1} \neq \frac{3}{2} + \frac{3}{1}.$$

La única forma para determinar el producto de varios números es considerar los productos de los números tomados de 2 en 2. Por ejemplo, para encontrar el producto de x, y y z podríamos multiplicar primero x por y y después multiplicar el producto resultante por z, esto es, encontrar $(xy)z$. O, de manera alterna, multiplicar x por el producto de y y z, esto es, encontrar $x(yz)$. La propiedad asociativa de la multiplicación garantiza que ambos resultados sean idénticos, sin importar cómo se agrupen los números. Por tanto, no es ambiguo escribir xyz. Este concepto puede ampliarse a más de tres números y se aplica de la misma manera a la suma.

Es importante hacer un comentario final antes de terminar esta sección. No sólo debe tener cuidado al aplicar las propiedades de los números reales, también debe conocer y familiarizarse con la terminología involucrada.

Ejercicio 0.3

En los problemas del 1 al 10, clasifique los enunciados como verdaderos o falsos.

1. Todo número real tiene un recíproco.

2. El recíproco de $\frac{2}{5}$ es $\frac{5}{2}$.

3. El inverso aditivo de 5 es $\frac{1}{5}$.

4. $2(3 \cdot 4) = (2 \cdot 3)(2 \cdot 4)$.

5. $-x + y = -y + x$.

6. $(x + 2)(4) = 4x + 8$.

7. $\frac{x+2}{2} = \frac{x}{2} + 1$.

8. $3\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{3x}{4}$.

9. $x + (y + 5) = (x + y) + (x + 5)$.

10. $8(9x) = 72x$.

En los problemas del 11 al 20, establezca cuál propiedad de los números reales se usa.

11. $2(x + y) = 2x + 2y$.

12. $(x + 5) + y = y + (x + 5)$.

13. $2(3y) = (2 \cdot 3)y$.

14. $\frac{6}{7} = 6 \cdot \frac{1}{7}$.

15. $2(x - y) = (x - y)(2)$.

16. $y + (x + y) = (y + x) + y$.

17. $8 - y = 8 + (-y)$.

18. $5(4 + 7) = 5(7 + 4)$.

19. $(8 + a)b = 8b + ab$.

20. $(-1)[-3 + 4] = (-1)(-3) + (-1)(4)$.

En los problemas del 21 al 26, demuestre que los enunciados son verdaderos, para ello utilice las propiedades de los números reales.

21. $5a(x + 3) = 5ax + 15a$.

22. $(2 - x) + y = 2 + (y - x)$.

23. $(x + y)(2) = 2x + 2y$.

24. $2[27 + (x + y)] = 2[(y + 27) + x]$.

25. $x[(2y + 1) + 3] = 2xy + 4x$.

26. $(x + 1)(y + z) = xy + xz + y + z$.

---

27. Demuestre que $a(b + c + d) = ab + ac + ad$. [*Sugerencia:* $b + c + d = (b + c) + d$.]

OBJETIVO Enlistar e ilustrar las propiedades más comunes de los números reales.

0.4 Operaciones con números reales

La lista siguiente establece las propiedades importantes de los números reales que usted debe estudiar a fondo. El ser capaz de manejar los números reales es esencial para tener éxito en matemáticas. A cada propiedad le sigue un ejemplo numérico. Todos los denominadores son diferentes de cero. Se supone que usted cuenta con un conocimiento previo de suma y resta de números reales.

	Propiedad	*Ejemplo(s)*
1.	$a - b = a + (-b).$	$2 - 7 = 2 + (-7) = -5.$
2.	$a - (-b) = a + b.$	$2 - (-7) = 2 + 7 = 9.$
3.	$-a = (-1)(a).$	$-7 = (-1)(7).$
4.	$a(b + c) = ab + ac.$	$6(7 + 2) = 6 \cdot 7 + 6 \cdot 2 = 54.$
5.	$a(b - c) = ab - ac.$	$6(7 - 2) = 6 \cdot 7 - 6 \cdot 2 = 30.$
6.	$-(a + b) = -a - b.$	$-(7 + 2) = -7 - 2 = -9.$
7.	$-(a - b) = -a + b.$	$-(2 - 7) = -2 + 7 = 5.$
8.	$-(-a) = a.$	$-(-2) = 2.$
9.	$a(0) = 0.$	$2(0) = 0.$
10.	$(-a)(b) = -(ab) = a(-b).$	$(-2)(7) = -(2 \cdot 7) = 2(-7) = -14.$
11.	$(-a)(-b) = ab.$	$(-2)(-7) = 2 \cdot 7 = 14.$
12.	$\frac{a}{1} = a.$	$\frac{7}{1} = 7, \frac{-2}{1} = -2.$
13.	$\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right).$	$\frac{2}{7} = 2\left(\frac{1}{7}\right).$
14.	$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}.$	$\frac{2}{-7} = -\frac{2}{7} = \frac{-2}{7}.$
15.	$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}.$	$\frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}.$
16.	$\frac{0}{a} = 0$ cuando $a \neq 0.$	$\frac{0}{7} = 0.$
17.	$\frac{a}{a} = 1$ cuando $a \neq 0.$	$\frac{2}{2} = 1, \frac{-5}{-5} = 1.$
18.	$a\left(\frac{b}{a}\right) = b.$	$2\left(\frac{7}{2}\right) = 7.$
19.	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$ cuando $a \neq 0.$	$2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$
20.	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}.$
21.	$\frac{ab}{c} = \left(\frac{a}{c}\right)b = a\left(\frac{b}{c}\right).$	$\frac{2 \cdot 7}{3} = \frac{2}{3} \cdot 7 = 2 \cdot \frac{7}{3}.$
22.	$\frac{a}{bc} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right) = \left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{a}{c}\right).$	$\frac{2}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7}.$
23.	$\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{c}\right) = \frac{ac}{bc}$ cuando $c \neq 0.$	$\frac{2}{7} = \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{5}{5}\right) = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5}.$
24.	$\frac{a}{b(-c)} = \frac{a}{(-b)(c)} = \frac{-a}{bc} = \frac{-a}{(-b)(-c)} = -\frac{a}{bc}.$	$\frac{2}{3(-5)} = \frac{2}{(-3)(5)} = \frac{-2}{3(5)} = \frac{-2}{(-3)(-5)} = -\frac{2}{3(5)} = -\frac{2}{15}.$

Propiedad	*Ejemplo(s)*
25. $\frac{a(-b)}{c} = \frac{(-a)b}{c} = \frac{ab}{-c} = \frac{(-a)(-b)}{-c} = -\frac{ab}{c}$.	$\frac{2(-3)}{5} = \frac{(-2)(3)}{5} = \frac{2(3)}{-5} = \frac{(-2)(-3)}{-5} = -\frac{2(3)}{5} = -\frac{6}{5}$.
26. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.	$\frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{2+3}{9} = \frac{5}{9}$.
27. $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.	$\frac{2}{9} - \frac{3}{9} = \frac{2-3}{9} = \frac{-1}{9}$.
28. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.	$\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{22}{15}$.
29. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$.	$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 - 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$.
30. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.	$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{7}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$.
31. $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \div \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$.	$\frac{2}{\frac{3}{5}} = 2 \div \frac{3}{5} = 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3} = \frac{10}{3}$.
32. $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$.	$\frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$.

La propiedad 23 es esencialmente el **principio fundamental de las fracciones,** el cual establece que *multiplicar o dividir el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número, excepto el cero, tiene como resultado una fracción equivalente a* (*esto es, que tiene el mismo valor que*) *la fracción original*. Así,

$$\frac{7}{\frac{1}{8}} = \frac{7 \cdot 8}{\frac{1}{8} \cdot 8} = \frac{56}{1} = 56.$$

Por las propiedades 28 y 23 tenemos

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2 \cdot 15 + 5 \cdot 4}{5 \cdot 15} = \frac{50}{75} = \frac{2 \cdot 25}{3 \cdot 25} = \frac{2}{3}.$$

También podemos resolver este problema convirtiendo $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{15}$ en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador y después utilizar la propiedad 26. Las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{15}$, pueden escribirse con un denominador común de $5 \cdot 15$,

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 15}{5 \cdot 15} \text{ y } \frac{4}{15} = \frac{4 \cdot 5}{15 \cdot 5}.$$

Sin embargo, 15 es el *menor* de dichos denominadores comunes, el cual se conoce como el *mínimo común denominador* (MCD) de $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{15}$. Por tanto,

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6+4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Del mismo modo,

$$\frac{3}{8} - \frac{5}{12} = \frac{3\cdot 3}{8\cdot 3} - \frac{5\cdot 2}{12\cdot 2} \qquad (\text{MCD} = 24)$$
$$= \frac{9}{24} - \frac{10}{24} = \frac{9-10}{24}$$
$$= -\frac{1}{24}.$$

Ejercicio 0.4

Simplifique, si es posible, cada una de las siguientes expresiones.

1. $-2 + (-4)$.
2. $-6 + 2$.
3. $6 + (-4)$.
4. $7 - 2$.
5. $7 - (-4)$.
6. $-6 - (-11)$.
7. $-8 - (-6)$.
8. $(-2)(9)$.
9. $7(-9)$.
10. $(-2)(-12)$.
11. $(-1)6$.
12. $-(-9)$.
13. $-(-6 + x)$.
14. $-7(x)$.
15. $-12(x - y)$.
16. $-[-6 + (-y)]$.
17. $-3 \div 15$.
18. $-2 \div (-4)$.
19. $4 \div (-2)$.
20. $2(-6 + 2)$.
21. $3[-2(3) + 6(2)]$.
22. $(-2)(-4)(-1)$.
23. $(-8)(-8)$.
24. $x(0)$.
25. $3(x - 4)$.
26. $4(5 + x)$.
27. $-(x - 2)$.
28. $0(-x)$.
29. $8\left(\frac{1}{11}\right)$.
30. $\frac{7}{1}$.
31. $\frac{-5x}{7y}$.
32. $\frac{3}{-2x}$.
33. $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}$.
34. $\frac{a}{c}(3b)$.
35. $(2x)\left(\frac{3}{2x}\right)$.
36. $\frac{-18y}{-3x}$.
37. $\frac{7}{y}\cdot\frac{1}{x}$.
38. $\frac{2}{x}\cdot\frac{5}{y}$.
39. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.
40. $\frac{5}{12} + \frac{3}{4}$.
41. $\frac{3}{10} - \frac{7}{15}$.
42. $\frac{2}{3} + \frac{7}{3}$.
43. $\frac{x}{9} - \frac{y}{9}$.
44. $\frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$.
45. $\frac{2}{5} - \frac{3}{8}$.
46. $\frac{6}{\frac{x}{y}}$.
47. $\frac{\frac{k}{9}}{n}$.
48. $\frac{\frac{-5}{4}}{\frac{7}{10}}$.
49. $\frac{7}{0}$.
50. $\frac{0}{7}$.
51. $\frac{0}{0}$.
52. $0\cdot 0$.

OBJETIVO Revisar los exponentes enteros positivos, el exponente cero, los exponentes enteros negativos, los exponentes racionales, las raíces principales, los radicales y el procedimiento de racionalización del denominador.

0.5 Exponentes y radicales

El producto de $x \cdot x \cdot x$ se abrevia x^3. En general, para un entero positivo n, x^n es la abreviatura del producto de n factores, cada uno de los cuales es x. La letra n en x^n se denomina *exponente* y a x se le llama *base*. Específicamente, si n es un entero positivo tenemos:

1. $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ factores}}$.

2. $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ factores}}}$.

3. $\dfrac{1}{x^{-n}} = x^n$.

4. $x^0 = 1$ si $x \neq 0$. 0^0 no está definido.

EJEMPLO 1 **Exponentes**

a. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{16}$.

b. $3^{-5} = \dfrac{1}{3^5} = \dfrac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \dfrac{1}{243}$.

c. $\dfrac{1}{3^{-5}} = 3^5 = 243$.

d. $2^0 = 1$, $\pi^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$.

e. $x^1 = x$.

Si $r^n = x$, donde n es un entero positivo, entonces r es una *raíz n-ésima* de x. Por ejemplo, $3^2 = 9$ y así 3 es una raíz segunda de 9 (por lo común llamada una *raíz cuadrada*) de 9. Como $(-3)^2 = 9$, -3 también es una raíz cuadrada de 9. De modo similar, -2 es una *raíz cúbica* de -8, ya que $(-2)^3 = -8$.

Algunos números no tienen una raíz n-ésima que sea un número real. Por ejemplo, como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, no existe número real que sea una raíz cuadrada de -4.

La **raíz *n*-ésima principal** de x es la raíz n-ésima de x que sea positiva si x es positiva, y es la raíz n-ésima negativa si x es negativa y n es impar. Esta raíz la denotamos mediante $\sqrt[n]{x}$. Así,

$$\sqrt[n]{x} \text{ es } \begin{cases} \text{positiva si } x \text{ es positiva,} \\ \text{negativa si } x \text{ es negativa y } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por ejemplo, $\sqrt[2]{9} = 3$, $\sqrt[3]{-8} = -2$ y $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$. Definimos $\sqrt[n]{0} = 0$.

El símbolo $\sqrt[n]{x}$ se denomina **radical,** Aquí n es el *índice*, x es el *radicando* y $\sqrt{}$ es el *signo radical*. Con las raíces cuadradas principales, por lo regular omitimos el índice y escribimos $\sqrt{x}$ en lugar de $\sqrt[2]{x}$. Por tanto, $\sqrt{9} = 3$.



Advertencia Aunque 2 y -2 son raíces cuadradas de 4, la raíz cuadrada **principal** de 4 es 2, no -2. Por lo que, $\sqrt{4} = 2$.

Si x es positiva, la expresión $x^{p/q}$, en donde p y q son enteros y q es positiva, se define como $\sqrt[q]{x^p}$. Por lo que,

$$x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}; \quad 8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4;$$

$$4^{-1/2} = \sqrt[2]{4^{-1}} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}.$$

A continuación se presentan las leyes básicas de los exponentes y radicales:[1]

Ley	*Ejemplo(s)*
1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.	$2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256$; $x^2 \cdot x^3 = x^5$.
2. $x^0 = 1$ si $x \neq 0$.	$2^0 = 1$.
3. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.	$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.
4. $\dfrac{1}{x^{-n}} = x^n$.	$\dfrac{1}{2^{-3}} = 2^3 = 8$; $\dfrac{1}{x^{-5}} = x^5$.
5. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \dfrac{1}{x^{n-m}}$.	$\dfrac{2^{12}}{2^8} = 2^4 = 16$; $\dfrac{x^8}{x^{12}} = \dfrac{1}{x^4}$.
6. $\dfrac{x^m}{x^m} = 1$.	$\dfrac{2^4}{2^4} = 1$.
7. $(x^m)^n = x^{mn}$.	$(2^3)^5 = 2^{15}$; $(x^2)^3 = x^6$.
8. $(xy)^n = x^n y^n$.	$(2 \cdot 4)^3 = 2^3 \cdot 4^3 = 8 \cdot 64 = 512$.
9. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$.	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2^3}{3^3}$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 = \dfrac{1^5}{3^5} = \dfrac{1}{3^5} = 3^{-5}$.
10. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^n$.	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$.
11. $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.	$3^{1/5} = \sqrt[5]{3}$.
12. $x^{-1/n} = \dfrac{1}{x^{1/n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$.	$4^{-1/2} = \dfrac{1}{4^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$.
13. $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.	$\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{18}$.
14. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$.	$\dfrac{\sqrt[3]{90}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\dfrac{90}{10}} = \sqrt[3]{9}$.
15. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$.	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$.
16. $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$.	$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$.
17. $(\sqrt[m]{x})^m = x$.	$(\sqrt[8]{7})^8 = 7$.

Cuando calculamos $x^{m/n}$, con frecuencia es más fácil determinar primero $\sqrt[n]{x}$ y luego elevar el resultado a la potencia m-ésima. Así, $(-27)^{4/3} = (\sqrt[3]{-27})^4 = (-3)^4 = 81$.

EJEMPLO 2 Exponentes y radicales

a. Por la ley 1,

$$x^6x^8 = x^{6+8} = x^{14},$$

$$a^3b^2a^5b = a^3a^5b^2b^1 = a^8b^3,$$

$$x^{11}x^{-5} = x^{11-5} = x^6,$$

$$z^{2/5}z^{3/5} = z^1 = z,$$

$$xx^{1/2} = x^1x^{1/2} = x^{3/2}.$$

[1]Aunque algunas leyes incluyen restricciones, éstas no son vitales para nuestro estudio.

b. Por la ley 16,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

c. $\left(-\frac{8}{27}\right)^{4/3} = \left(\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}\right)^4$ (Leyes 16 y 14)

$= \left(\frac{-2}{3}\right)^4$

$= \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81}$ (Ley 9)

d. $(64a^3)^{2/3} = 64^{2/3}(a^3)^{2/3}$ (Ley 8)

$= (\sqrt[3]{64})^2 a^2$ (Leyes 16 y 7)

$= (4)^2 a^2 = 16a^2.$

La *racionalización del denominador* de una fracción es un procedimiento en el que una fracción que tiene un radical en su denominador se expresa como una fracción equivalente sin radical en su denominador. Para hacer esto utilizamos el principio fundamental de las fracciones, como lo muestra el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Racionalización de denominadores

a. $$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5^{1/2}} = \frac{2 \cdot 5^{1/2}}{5^{1/2} \cdot 5^{1/2}} = \frac{2 \cdot 5^{1/2}}{5^1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

b. $$\frac{2}{\sqrt[6]{3x^5}} = \frac{2}{\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[6]{x^5}} = \frac{2}{3^{1/6}x^{5/6}} = \frac{2 \cdot 3^{5/6}x^{1/6}}{3^{1/6}x^{5/6} \cdot 3^{5/6}x^{1/6}}$$

$$= \frac{2(3^5x)^{1/6}}{3x} = \frac{2\sqrt[6]{3^5x}}{3x}.$$

Los ejemplos siguientes ilustran varias aplicaciones de las leyes de los exponentes y radicales.

EJEMPLO 4 Exponentes

a. *Elimine los exponentes negativos en* $\frac{x^{-2}y^3}{z^{-2}}$.

Solución:

$$\frac{x^{-2}y^3}{z^{-2}} = x^{-2} \cdot y^3 \cdot \frac{1}{z^{-2}} = \frac{1}{x^2} \cdot y^3 \cdot z^2 = \frac{y^3z^2}{x^2}.$$

Al comparar nuestra respuesta con la expresión original, concluimos que podemos llevar un factor del numerador al denominador, y viceversa, cambiando el signo del exponente.

b. *Simplifique* $\frac{x^2y^7}{x^3y^5}$.

Solución:

$$\frac{x^2y^7}{x^3y^5} = \frac{y^{7-5}}{x^{3-2}} = \frac{y^2}{x}.$$

c. *Simplifique* $(x^5y^8)^5$.

Solución:

$$(x^5y^8)^5 = (x^5)^5(y^8)^5 = x^{25}y^{40}.$$

d. *Simplifique* $(x^{5/9}y^{4/3})^{18}$.

Solución:

$$(x^{5/9}y^{4/3})^{18} = (x^{5/9})^{18}(y^{4/3})^{18} = x^{10}y^{24}.$$

e. *Simplifique* $\left(\frac{x^{1/5}y^{6/5}}{z^{2/5}}\right)^5$.

Solución:

$$\left(\frac{x^{1/5}y^{6/5}}{z^{2/5}}\right)^5 = \frac{(x^{1/5}y^{6/5})^5}{(z^{2/5})^5} = \frac{xy^6}{z^2}.$$

f. *Simplifique* $\frac{x^3}{y^2} \div \frac{x^6}{y^5}$.

Solución:

$$\frac{x^3}{y^2} \div \frac{x^6}{y^5} = \frac{x^3}{y^2} \cdot \frac{y^5}{x^6} = \frac{y^3}{x^3}.$$

EJEMPLO 5 Exponentes

a. *Elimine los exponentes negativos de* $x^{-1} + y^{-1}$ *y simplifique.*

Solución:

$$x^{-1} + y^{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y + x}{xy}.$$

$$\left(\textit{Nota}: x^{-1} + y^{-1} \neq \frac{1}{x + y}.\right)$$

b. *Simplifique* $x^{3/2} - x^{1/2}$ *usando la ley distributiva.*

Solución:

$$x^{3/2} - x^{1/2} = x^{1/2}(x - 1).$$

c. *Elimine los exponentes negativos en* $7x^{-2} + (7x)^{-2}$.

Solución:

$$7x^{-2} + (7x)^{-2} = \frac{7}{x^2} + \frac{1}{(7x)^2} = \frac{7}{x^2} + \frac{1}{49x^2}.$$

d. *Elimine los exponentes negativos en* $(x^{-1} - y^{-1})^{-2}$.

Solución:

$$\begin{aligned}(x^{-1} - y^{-1})^{-2} &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^{-2} = \left(\frac{y - x}{xy}\right)^{-2} \\ &= \left(\frac{xy}{y - x}\right)^{2} = \frac{x^2y^2}{(y - x)^2}.\end{aligned}$$

e. *Aplique la ley distributiva a* $x^{2/5}(y^{1/2} + 2x^{6/5})$.

Solución:

$$x^{2/5}(y^{1/2} + 2x^{6/5}) = x^{2/5}y^{1/2} + 2x^{8/5}.$$

EJEMPLO 6 Radicales

a. *Simplifique* $\sqrt[4]{48}$.

Solución:

$$\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{16}\,\sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3}.$$

b. *Reescriba* $\sqrt{2 + 5x}$ *sin utilizar el signo de radical.*

Solución:

$$\sqrt{2 + 5x} = (2 + 5x)^{1/2}.$$

c. *Racionalice el denominador de* $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{6}}$ *y simplifique.*

Solución:

$$\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{2^{1/5} \cdot 6^{2/3}}{6^{1/3} \cdot 6^{2/3}} = \frac{2^{3/15}6^{10/15}}{6} = \frac{(2^3 6^{10})^{1/15}}{6} = \frac{\sqrt[15]{2^3 6^{10}}}{6}.$$

d. *Simplifique* $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$.

Solución:

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2.$$

EJEMPLO 7 Radicales

a. *Simplifique* $\sqrt[3]{x^6y^4}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^6y^4} &= \sqrt[3]{(x^2)^3y^3y} = \sqrt[3]{(x^2)^3} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{y} \\ &= x^2y\sqrt[3]{y} \qquad \text{(Ley 17).}\end{aligned}$$

b. *Simplifique* $\sqrt{\frac{2}{7}}$.

Solución:

$$\sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{2\cdot 7}{7\cdot 7}} = \sqrt{\frac{14}{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

c. *Simplifique* $\sqrt{250} - \sqrt{50} + 15\sqrt{2}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt{250} - \sqrt{50} + 15\sqrt{2} &= \sqrt{25\cdot 10} - \sqrt{25\cdot 2} + 15\sqrt{2}\\ &= 5\sqrt{10} - 5\sqrt{2} + 15\sqrt{2}\\ &= 5\sqrt{10} + 10\sqrt{2}.\end{aligned}$$

d. *Si x es cualquier número real, simplifique* $\sqrt{x^2}$.

Nota: $\sqrt{x^2} \neq x$.

Solución:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es positivo,}\\ -x, & \text{si } x \text{ es negativo,}\\ 0, & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

Por tanto, $\sqrt{2^2} = 2$ y $\sqrt{(-3)^2} = -(-3) = 3$.

Ejercicio 0.5

En los problemas del 1 al 14, simplifique y exprese todas las respuestas en términos de exponentes positivos.

1. $(2^3)(2^2)$.
2. x^6x^9.
3. w^4w^8.
4. $x^6x^4x^3$.
5. $\frac{x^2x^6}{y^7y^{10}}$.
6. $(x^{12})^4$.
7. $\frac{(a^3)^7}{(b^4)^5}$.
8. $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^5$.
9. $(2x^2y^3)^3$.
10. $\left(\frac{w^2s^3}{y^2}\right)^2$.
11. $\frac{x^8}{x^2}$.
12. $\left(\frac{3m^3}{9n^2}\right)^5$.
13. $\frac{(x^3)^6}{x(x^3)}$.
14. $\frac{(x^2)^3(x^3)^2}{(x^3)^4}$.

En los problemas del 15 al 28, evalúe las expresiones.

15. $\sqrt{25}$.
16. $\sqrt[3]{64}$.
17. $\sqrt[5]{-32}$.
18. $\sqrt{0.04}$.
19. $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$.
20. $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$.
21. $(49)^{1/2}$.
22. $(64)^{1/3}$.
23. $4^{3/2}$.
24. $(25)^{-3/2}$.
25. $(32)^{-2/5}$.
26. $(0.09)^{-1/2}$.
27. $\left(\frac{1}{32}\right)^{4/5}$.
28. $\left(-\frac{27}{64}\right)^{2/3}$.

En los problemas del 29 al 40, simplifique las expresiones.

29. $\sqrt{32}$. **30.** $\sqrt[3]{54}$. **31.** $\sqrt[3]{2x^3}$.

32. $\sqrt{4x}$. **33.** $\sqrt{16x^4}$. **34.** $\sqrt[4]{\frac{x}{16}}$.

35. $2\sqrt{75} - 4\sqrt{27} + \sqrt[3]{128}$. **36.** $\sqrt{\frac{5}{11}}$. **37.** $(9z^4)^{1/2}$.

38. $(16y^8)^{3/4}$. **39.** $\left(\frac{27t^3}{8}\right)^{2/3}$. **40.** $\left(\frac{625}{a^8}\right)^{-3/4}$.

En los problemas del 41 al 52, escriba las expresiones sólo en términos de exponentes positivos. Evite todos los radicales en la forma final. Por ejemplo:

$$y^{-1}\sqrt{x} = \frac{x^{1/2}}{y}.$$

41. $\frac{x^3y^{-2}}{z^2}$. **42.** $\sqrt[5]{x^2y^3z^{-10}}$. **43.** $5m^{-2}m^{-7}$. **44.** $x + y^{-1}$.

45. $(3t)^{-2}$. **46.** $(3 - z)^{-4}$. **47.** $\sqrt[3]{7s^2}$. **48.** $(x^{-2}y^2)^{-2}$.

49. $\sqrt{x} - \sqrt{y}$. **50.** $\frac{u^{-2}v^{-6}w^3}{vw^{-5}}$. **51.** $x^2\sqrt[4]{xy^{-2}z^3}$. **52.** $(\sqrt[5]{xy^{-3}})x^{-1}y^{-2}$.

En los problemas del 53 al 58, escriba las formas exponenciales en una forma equivalente que involucre radicales.

53. $(8x - y)^{4/5}$. **54.** $(ab^2c^3)^{3/4}$. **55.** $x^{-4/5}$.

56. $2x^{1/2} - (2y)^{1/2}$. **57.** $3w^{-3/5} - (3w)^{-3/5}$. **58.** $[(x^{-4})^{1/5}]^{1/6}$.

En los problemas del 59 al 68, racionalice los denominadores.

59. $\frac{3}{\sqrt{7}}$. **60.** $\frac{5}{\sqrt[3]{9}}$. **61.** $\frac{4}{\sqrt{2x}}$. **62.** $\frac{y}{\sqrt{2y}}$.

63. $\frac{1}{\sqrt[3]{3x}}$. **64.** $\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **65.** $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$. **66.** $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$.

67. $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[4]{a^2b}}$. **68.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$.

En los problemas del 69 al 90, simplifique. Exprese todas las respuestas en términos de exponentes positivos. En donde sea necesario, racionalice el denominador con el fin de evitar exponentes fraccionarios en el denominador.

69. $2x^2y^{-3}x^4$. **70.** $\frac{3}{u^{5/2}v^{1/2}}$. **71.** $\sqrt{\sqrt[3]{t^4}}$. **72.** $\{[(2x^2)^3]^{-4}\}^{-1}$.

73. $\frac{2^0}{(2^{-2}x^{1/2}y^{-2})^3}$. **74.** $\frac{\sqrt{s^5}}{\sqrt[3]{s^2}}$. **75.** $\sqrt[3]{x^2yz^3}\,\sqrt[3]{xy^2}$. **76.** $(\sqrt[5]{2})^{10}$.

77. $3^2(81)^{-3/4}$. **78.** $(\sqrt[5]{x^2y})^{2/5}$. **79.** $(2x^{-1}y^2)^2$. **80.** $\frac{3}{\sqrt[3]{y}\,\sqrt[4]{x}}$.

81. $\sqrt{x}\sqrt{x^2y^3}\sqrt{xy^2}$. **82.** $\sqrt{75k^4}$. **83.** $\frac{(x^2y^{-1}z)^{-2}}{(xy^2)^{-4}}$. **84.** $\sqrt[3]{5(25)}$.

85. $\frac{(x^2)^3}{x^4} \div \left[\frac{x^3}{(x^3)^2}\right]^2$. **86.** $\sqrt{(-6)(-6)}$. **87.** $-\frac{8s^{-2}}{2s^3}$. **88.** $(x^{-1}y^{-2}\sqrt{z})^4$.

89. $(2x^2y \div 3y^3z^{-2})^2$. **90.** $\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2x^{-2}}}{\sqrt{16x^3}}\right)^2}$.

OBJETIVO Sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones algebraicas. Definir lo que es un polinomio, utilizar productos especiales y emplear la división larga para dividir polinomios.

0.6 Operaciones con expresiones algebraicas

Cuando se combinan números, representados por símbolos, mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división o extracción de raíces, entonces la expresión resultante se llama *expresión algebraica*.

EJEMPLO 1 Expresiones algebraicas

a. $\sqrt[3]{\dfrac{3x^3 - 5x - 2}{10 - x}}$ es una expresión algebraica en la variable x.

b. $10 - 3\sqrt{y} + \dfrac{5}{7 + y^2}$ es una expresión algebraica en la variable y.

c. $\dfrac{(x + y)^3 - xy}{y} + 2$ es una expresión algebraica en las variables x y y.

La expresión algebraica $5ax^3 - 2bx + 3$ consiste de tres *términos:* $+5ax^3$, $-2bx$ y $+3$. Algunos de los *factores* del primer término, $5ax^3$, son $5, a, x, x^2, x^3$, $5ax$ y ax^2. También, $5a$ es el coeficiente de x^3 y 5 es el *coeficiente numérico* de ax^3. Si en un análisis a y b representan números fijos, entonces a a y b se les denomina *constantes*.

Las expresiones algebraicas que tienen exactamente un término se denominan *monomios*. Aquéllas que tienen exactamente dos términos son *binomios* y las que tienen exactamente tres términos son *trinomios*. Las expresiones algebraicas con más de un término se denominan *multinomios*. Así, el multinomio $2x - 5$ es un binomio; el multinomio $3\sqrt{y} + 2y - 4y^2$ es un trinomio.

Un *polinomio en x* es una expresión algebraica de la forma[2]

$$c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0,$$

Las palabras *polinomio* y *multinomio* no deben utilizarse en forma indistinta. Por ejemplo, $\sqrt{x} + 2$ es un multinomio, pero no un polinomio. Por otra parte, $x + 2$ es un multinomio y un polinomio.

en donde n es un entero no negativo y los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son constantes con $c_n \neq 0$. Llamamos a n el *grado* del polinomio. Por lo que, $4x^3 - 5x^2 + x - 2$ es un polinomio en x de grado 3 y $y^5 - 2$ es un polinomio en y de grado 5. Una constante distinta de cero es un polinomio de grado cero, así 5 es un polinomio de grado cero. La constante 0 se considera un polinomio, sin embargo, no se le asigna grado alguno.

En los ejemplos siguientes ilustraremos las operaciones con expresiones algebraicas.

EJEMPLO 2 Suma de expresiones algebraicas

Simplifique $(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3)$.

Solución: primero debemos eliminar los paréntesis. Después, usando la propiedad conmutativa de la suma, reunimos todos los términos semejantes. *Términos semejantes* son los que sólo difieren por sus coeficientes numéricos. En este ejemplo, $3x^2y$ y $4x^2y$ son semejantes, así como las parejas $-2x$ y $6x$, y 1 y -3. Por tanto,

$$(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3)$$

[2] Los tres puntos indican los términos que se entiende serán incluidos en la suma.

$$= 3x^2y - 2x + 1 + 4x^2y + 6x - 3$$

$$= 3x^2y + 4x^2y - 2x + 6x + 1 - 3.$$

Por la propiedad distributiva,

$$3x^2y + 4x^2y = (3 + 4)x^2y = 7x^2y$$

$$\text{y} \quad -2x + 6x = (-2 + 6)x = 4x.$$

De aquí que, $(3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3) = 7x^2y + 4x - 2.$

EJEMPLO 3 Sustracción de expresiones algebraicas

Simplifique $(3x^2y - 2x + 1) - (4x^2y + 6x - 3)$.

Solución: aquí aplicamos la definición de la sustracción y la propiedad distributiva:

$$(3x^2y - 2x + 1) - (4x^2y + 6x - 3)$$

$$= (3x^2y - 2x + 1) + (-1)(4x^2y + 6x - 3)$$

$$= (3x^2y - 2x + 1) + (-4x^2y - 6x + 3)$$

$$= 3x^2y - 2x + 1 - 4x^2y - 6x + 3$$

$$= 3x^2y - 4x^2y - 2x - 6x + 1 + 3$$

$$= (3 - 4)x^2y + (-2 - 6)x + 1 + 3$$

$$= -x^2y - 8x + 4.$$

EJEMPLO 4 Eliminación de los símbolos de agrupación

Simplifique $3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - (3 - 4x)]\}$.

Solución: primero debemos eliminar los símbolos de agrupación más internos (los paréntesis). Después repetimos el proceso hasta eliminar todos los símbolos de agrupación, reduciendo los términos semejantes siempre que sea posible. Tenemos,

$$3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - (3 - 4x)]\}$$

$$= 3\{2x[2x + 3] + 5[4x^2 - 3 + 4x]\}$$

$$= 3\{4x^2 + 6x + 20x^2 - 15 + 20x\}$$

$$= 3\{24x^2 + 26x - 15\}$$

$$= 72x^2 + 78x - 45.$$

La propiedad distributiva es la herramienta clave al multiplicar expresiones. Por ejemplo, para multiplicar $ax + c$ por $bx + d$, podemos considerar $ax + c$ como un solo número y entonces utilizar la propiedad distributiva:

$$(ax + c)(bx + d) = (ax + c)bx + (ax + c)d.$$

Usando nuevamente la propiedad distributiva, tenemos,

$$(ax + c)bx + (ax + c)d = abx^2 + cbx + adx + cd$$
$$= abx^2 + (ad + cb)x + cd.$$

Por lo que, $(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (ad + cb)x + cd$. En particular, si $a = 2, b = 1, c = 3$ y $d = -2$, entonces

$$(2x + 3)(x - 2) = 2(1)x^2 + [2(-2) + 3(1)]x + 3(-2)$$
$$= 2x^2 - x - 6.$$

A continuación damos una lista de productos especiales que pueden obtenerse a partir de la propiedad distributiva y son útiles al multiplicar expresiones algebraicas.

Productos especiales

1. $x(y + z) = xy + xz$ (propiedad distributiva).
2. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$
3. $(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (ad + cb)x + cd.$
4. $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ (cuadrado de un binomio).
5. $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ (cuadrado de un binomio).
6. $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$ (producto de suma y diferencia).
7. $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ (cubo de un binomio).
8. $(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$ (cubo de un binomio).

EJEMPLO 5 Productos especiales

a. Por la regla 2,

$$(x + 2)(x - 5) = [x + 2][x + (-5)]$$
$$= x^2 + (2 - 5)x + 2(-5)$$
$$= x^2 - 3x - 10.$$

b. Por la regla 3,

$$(3z + 5)(7z + 4) = 3 \cdot 7z^2 + (3 \cdot 4 + 5 \cdot 7)z + 5 \cdot 4$$
$$= 21z^2 + 47z + 20.$$

c. Por la regla 5,

$$(x - 4)^2 = x^2 - 2(4)x + 4^2$$
$$= x^2 - 8x + 16.$$

d. Por la regla 6,

$$(\sqrt{y^2 + 1} + 3)(\sqrt{y^2 + 1} - 3) = (\sqrt{y^2 + 1})^2 - 3^2$$
$$= (y^2 + 1) - 9$$
$$= y^2 - 8.$$

e. Por la regla 7,

$$(3x + 2)^3 = (3x)^3 + 3(2)(3x)^2 + 3(2)^2(3x) + (2)^3$$
$$= 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8.$$

EJEMPLO 6 Multiplicación de multinomios

Encuentre el producto $(2t - 3)(5t^2 + 3t - 1)$.

Solución: tratamos a $2t - 3$ como un solo número y aplicamos la propiedad distributiva dos veces:

$$(2t - 3)(5t^2 + 3t - 1) = (2t - 3)5t^2 + (2t - 3)3t - (2t - 3)1$$
$$= 10t^3 - 15t^2 + 6t^2 - 9t - 2t + 3$$
$$= 10t^3 - 9t^2 - 11t + 3.$$

En el ejemplo 3b de la sección 0.3, mostramos que $\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$. Del mismo modo, $\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$. Usando estos resultados, podemos dividir un multinomio entre un monomio, si dividimos cada término del multinomio entre el monomio.

EJEMPLO 7 División de un multinomio entre un monomio

a. $\frac{x^3 + 3x}{x} = \frac{x^3}{x} + \frac{3x}{x} = x^2 + 3.$

b. $$\frac{4z^3 - 8z^2 + 3z - 6}{2z} = \frac{4z^3}{2z} - \frac{8z^2}{2z} + \frac{3z}{2z} - \frac{6}{2z}$$
$$= 2z^2 - 4z + \frac{3}{2} - \frac{3}{z}.$$

División larga

Para dividir un polinomio entre un polinomio usamos la llamada división larga cuando el grado del divisor es menor o igual que el del dividendo, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 8 División larga

Divida $2x^3 - 14x - 5$ *entre* $x - 3$.

Solución: aquí $2x^3 - 14x - 5$ es el *dividendo* y $x - 3$ es el *divisor*. Para evitar errores, es mejor escribir el dividendo como $2x^3 + 0x^2 - 14x - 5$. Observe que las potencias de x están en orden decreciente. Tenemos

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & 2x^2 & +\,6x & +\,4 & & \leftarrow \text{cociente} \\
x-3 & \overline{)\,2x^3} & \overline{+\,0x^2} & \overline{-\,14x} & \overline{-\quad 5} & \\
 & \underline{2x^3} & \underline{-\,6x^2} & & & \\
 & & 6x^2 & -\,14x & & \\
 & & \underline{6x^2} & \underline{-\,18x} & & \\
 & & & 4x & -\quad 5 & \\
 & & & \underline{4x} & \underline{-\,12} & \\
 & & & & 7 & \leftarrow \text{residuo.}
\end{array}
$$

Observe que dividimos x (el primer término del divisor) entre $2x^3$ y obtuvimos $2x^2$. Después multiplicamos $2x^2$ por $x - 3$, obteniendo $2x^3 - 6x^2$. Después de restar $2x^3 - 6x^2$ de $2x^3 + 0x^2$, obtuvimos $6x^2$ y entonces "bajamos" el término $-14x$. Este proceso continúa hasta que lleguemos a 7, el *residuo*. Siempre nos detendremos cuando el residuo sea 0 o un polinomio cuyo grado sea menor que el grado del divisor. Nuestra respuesta la podemos escribir como

$$2x^2 + 6x + 4 + \frac{7}{x-3}.$$

Esto es, la respuesta tiene la forma

$$\text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}.$$

Una manera de comprobar una división es verificar que

$$(\text{cociente})(\text{divisor}) + \text{residuo} = \text{dividendo}.$$

Por medio de esta ecuación usted debe ser capaz de verificar el resultado de este ejemplo.

Ejercicio 0.6

Realice las operaciones indicadas y simplifique.

1. $(8x - 4y + 2) + (3x + 2y - 5)$.

2. $(6x^2 - 10xy + 2) + (2z - xy + 4)$.

3. $(8t^2 - 6s^2) + (4s^2 - 2t^2 + 6)$.

4. $(\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 3\sqrt{x})$.

5. $(\sqrt{x} + \sqrt{2y}) + (\sqrt{x} + \sqrt{3z})$.

6. $(2x + 3y - 5) - (7x - 6y + 2)$.

7. $(6x^2 - 10xy + \sqrt{2}) - (2z - xy + 4)$.

8. $(\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) - (\sqrt{x} + 3\sqrt{x})$.

9. $(\sqrt{x} + \sqrt{2y}) - (\sqrt{x} + \sqrt{3z})$.

10. $4(2z - w) - 3(w - 2z)$.

11. $3(3x + 3y - 7) - 3(8x - 2y + 2)$.

12. $(2s + t) - 3(s - 6) + 4(1 - t)$.

13. $3(x^2 + y^2) - x(y + 2x) + 2y(x + 3y)$.

14. $2 - [3 + 4(s - 3)]$.

15. $2\{3[3(x^2 + 2) - 2(x^2 - 5)]\}$.

16. $4\{3(t + 5) - t[1 - (t + 1)]\}$.

17. $-3\{4x(x + 2) - 2[x^2 - (3 - x)]\}$.

18. $-\{-2[2a + 3b - 1] + 4[a - 2b] - a[2(b - 3)]\}$.

19. $(x + 4)(x + 5)$.

20. $(u + 2)(u + 5)$.

21. $(w + 2)(w - 5)$.

22. $(z - 7)(z - 3)$.

23. $(2x + 3)(5x + 2)$.

24. $(y - 4)(2y + 3)$.

25. $(x + 3)^2$.

26. $(2x - 1)^2$.

27. $(x - 5)^2$.

28. $(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 5)$.

29. $(\sqrt{2y} + 3)^2$.

30. $(y - 4)(y + 4)$.

31. $(2s - 1)(2s + 1)$.

32. $(z^2 - 3w)(z^2 + 3w)$.

33. $(x^2 - 3)(x + 4)$.

34. $(x + 1)(x^2 + x + 3)$.

35. $(x^2 - 4)(3x^2 + 2x - 1)$.

36. $(2x - 1)(3x^3 + 7x^2 - 5)$.

37. $x\{3(x-1)(x-2)+2[x(x+7)]\}$.

38. $[(2z+1)(2z-1)](4z^2+1)$.

39. $(x+y+2)(3x+2y-4)$.

40. $(x^2+x+1)^2$.

41. $(x+5)^3$.

42. $(x-2)^3$.

43. $(2x-3)^3$.

44. $(x+2y)^3$.

45. $\dfrac{z^2-18z}{z}$.

46. $\dfrac{2x^3-7x+4}{x}$.

47. $\dfrac{6x^5+4x^3-1}{2x^2}$.

48. $\dfrac{(4x-3)-(8x+9)}{4x}$.

49. $(x^2+3x-1)\div(x+3)$.

50. $(x^2-5x+4)\div(x-4)$.

51. $(3x^3-2x^2+x-3)\div(x+2)$.

52. $(x^4+2x^2+1)\div(x-1)$.

53. $t^2\div(t-8)$.

54. $(4x^2+6x+1)\div(2x-1)$.

55. $(3x^2-4x+3)\div(3x+2)$.

56. $(z^3+z^2+z)\div(z^2-z+1)$.

OBJETIVO Establecer las reglas básicas para factorizar y aplicarlas para factorizar expresiones.

0.7 FACTORIZACIÓN

Cuando multiplicamos entre sí dos o más expresiones, éstas reciben el nombre de *factores* del producto. Por lo que si $c = ab$, entonces a y b son factores del producto c. Al proceso por el cual una expresión se escribe como el producto de sus factores se le llama *factorización*.

A continuación se presentan las reglas para la factorización de expresiones, la mayoría de las cuales surgen de los productos especiales vistos en la sección 0.6. El lado derecho de cada identidad es la forma factorizada de la que aparece a la izquierda.

Reglas de factorización

1. $xy + xz = x(y+z)$ (factor común).

2. $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$.

3. $abx^2 + (ad+cb)x + cd = (ax+c)(bx+d)$.

4. $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$ (trinomio cuadrado perfecto).

5. $x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$ (trinomio cuadrado perfecto).

6. $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$ (diferencia de dos cuadrados).

7. $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$ (suma de dos cubos).

8. $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$ (diferencia de dos cubos).

Cuando factorizamos un polinomio, por lo común, elegimos factores que sean polinomios. Por ejemplo, $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$. No escribiremos $x - 4$ como $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)$.

Siempre factorice completamente. Por ejemplo,

$$2x^2 - 8 = 2(x^2-4) = 2(x+2)(x-2).$$

EJEMPLO 1 Factores comunes

a. *Factorice completamente* $3k^2x^2 + 9k^3x$.

Solución: ya que $3k^2x^2 = (3k^2x)(x)$ y $9k^3x = (3k^2x)(3k)$, cada término de la expresión original contiene el factor común $3k^2x$. Así, por la regla 1,

$$3k^2x^2 + 9k^3x = 3k^2x(x + 3k).$$

Observe que aun cuando $3k^2x^2 + 9k^3x = 3(k^2x^2 + 3k^3x)$, no podemos decir que la expresión esté completamente factorizada, ya que $k^2x^2 + 3k^3x$ todavía puede factorizarse.

b. *Factorice completamente* $8a^5x^2y^3 - 6a^2b^3yz - 2a^4b^4xy^2z^2$.

Solución:

$$\begin{aligned} &8a^5x^2y^3 - 6a^2b^3yz - 2a^4b^4xy^2z^2 \\ &= 2a^2y(4a^3x^2y^2 - 3b^3z - a^2b^4xyz^2). \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Factorización de trinomios

a. *Factorice completamente* $3x^2 + 6x + 3$.

Solución: primero sacamos un factor común. Después factorizamos por completo la expresión resultante. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x + 3 &= 3(x^2 + 2x + 1) \\ &= 3(x + 1)^2 \qquad \text{(Regla 4).} \end{aligned}$$

b. *Factorice completamente* $x^2 - x - 6$.

Solución: si este trinomio se puede factorizar en la forma $(x + a)(x + b)$, que es el producto de dos binomios, entonces debemos determinar los valores de a y de b. Como $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$, entonces

$$x^2 + (-1)x + (-6) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Igualando los coeficientes correspondientes, queremos que

$$a + b = -1 \quad \text{y} \quad ab = -6.$$

Si $a = -3$ y $b = 2$ entonces ambas condiciones se cumplen y de aquí,

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

Como verificación es conveniente multiplicar el lado derecho para ver si coincide con el izquierdo.

c. *Factorice completamente* $x^2 - 7x + 12$.

Solución:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$

EJEMPLO 3 Factorización

A continuación tenemos una variedad de expresiones completamente factorizadas. Los números entre paréntesis hacen referencia a las reglas utilizadas.

a. $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ (4).

b. $9x^2 + 9x + 2 = (3x + 1)(3x + 2)$ (3).

c. $6y^3 + 3y^2 - 18y = 3y(2y^2 + y - 6)$ (1)

$= 3y(2y - 3)(y + 2)$ (3).

d. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ (5).

e. $z^{1/4} + z^{5/4} = z^{1/4}(1 + z)$ (1).

f. $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$ (6)

$= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ (6).

g. $x^{2/3} - 5x^{1/3} + 4 = (x^{1/3} - 1)(x^{1/3} - 4)$ (2).

h. $ax^2 - ay^2 + bx^2 - by^2 = (ax^2 - ay^2) + (bx^2 - by^2)$

$= a(x^2 - y^2) + b(x^2 - y^2)$ (1)

$= (x^2 - y^2)(a + b)$ (1)

$= (x + y)(x - y)(a + b)$ (6).

i. $8 - x^3 = (2)^3 - (x)^3 = (2 - x)(4 + 2x + x^2)$ (8).

j. $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$ (6)

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ (7), (8).

Observe en el ejemplo 3f que $x^2 - 1$ es factorizable, pero $x^2 + 1$ no. En el ejemplo 3h, factorizamos haciendo uso de la agrupación.

Ejercicio 0.7

Factorice completamente las expresiones siguientes.

1. $6x + 4$.

2. $6y^2 - 4y$.

3. $10xy + 5xz$.

4. $3x^2y - 9x^3y^3$.

5. $8a^3bc - 12ab^3cd + 4b^4c^2d^2$.

6. $6z^2t^3 + 3zst^4 - 12z^2t^3$.

7. $z^2 - 49$.

8. $x^2 + 3x - 4$.

9. $p^2 + 4p + 3$.

10. $s^2 - 6s + 8$.

11. $16x^2 - 9$.

12. $x^2 + 2x - 24$.

13. $z^2 + 6z + 8$.

14. $4t^2 - 9s^2$.

15. $x^2 + 6x + 9$.

16. $y^2 - 15y + 50$.

17. $5x^2 + 25x + 30$.

18. $2x^2 + 7x - 15$.

19. $3x^2 - 3$.

20. $4y^2 - 8y + 3$.

21. $6y^2 + 13y + 2$.

22. $4x^2 - x - 3$.

23. $12s^3 + 10s^2 - 8s$.

24. $9z^2 + 30z + 25$.

25. $x^{2/3}y - 4x^{8/3}y^3$.

26. $9x^{4/7} - 1$.

27. $2x^3 + 2x^2 - 12x$.

28. $x^2y^2 - 4xy + 4$.

29. $(4x + 2)^2$.

30. $3s^2(3s - 9s^2)^2$.

31. $x^3y^2 - 4x^2y + 49x$.

32. $(3x^2 + x) + (6x + 2)$.

33. $(x^3 - 4x) + (8 - 2x^2)$.

34. $(x^2 - 1) + (x^2 - x - 2)$.

35. $(y^4 + 8y^3 + 16y^2) - (y^2 + 8y + 16)$.

36. $x^3y - 4xy + z^2x^2 - 4z^2$.

37. $x^3 + 8$.

38. $x^3 - 1$.

39. $x^6 - 1$.

40. $27 + 8x^3$.

41. $(x + 3)^3(x - 1) + (x + 3)^2(x - 1)^2$.

42. $(x + 5)^2(x + 1)^3 + (x + 5)^3(x + 1)^2$.

43. $P(1 + r) + P(1 + r)r$.

44. $(x - 3)(2x + 3) - (2x + 3)(x + 5)$.

45. $x^4 - 16$.

46. $81x^4 - y^4$.

47. $y^8 - 1$.

48. $t^4 - 4$.

49. $x^4 + x^2 - 2$.

50. $x^4 - 10x^2 + 9$.

51. $x^4y - 2x^2y + y$.

52. $4x^3 - 6x^2 - 4x$.

OBJETIVO Simplificar fracciones y sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones. Racionalizar el denominador de una fracción.

0.8 Fracciones

Simplificación de fracciones

Por medio del principio fundamental de las fracciones (sección 0.4), podemos ser capaces de simplificar fracciones. Ese principio nos permite multiplicar o dividir el numerador y denominador de una fracción entre la misma cantidad diferente de cero. La fracción resultante será equivalente a la original. Las fracciones que consideremos se supone que tienen denominadores distintos de cero.

EJEMPLO 1 Simplificación de fracciones

a. *Simplifique* $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12}$.

Solución: primero factorizamos completamente el numerador y el denominador:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)}.$$

Dividiendo numerador y denominador entre el factor común $x - 3$, tenemos

$$\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)} = \frac{1(x+2)}{1(x-4)} = \frac{x+2}{x-4}.$$

En general, sólo escribimos

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x-3)}}\,(x+2)}{\underset{1}{\cancel{(x-3)}}(x-4)} = \frac{x+2}{x-4}$$

o

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x + 12} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-4)} = \frac{x+2}{x-4}.$$

El proceso de eliminar el factor común, $x - 3$, por lo regular se conoce como "cancelación".

b. *Simplifique* $\dfrac{2x^2 + 6x - 8}{8 - 4x - 4x^2}$.

Solución:

$$\frac{2x^2 + 6x - 8}{8 - 4x - 4x^2} = \frac{2(x^2 + 3x - 4)}{4(2 - x - x^2)} = \frac{2(x-1)(x+4)}{4(1-x)(2+x)}$$

$$= \frac{2(x-1)(x+4)}{2(2)[(-1)(x-1)](2+x)}$$

Observe como $1 - x$ se escribe como $(-1)(x - 1)$ para permitir la cancelación.

$$= \frac{x+4}{-2(2+x)} = -\frac{x+4}{2(x+2)}.$$

Multiplicación y división de fracciones

La regla para multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$ es

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

EJEMPLO 2 Multiplicación de fracciones

a. $\frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x-5} = \frac{x(x+3)}{(x+2)(x-5)}.$

b. $$\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x-3} \cdot \frac{6x^2-6}{x^2+2x-8} = \frac{[(x-2)^2][6(x+1)(x-1)]}{[(x+3)(x-1)][(x+4)(x-2)]}$$
$$= \frac{6(x-2)(x+1)}{(x+3)(x+4)}.$$

Para dividir $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$, donde $c \neq 0$, tenemos

En resumen, invertimos el divisor y multiplicamos.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

EJEMPLO 3 División de fracciones

a. $\frac{x}{x+2} \div \frac{x+3}{x-5} = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x-5}{x+3} = \frac{x(x-5)}{(x+2)(x+3)}.$

b. $$\frac{\frac{x-5}{x-3}}{2x} = \frac{\frac{x-5}{x-3}}{\frac{2x}{1}} = \frac{x-5}{x-3} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{x-5}{2x(x-3)}.$$

c. $$\frac{\frac{4x}{x^2-1}}{\frac{2x^2+8x}{x-1}} = \frac{4x}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{2x^2+8x} = \frac{4x(x-1)}{[(x+1)(x-1)][2x(x+4)]}$$
$$= \frac{2}{(x+1)(x+4)}.$$

Racionalización del denominador

Algunas veces el denominador de una fracción tiene dos términos e incluye raíces cuadradas, como $2 - \sqrt{3}$ o $\sqrt{5} + \sqrt{2}$. Entonces, el denominador

puede racionalizarse al multiplicarlo por una expresión que lo convierta en una diferencia de dos cuadrados. Por ejemplo,

$$\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}$$

La racionalización del *numerador* es un procedimiento sencillo.

$$= \frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}.$$

EJEMPLO 4 Racionalización de denominadores

a. $$\frac{x}{\sqrt{2}-6} = \frac{x}{\sqrt{2}-6} \cdot \frac{\sqrt{2}+6}{\sqrt{2}+6} = \frac{x(\sqrt{2}+6)}{(\sqrt{2})^2-6^2}$$

$$= \frac{x(\sqrt{2}+6)}{2-36} = -\frac{x(\sqrt{2}+6)}{34}.$$

b. $$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}{5-2} = \frac{5-2\sqrt{5}\sqrt{2}+2}{3} = \frac{7-2\sqrt{10}}{3}.$$

Suma y resta de fracciones

En el ejemplo 3b de la sección 0.3, se mostró que $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$. Esto es, si sumamos dos fracciones que tienen un denominador común, entonces el resultado será una fracción cuyo denominador es el denominador común. El numerador será la suma de los numeradores de las fracciones originales. De modo semejante, $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

EJEMPLO 5 Suma y resta de fracciones

a. $$\frac{p^2-5}{p-2} + \frac{3p+2}{p-2} = \frac{(p^2-5)+(3p+2)}{p-2}$$

$$= \frac{p^2+3p-3}{p-2}.$$

b. $$\frac{x^2-5x+4}{x^2+2x-3} - \frac{x^2+2x}{x^2+5x+6} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+3)} - \frac{x(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{x-4}{x+3} - \frac{x}{x+3} = \frac{(x-4)-x}{x+3} = -\frac{4}{x+3}.$$

c. $$\frac{x^2+x-5}{x-7} - \frac{x^2-2}{x-7} + \frac{-4x+8}{x^2-9x+14}$$

$$= \frac{x^2+x-5}{x-7} - \frac{x^2-2}{x-7} + \frac{-4(\cancel{x-2})}{(\cancel{x-2})(x-7)}$$

$$= \frac{(x^2 + x - 5) - (x^2 - 2) + (-4)}{x - 7}$$

$$= \frac{x - 7}{x - 7} = 1.$$

Para sumar (o restar) dos fracciones con denominadores diferentes, utilice el principio fundamental de las fracciones para reescribirlas como fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Después proceda con la suma (o resta) por el método descrito anteriormente.

Por ejemplo, para encontrar

$$\frac{2}{x^3(x - 3)} + \frac{3}{x(x - 3)^2},$$

podemos convertir la primera fracción en una fracción equivalente, multiplicando el numerador y el denominador por $x - 3$:

$$\frac{2(x - 3)}{x^3(x - 3)^2};$$

y convertir la segunda fracción multiplicando el numerador y el denominador por x^2:

$$\frac{3x^2}{x^3(x - 3)^2}.$$

Estas fracciones tienen el mismo denominador. De aquí que,

$$\frac{2}{x^3(x - 3)} + \frac{3}{x(x - 3)^2} = \frac{2(x - 3)}{x^3(x - 3)^2} + \frac{3x^2}{x^3(x - 3)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 2x - 6}{x^3(x - 3)^2}.$$

Podríamos haber convertido las fracciones originales en fracciones equivalentes con *cualquier* denominador común. Sin embargo, preferimos convertirlas en fracciones con el denominador $x^3(x - 3)^2$. Éste es el **mínimo común denominador (MCD)** de las fracciones $2/[x^3(x - 3)]$ y $3/[x(x - 3)^2]$.

En general, para encontrar el MCD de dos o más fracciones, primero se factoriza completamente cada denominador. *El MCD es el producto de cada uno de los distintos factores que aparecen en los denominadores, cada uno elevado a la potencia más grande a la que se presenta en alguno de los denominadores.*

EJEMPLO 6 Suma y resta de fracciones

a. *Reste:* $\frac{t}{3t + 2} - \frac{4}{t - 1}$.

Solución: el MCD es $(3t + 2)(t - 1)$. Por lo que tenemos

$$\frac{t}{(3t + 2)} - \frac{4}{t - 1} = \frac{t(t - 1)}{(3t + 2)(t - 1)} - \frac{4(3t + 2)}{(3t + 2)(t - 1)}$$

$$= \frac{t(t - 1) - 4(3t + 2)}{(3t + 2)(t - 1)}$$

$$= \frac{t^2 - t - 12t - 8}{(3t + 2)(t - 1)} = \frac{t^2 - 13t - 8}{(3t + 2)(t - 1)}.$$

b. *Sume:* $\frac{4}{q - 1} + 3.$

Solución: el MCD es $q - 1$.

$$\frac{4}{q - 1} + 3 = \frac{4}{q - 1} + \frac{3(q - 1)}{q - 1}$$

$$= \frac{4 + 3(q - 1)}{q - 1} = \frac{3q + 1}{q - 1}.$$

EJEMPLO 7 Resta de fracciones

$$\frac{x - 2}{x^2 + 6x + 9} - \frac{x + 2}{2(x^2 - 9)}$$

$$= \frac{x - 2}{(x + 3)^2} - \frac{x + 2}{2(x + 3)(x - 3)} \quad [\text{MCD} = 2(x + 3)^2(x - 3)]$$

$$= \frac{(x - 2)(2)(x - 3)}{(x + 3)^2(2)(x - 3)} - \frac{(x + 2)(x + 3)}{2(x + 3)(x - 3)(x + 3)}$$

$$= \frac{(x - 2)(2)(x - 3) - (x + 2)(x + 3)}{2(x + 3)^2(x - 3)}$$

$$= \frac{2(x^2 - 5x + 6) - (x^2 + 5x + 6)}{2(x + 3)^2(x - 3)}$$

$$= \frac{2x^2 - 10x + 12 - x^2 - 5x - 6}{2(x + 3)^2(x - 3)}$$

$$= \frac{x^2 - 15x + 6}{2(x + 3)^2(x - 3)}.$$

El ejemplo 8 muestra dos métodos para simplificar una fracción "compleja".

EJEMPLO 8 Operaciones combinadas con fracciones

Simplifique $\frac{\frac{1}{x + h} - \frac{1}{x}}{h}.$

Solución: primero combinamos las fracciones en el numerador y obtenemos

$$\frac{\frac{1}{x + h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x}{x(x + h)} - \frac{x + h}{x(x + h)}}{h} = \frac{\frac{x - (x + h)}{x(x + h)}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{\frac{h}{1}} = \frac{-h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}.$$

La fracción original también puede simplificarse multiplicando el numerador y el denominador por el MCD de las fracciones implicadas en el numerador (y denominador), a saber, $x(x+h)$:

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\left[\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right]x(x+h)}{h[x(x+h)]}$$

$$= \frac{x-(x+h)}{x(x+h)h} = \frac{-h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}.$$

Ejercicio 0.8

En los problemas del 1 al 6, simplifique.

1. $\frac{x^2-4}{x^2-2x}$.
2. $\frac{x^2-5x-6}{x^2-2x-3}$.
3. $\frac{x^2-9x+20}{x^2+x-20}$.

4. $\frac{3x^2-27x+24}{2x^3-16x^2+14x}$.
5. $\frac{6x^2+x-2}{2x^2+3x-2}$.
6. $\frac{12x^2-19x+4}{6x^2-17x+12}$.

En los problemas del 7 al 48 realice las operaciones y simplifique tanto como sea posible.

7. $\frac{y^2}{y-3} \cdot \frac{-1}{y+2}$.
8. $\frac{z^2-4}{z^2+2z} \cdot \frac{z^2}{z^2-4z+4}$.
9. $\frac{2x-3}{x-2} \cdot \frac{2-x}{2x+3}$.

10. $\frac{x^2-y^2}{x+y} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2}{y-x}$.
11. $\frac{2x-2}{x^2-2x-8} \div \frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$.
12. $\frac{x^2+2x}{3x^2-18x+24} \div \frac{x^2-x-6}{x^2-4x+4}$.

13. $\frac{\frac{x^2}{6}}{\frac{x}{3}}$.
14. $\frac{\frac{4x^3}{9x}}{\frac{x}{18}}$.
15. $\frac{\frac{2m}{n^2}}{\frac{6m}{n^3}}$.
16. $\frac{\frac{c+d}{c}}{\frac{c-d}{2c}}$.

17. $\frac{\frac{4x}{3}}{2x}$.
18. $\frac{4x}{\frac{3}{2x}}$.
19. $\frac{-9x^3}{\frac{x}{3}}$.
20. $\frac{\frac{-9x^3}{x}}{3}$.

21. $\frac{\frac{x-5}{x^2-7x+10}}{x-2}$.
22. $\frac{\frac{x^2+6x+9}{x}}{x+3}$.
23. $\frac{\frac{10x^3}{x^2-1}}{\frac{5x}{x+1}}$.
24. $\frac{\frac{x^2-x-6}{x^2-9}}{\frac{x^2-4}{x^2+2x-3}}$.

25. $\frac{\frac{x^2+7x+10}{x^2-2x-8}}{\frac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4}}$.
26. $\frac{\frac{(x+2)^2}{3x-2}}{\frac{9x+18}{4-9x^2}}$.
27. $\frac{\frac{4x^2-9}{x^2+3x-4}}{\frac{2x-3}{1-x^2}}$.
28. $\frac{\frac{6x^2y+7xy-3y}{xy-x+5y-5}}{\frac{x^3y+4x^2y}{xy-x+4y-4}}$.

29. $\dfrac{x^2}{x+3} + \dfrac{5x+6}{x+3}$.

30. $\dfrac{2}{x+2} + \dfrac{x}{x+2}$.

31. $\dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{3t}$.

32. $\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x}$.

33. $1 - \dfrac{p^2}{p^2-1}$.

34. $\dfrac{4}{s+4} + s$.

35. $\dfrac{4}{2x-1} + \dfrac{x}{x+3}$.

36. $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}$.

37. $\dfrac{1}{x^2-x-2} + \dfrac{1}{x^2-1}$.

38. $\dfrac{2}{3y^2-5y-2} - \dfrac{y}{3y^2-7y+2}$.

39. $\dfrac{4}{x-1} - 3 + \dfrac{-3x^2}{5-4x-x^2}$.

40. $\dfrac{2x-3}{2x^2+11x-6} - \dfrac{3x+1}{3x^2+16x-12} + \dfrac{1}{3x-2}$.

41. $(1+x^{-1})^2$.

42. $(x^{-1}+y^{-1})^2$.

43. $(x^{-1}-y)^{-1}$.

44. $(x-y^{-1})^2$.

45. $\dfrac{4+\dfrac{1}{x}}{3}$.

46. $\dfrac{\dfrac{x+3}{x}}{x-\dfrac{9}{x}}$.

47. $\dfrac{3-\dfrac{1}{2x}}{x+\dfrac{x}{x+2}}$.

48. $\dfrac{\dfrac{x-1}{x^2+5x+6} - \dfrac{1}{x+2}}{3+\dfrac{x-7}{3}}$.

En los problemas 49 y 50 realice las operaciones indicadas, pero no racionalice los denominadores.

49. $\dfrac{2}{\sqrt{x+h}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

50. $\dfrac{v\sqrt{v}}{\sqrt{2+v}} + \dfrac{1}{\sqrt{v}}$.

En los problemas del 51 al 60 simplifique y exprese su respuesta de manera que no aparezcan radicales en el denominador.

51. $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.

52. $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$.

53. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}$.

54. $\dfrac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$.

55. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

56. $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

57. $\dfrac{1}{x+\sqrt{5}}$.

58. $\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{4}{\sqrt{x}-1}$.

59. $\dfrac{5}{2+\sqrt{3}} - \dfrac{4}{1-\sqrt{2}}$.

60. $\dfrac{4}{\sqrt{x}+2} \cdot \dfrac{x^2}{3}$.

Aplicación práctica

Modelado del comportamiento de una celda de carga[3]



¿Qué tienen en común una báscula y un maniquí para pruebas de choque? Ambos tienen celdas de carga. Una celda de carga es un dispositivo que mide fuerza, y la transforma en señales eléctricas. En una báscula, una o más celdas miden el peso que yace sobre la báscula. En un maniquí de prueba de choque, las celdas de carga distribuidas en el cuerpo del maniquí miden las fuerzas de impacto cuando el maniquí choca con el interior del automóvil.

Ya que las celdas de carga son dispositivos de medición, tienen que contar con los atributos de predecibilidad y consistencia. Un requerimiento común es que la salida de voltaje, V, esté relacionada con la fuerza de entrada, F, mediante una ecuación lineal:

$$V = aF + b.$$

Las ecuaciones lineales se estudiarán en el capítulo 1. Una respuesta lineal permite una transformación sencilla de voltaje a lectura métrica.

El equipo utilizado para levantar pesos con frecuencia contiene celdas de carga que proporcionan avisos de cuándo el equipo alcanza su nivel límite. Suponga que una compañía que fabrica celdas de carga para utilizarlas en grúas, coloca una celda de prueba y obtiene los datos siguientes (con la fuerza medida en miles de libras y el voltaje medido en volts).

Fuerza	Voltaje	Fuerza	Voltaje
150.000	0.11019	1650.000	1.20001
300.000	0.21956	1800.000	1.30822
450.000	0.32949	1950.000	1.41599
600.000	0.43899	2100.000	1.52399
750.000	0.54803	2250.000	1.63194
900.000	0.65694	2400.000	1.73947
1050.000	0.76562	2550.000	1.84646
1200.000	0.87487	2700.000	1.95392
1350.000	0.98292	2850.000	2.06128
1500.000	1.09146	3000.000	2.16844

Si la celda de carga se comporta adecuadamente, una ecuación lineal sería un buen *modelo* de los datos. En otras palabras, cuando los valores de los datos se grafican como puntos en una gráfica y se sobrepone una recta, los puntos y la recta deben coincidir.

Las matemáticas para determinar la recta que mejor modela los datos son muy tediosas. Por fortuna, una calculadora gráfica puede hacerlo de manera automática. El resultado es

$$V = 0.0007221F + 0.006081368.$$

Al graficar tanto los datos como la ecuación, se obtiene el resultado que se muestra en la figura 0.2.

Parece como si en verdad el modelo lineal fuese un muy buen ajuste. Pero, ¿es lo suficientemente bueno? Veamos las diferencias entre los voltajes medidos y los valores respectivos que pronostica el modelo lineal. Para cada magnitud de la fuerza, restamos el voltaje calculado con la ecuación, del voltaje medido para esa magnitud de la fuerza. Las diferencias que calculamos se denominan los residuales.

Una vez que hemos calculado los residuales, podemos graficarlos como lo hicimos con los datos originales (véase la fig. 0.3).

Tal parece que los datos que están en la mitad de la figura 0.2, están ligeramente por arriba de la recta (residuales positivos), mientras que los que se encuentran en los extremos de la recta están ligeramente debajo de ella (residuales negativos). En otras palabras, el patrón de los datos tiene una ligera curvatura,

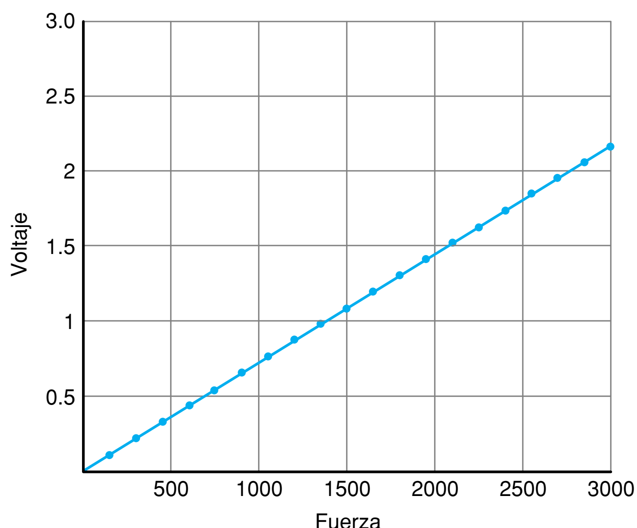


FIGURA 0.2 El modelo lineal.

[3]Con base en la sección 4.6.1 de *Engineering Statistics Handbook*, National Institute of Standards and Technology/SEMATECH, www.nist.gov/itl/div898/handbook/pmd/section6/pmd61.htm.

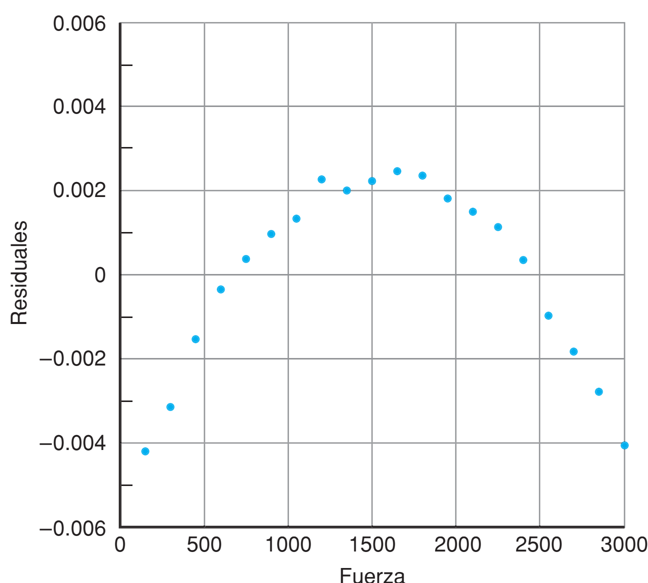


FIGURA 0.3 Gráfica de los residuales.

la cual se hace evidente sólo cuando graficamos los residuales y hacemos un "acercamiento" en la escala vertical.

La gráfica de los residuales parece una parábola (véase el cap. 4). Puesto que la ecuación de una parábola tiene un término cuadrático, podemos esperar que una ecuación cuadrática sea un mejor modelo que prediga los datos que uno lineal. Con base en la función de regresión cuadrática de una calculadora gráfica, se obtiene la ecuación

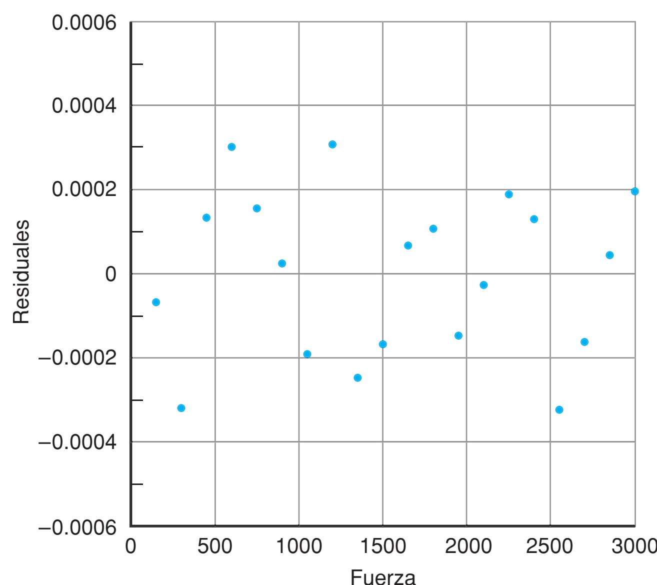
$$V = (-3.22693 \times 10^{-9})F^2 + 0.000732265F + 0.000490711.$$

El coeficiente pequeño en el término de F al cuadrado indica una no linealidad ligera en los datos.

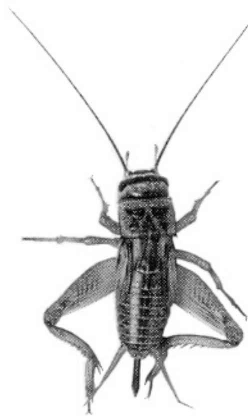
Para el fabricante de celdas de carga, la no linealidad ligera lo alertará para tomar una decisión. Por un lado, una respuesta no lineal de la celda de carga podría producir mediciones imprecisas en algunas aplicaciones, en especial si la celda se está utilizando para medir fuerzas fuera del rango de los datos de prueba (las grúas montadas en barcos de carga algunas veces llevan cargas de hasta 5000 toneladas, o 10 millones de libras). Por otra parte, todos los procesos de manufactura implican un compromiso entre lo que es ideal y lo que es factible prácticamente.

Ejercicios

1. Introduzca los valores de fuerza y voltaje como dos listas separadas en una calculadora gráfica, y luego utilice la función de regresión lineal del menú de estadística para generar una ecuación de regresión. Compare su resultado con la ecuación lineal dada en el estudio precedente.
2. En la mayoría de las calculadoras gráficas, si usted multiplica la lista de fuerzas por 0.0007221, suma 0.006081368 y luego resta el resultado de la lista de voltajes, tendrá la lista de residuales. ¿Por qué se obtiene esto? Almacene los residuales como una nueva lista; luego grafíquelos y compare sus resultados con la figura 0.3.
3. Utilice la función de regresión cuadrática de la calculadora gráfica para generar una nueva ecuación de regresión. Compare su resultado con la ecuación del estudio precedente.
4. El modelo cuadrático también tiene residuales, que cuando se grafican se ven como esto:



Compare la escala del eje vertical con la respectiva de la figura 0.3. ¿Qué le sugiere esta comparación? ¿Qué sugiere el patrón de los datos para los residuales cuadráticos?



CAPÍTULO 1

Ecuaciones

Cuando se trabaja con un problema de aplicación de la vida real, con frecuencia nos encontramos con una o más ecuaciones que modelan dicha situación. Muchos fenómenos pueden describirse utilizando ecuaciones lineales, que son el tipo más simple para trabajar.

Un ejemplo es el chirrido del grillo del árbol de nieve (*Oecanthulus niveus*), que se encuentra en el medio oeste de Estados Unidos. A finales de 1890, los naturalistas establecieron que cuando este grillo chirría (lo cual hace sólo al final del verano), la velocidad del chirrido de N chirridos por minuto está relacionada con la temperatura del aire T en grados Fahrenheit por medio de la ecuación.

$$N = 4.7T - 190.$$[1]

Cuando T aumenta, también lo hace N, lo cual significa que el grillo chirría más rápido en clima cálido. Para predecir la velocidad de chirrido a partir de la temperatura, simplemente multiplicamos la temperatura por 4.7 y restamos 190. Por ejemplo, cuando la temperatura es de 60 grados, el grillo chirría a una velocidad de $4.7(60) - 190 = 92$ chirridos por minuto.

¿Podemos utilizar los chirridos del grillo como un termómetro para indicar la temperatura? Sí. Primero debemos despejar a T de la ecuación, utilizando las técnicas que se explicarán en este capítulo. El resultado es:

$$T = \frac{N + 190}{4.7}.$$

Esto significa que si en una tarde de agosto en Nebraska, sentados en el exterior oímos un grillo que emite 139 chirridos por minuto, entonces sabemos que la temperatura es alrededor de $(139 + 190)/4.7 = 70$ grados.

En este capítulo, desarrollaremos técnicas para resolver no sólo las ecuaciones lineales, sino también las cuadráticas.

[1]C. A. Bessey y E. A. Bessey, "Further Notes on Thermometer Crickets". *American Naturalist,* 32 (1898), 263-264.

OBJETIVO Estudiar las ecuaciones equivalentes y desarrollar técnicas para resolver ecuaciones lineales, que incluyan las ecuaciones con literales.

1.1 Ecuaciones lineales

Ecuaciones

Una **ecuación** es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que conforman una ecuación son llamadas sus **lados** o **miembros**, y están separadas por el **signo de igualdad** "$=$".

Principios en práctica 1
Ejemplos de ecuaciones

Usted está empacando material de cercado para un jardín rectangular en el que el largo es 2 pies mayor que el ancho. Escriba una ecuación que represente los pies lineales P necesarios para un jardín con ancho w.

EJEMPLO 1 Ejemplos de ecuaciones

a. $x + 2 = 3.$

b. $x^2 + 3x + 2 = 0.$

c. $\dfrac{y}{y - 4} = 6.$

d. $w = 7 - z.$

En el ejemplo 1 cada ecuación contiene al menos una variable. Una **variable** es un símbolo que puede ser reemplazado por un número cualquiera de un conjunto de números diferentes. Los símbolos más comunes para las variables son las últimas letras del alfabeto, x, y, z, w y t. De aquí que se diga de (a) y (c) que son ecuaciones en las variables x y y, respectivamente. La ecuación (d) es una ecuación en las variables w y z. En la ecuación $x + 2 = 3$, los números 2 y 3 se conocen como *constantes*, ya que son números fijos.

Aquí estudiamos las restricciones sobre las variables.

Nunca permitamos que en una ecuación haya una variable que tenga un valor para el cual esa ecuación no esté definida. Por tanto, en

$$\frac{y}{y - 4} = 6,$$

y no puede ser 4, porque provocaría que el denominador fuese cero (no podemos dividir entre cero). En algunas ecuaciones los valores permisibles de una variable están restringidos por razones físicas. Por ejemplo, si la variable t representa el tiempo, los valores negativos de t pueden no tener sentido. Entonces debemos suponer que $t \geq 0$.

Resolver una ecuación significa encontrar todos los valores de sus variables para los cuales la ecuación es verdadera. Estos valores se conocen como *soluciones* de la ecuación y se dice que *satisfacen* la ecuación. Cuando sólo está implicada una variable, una solución también se conoce como **raíz.** Al conjunto de todas las soluciones se le llama **conjunto solución** de la ecuación. En ocasiones, a una letra que representa una cantidad desconocida en una ecuación se le denomina *incógnita* (o *indeterminada*). Ahora ilustraremos estos términos.

EJEMPLO 2 Terminología para las ecuaciones

a. En la ecuación $x + 2 = 3$, la variable x es la incógnita. Obviamente el único valor de x que satisface la ecuación es 1. De aquí que 1 sea una raíz y el conjunto solución sea $\{1\}$.

b. -2 es una raíz de $x^2 + 3x + 2 = 0$ porque sustituir -2 por x hace que la ecuación sea verdadera: $(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$.

c. $w = 7 - z$ es una ecuación con dos incógnitas. Una solución es la pareja de valores $w = 4$ y $z = 3$. Sin embargo, existe una infinidad de soluciones. ¿Podría pensar en otra?

Ecuaciones equivalentes

Resolver una ecuación puede implicar la realización de operaciones en ella. Es preferible que al aplicar cualquiera de tales operaciones se obtenga otra ecuación con exactamente las mismas soluciones que la ecuación original. Cuando esto ocurre, se dice que las ecuaciones son **equivalentes.** Existen tres operaciones que garantizan la equivalencia:

1. Sumar (o restar) el mismo polinomio[2] a (de) ambos miembros de una ecuación, en donde el polinomio está en la misma variable que aparece en la ecuación.

Por ejemplo, si $-5x = 5 - 6x$, entonces sumar $6x$ a ambos miembros nos da la ecuación equivalente $-5x + 6x = 5 - 6x + 6x$, o $x = 5$.

La equivalencia no se garantiza si ambos lados se multiplican o dividen por una expresión que incluya una variable.

2. Multiplicar (dividir) ambos miembros de una ecuación por la misma constante, excepto el cero.

Por ejemplo, si $10x = 5$, entonces dividir ambos miembros entre 10 nos da la ecuación equivalente $\frac{10x}{10} = \frac{5}{10}$, o $x = \frac{1}{2}$.

3. Reemplazar cualquiera de los miembros de una ecuación por una expresión igual (equivalente).

Por ejemplo, si $x(x + 2) = 3$, entonces reemplazar el miembro izquierdo por la expresión equivalente $x^2 + 2x$, da la ecuación equivalente $x^2 + 2x = 3$.

Repetimos: la aplicación de las operaciones, de la 1 a la 3, garantiza que la ecuación resultante sea equivalente a la original. Sin embargo, algunas veces, para resolver una ecuación, tenemos que aplicar otras operaciones, distintas de la 1 a la 3. Estas operaciones *no* necesariamente resultan en ecuaciones equivalentes. Se incluyen las siguientes.

Operaciones que pueden no producir ecuaciones equivalentes

4. Multiplicar ambos miembros de una ecuación por una expresión que involucre la variable.

5. Dividir ambos miembros de una ecuación por una expresión que involucre la variable.

6. Elevar ambos miembros de una ecuación al mismo exponente.

La operación 6 incluye tomar raíces en ambos miembros.

Ilustraremos las últimas tres operaciones. Por ejemplo, por inspección la única raíz de $x - 1 = 0$ es 1. Multiplicar cada miembro por x (operación 4) nos da $x^2 - x = 0$, ecuación que se satisface si x es 0 o 1 (verifique esto por sustitución). Pero 0 *no* satisface la ecuación *original*. Por tanto, las ecuaciones no son equivalentes.

Asimismo, puede verificar que la ecuación $(x - 4)(x - 3) = 0$ se satisface cuando x es 4 o 3. Dividir ambos miembros entre $x - 4$ (operación 5) nos da $x - 3 = 0$, cuya única raíz es 3. Otra vez no tenemos una equivalencia, ya que, en este caso, se ha "perdido" una raíz. Observe que cuando x es 4, la división entre $x - 4$ implica dividir entre 0, una operación que no es válida.

[2]Véase la sección 0.6 para una definición de polinomio.

Por último, elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación $x = 2$ (operación 6) da $x^2 = 4$, la cual es verdadera si $x = 2$ o -2. Pero -2 no es raíz de la ecuación original.

De este estudio, queda claro que cuando realicemos las operaciones 4 al 6, debemos ser cuidadosos acerca de las conclusiones concernientes a las raíces de una ecuación dada. Las operaciones 4 y 6, *pueden* producir una ecuación con más raíces. Por tanto, se debe verificar si la "solución" obtenida por estas operaciones satisface o no la ecuación *original*. La operación 5 *puede* producir una ecuación con menos raíces. En este caso, cualquier raíz "perdida" tal vez nunca pueda determinarse. Por ello, si es posible, evite efectuar la operación 5.

En resumen, una ecuación puede pensarse como un conjunto de restricciones sobre cualquier variable de la ecuación. Las operaciones 4, 5 y 6 pueden aumentar o disminuir las restricciones, lo que da lugar a soluciones diferentes de la ecuación original. Sin embargo, las operaciones 1, 2 y 3 nunca afectan las restricciones.

Tecnología

Una calculadora gráfica puede utilizarse para comprobar una raíz. Por ejemplo, suponga que queremos determinar si 3/2 es una raíz de la ecuación

$$2x^3 + 7x^2 = 19x + 60.$$

Primero, reescribimos la ecuación de modo que un miembro sea 0. Restar $19x + 60$ de ambos miembros nos da la ecuación equivalente

$$2x^3 + 7x^2 - 19x - 60 = 0.$$

En una calculadora gráfica TI-83 ingresamos la expresión $2x^3 + 7x^2 - 19x - 60$ como Y_1 y después evaluamos Y_1 en $x = 3/2$. La figura 1.1 muestra que el resultado es –66, el cual es diferente de cero. Por tanto, 3/2 no es una raíz. Sin embargo, si Y_1 es evaluada en $x = -5/2$ esto nos *da* 0. De modo que $-5/2$ es una raíz de la ecuación original.

Conviene destacar que si la ecuación original hubiera estado en términos de la variable t,

$$2t^3 + 7t^2 = 19t + 60,$$

entonces debemos reemplazar t por x, ya que la calculadora evalúa Y_1 en un valor específico de x, no de t.

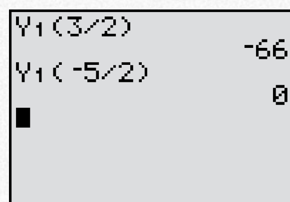


FIGURA 1.1 Para $2x^3 + 7x^2 - 19x - 60 = 0$, $^3/_2$ no es raíz, pero $^{-5}/_2$ sí lo es.

Ecuaciones lineales

Los principios presentados hasta aquí se demostrarán ahora en la solución de una *ecuación lineal*.

Definición

Una ***ecuación lineal*** en la variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax + b = 0, \tag{1}$$

donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Una ecuación lineal también se conoce como ecuación de primer grado o ecuación de grado uno, ya que la potencia más alta de la variable que aparece en la ecuación (1) es la primera.

Para resolver una ecuación lineal realizamos operaciones en ella hasta obtener una ecuación equivalente cuyas soluciones son *obvias*. Esto significa una ecuación en la que la variable queda aislada en un lado de la ecuación, como lo muestran los ejemplos siguientes.

Principios en práctica 2
Resolución de una ecuación lineal

El ingreso total de una cafetería con base en la venta de x cafés especiales está dado por $r = 2.25x$, y sus costos totales diarios están dados por $c = 0.75x + 300$. ¿Cuántos cafés especiales se necesitan vender cada día para obtener el punto de equilibrio? En otras palabras, ¿cuándo el ingreso es igual a los costos?

EJEMPLO 3 Resolución de una ecuación lineal

Resolver $5x - 6 = 3x$.

Solución: empezamos por dejar los términos que incluyen a x en un lado y las constantes en el otro. Entonces despejamos x por medio de las operaciones matemáticas adecuadas. Tenemos

$$5x - 6 = 3x,$$

$$5x - 6 + (-3x) = 3x + (-3x) \quad \text{(sumando } -3x \text{ a ambos miembros)},$$

$$2x - 6 = 0 \quad \text{(simplificando, esto es, operación 3)},$$

$$2x - 6 + 6 = 0 + 6 \quad \text{(sumando 6 a ambos miembros)},$$

$$2x = 6 \quad \text{(simplificando)},$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \quad \text{(dividiendo ambos miembros entre 2)},$$

$$x = 3.$$

Es claro que 3 es la única raíz de la última ecuación. Como cada ecuación es equivalente a la anterior, concluimos que 3 debe ser la única raíz de $5x - 6 = 3x$. Esto es, el conjunto solución es $\{3\}$. Podemos describir el primer paso en la solución de una ecuación como el mover un término de un lado a otro cambiando su signo; esto por lo regular se conoce como *transponer*. Observe que como la ecuación original puede escribirse en la forma $2x + (-6) = 0$, resulta ser una ecuación lineal.

Principios en práctica 3
Resolución de una ecuación lineal

Mónica y Pedro han convenido en juntar sus ahorros cuando hayan ahorrado la misma cantidad de dinero. Mónica puede ahorrar \$40 semanales, pero ella primero debe usar \$125 para pagar la deuda de su tarjeta de crédito. Pedro ha ahorrado \$35 semanales durante tres semanas. ¿Dentro de cuánto tiempo juntarán sus ahorros? ¿Cuánto habrá ahorrado cada uno de ellos?

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación lineal

Resolver $2(p + 4) = 7p + 2$.

Solución: primero quitamos los paréntesis. Después agrupamos los términos semejantes y resolvemos. Tenemos

$$2(p + 4) = 7p + 2$$

$$2p + 8 = 7p + 2 \quad \text{(propiedad distributiva)},$$

$$2p = 7p - 6 \quad \text{(restando 8 de ambos lados)},$$

$$-5p = -6 \quad \text{(restando 7p de ambos lados)},$$

$$p = \frac{-6}{-5} \quad \text{(dividiendo ambos lados entre } -5),$$

$$p = \frac{6}{5}.$$

EJEMPLO 5 Resolución de una ecuación lineal

Resolver $\dfrac{7x+3}{2} - \dfrac{9x-8}{4} = 6.$

Solución: primero eliminamos fracciones multiplicando *ambos* lados de la ecuación por el mínimo común denominador (MCD),[3] que es 4. Después efectuamos varias operaciones algebraicas para obtener una solución. Así,

La propiedad distributiva requiere de que *ambos* términos en el paréntesis sean multiplicados por 4.

$$4\left(\frac{7x+3}{2} - \frac{9x-8}{4}\right) = 4(6),$$

$$4\cdot\frac{7x+3}{2} - 4\cdot\frac{9x-8}{4} = 24 \qquad \text{(propiedad distributiva)},$$

$$2(7x+3) - (9x-8) = 24 \qquad \text{(simplificando)},$$

$$14x + 6 - 9x + 8 = 24 \qquad \text{(propiedad distributiva)},$$

$$5x + 14 = 24 \qquad \text{(simplificando)},$$

$$5x = 10 \qquad \text{(restando 14 de ambos lados)},$$

$$x = 2 \qquad \text{(dividiendo ambos lados entre 5)}.$$

Toda ecuación lineal tiene exactamente una raíz.

Cada ecuación de los ejemplos 3 al 5 tiene una sola raíz. Esto es cierto para toda ecuación lineal en una variable.

Ecuaciones con literales

Las ecuaciones en las que algunas de las constantes no están especificadas pero están representadas por letras, tales como *a, b, c* o *d*, se llaman **ecuaciones con literales** y las letras se conocen como **constantes literales** o **constantes arbitrarias.** Por ejemplo, en la ecuación con literales $x + a = 4b$, podemos considerar a *a* y *b* como constantes arbitrarias. Las fórmulas como $I = Prt$, que expresan una relación entre ciertas cantidades, pueden considerarse como ecuaciones con literales. Si queremos expresar una letra en particular en términos de las otras, esta letra es considerada la incógnita.

Principios en práctica 4
Resolución de una ecuación con literales

La fórmula $d = rt$ proporciona la distancia *d* que un objeto recorre viajando a una velocidad *r* durante un tiempo *t*. ¿Cuál es la velocidad *r* de un tren que viaja *d* millas en *t* horas?

EJEMPLO 6 Resolución de ecuaciones con literales

a. *La ecuación $I = Prt$ es la fórmula para el interés simple I sobre un capital de P dólares a una tasa de interés anual r en un periodo de t años. Expresar r en términos de I, P y t.*

Solución: aquí consideramos que *r* será la incógnita. Para aislar a *r* dividimos ambos lados entre *Pt*. Tenemos

$$I = Prt,$$

$$\frac{I}{Pt} = \frac{Prt}{Pt},$$

$$\frac{I}{Pt} = r \quad \text{o} \quad r = \frac{I}{Pt}.$$

[3]El mínimo común denominador de dos o más fracciones es el número más pequeño con todos los denominadores como factores. Esto es, el MCD es el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

Cuando dividimos ambos lados entre Pt, suponemos que $Pt \neq 0$, ya que no podemos dividir entre 0. Suposiciones semejantes se harán al resolver otras ecuaciones con literales.

b. *La ecuación $S = P + Prt$ es la fórmula para el valor S de una inversión de un capital de P dólares a un interés anual simple r durante un periodo de t años. Resolver para P.*

Solución:

$$S = P + Prt,$$

$$S = P(1 + rt) \qquad \text{(factorizando)},$$

$$\frac{S}{1 + rt} = P \qquad \text{(dividiendo ambos lados entre } 1 + rt\text{)}.$$

Principios en práctica 5

Resolución de una ecuación con literales

La fórmula $S = 4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ proporciona el área de la superficie S de una esfera con diámetro d. ¿Cuál es la longitud del lado de la caja más pequeña que podrá contener una bola con área de superficie igual a S?

EJEMPLO 7 Resolución de una ecuación con literales

Resolver $(a + c)x + x^2 = (x + a)^2$ para x.

Solución: primero debemos simplificar la ecuación y después colocar todos los términos que incluyan a x en un lado:

$$(a + c)x + x^2 = (x + a)^2,$$

$$ax + cx + x^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$

$$ax + cx = 2ax + a^2,$$

$$cx - ax = a^2,$$

$$x(c - a) = a^2,$$

$$x = \frac{a^2}{c - a}.$$

Ejercicio 1.1

En los problemas del 1 al 6 determine por sustitución cuáles de los números dados satisfacen la ecuación.

1. $9x - x^2 = 0;\ 1, 0.$

2. $20 - 9x = -x^2;\ 5,4.$

3. $y + 2(y - 3) = 4;\ \frac{10}{3}, 1.$

4. $2x + x^2 - 8 = 0;\ 2, -4.$

5. $x(6 + x) - 2(x + 1) - 5x = 4;\ -2, 0.$

6. $x(x + 1)^2(x + 2) = 0;\ 0, -1, 2.$

En los problemas del 7 al 16 determine qué operaciones se aplicaron a la primera ecuación para obtener la segunda. Establezca si las operaciones garantizan o no que las ecuaciones sean equivalentes. No resuelva las ecuaciones.

7. $x - 5 = 4x + 10;\ x = 4x + 15.$

8. $8x - 4 = 16;\ x - \frac{1}{2} = 2.$

9. $x = 3;\ x^4 = 81.$

10. $\frac{1}{2}x^2 + 3 = x - 9;\ x^2 + 6 = 2x - 18.$

11. $x^2 - 2x = 0;\ x - 2 = 0.$

12. $\frac{2}{x - 2} + x = x^2;\ 2 + x(x - 2) = x^2(x - 2).$

13. $\dfrac{x^2-1}{x-1}=3;\; x^2-1=3(x-1).$

14. $x(x+11)(x+9)=x(x+5);$
$(x+11)(x+9)=x+5.$

15. $\dfrac{x(x+1)}{x-5}=x(x+9);\; x+1=(x+9)(x-5).$

16. $2x^2-9=x;\; x^2-\frac{1}{2}x=\frac{9}{2}.$

En los problemas del 17 al 46, resuelva las ecuaciones.

17. $4x=10.$

18. $0.2x=7.$

19. $3y=0.$

20. $2x-4x=-5.$

21. $-5x=10-15.$

22. $3-2x=4.$

23. $5x-3=9.$

24. $\sqrt{2}x+3=8.$

25. $7x+7=2(x+1).$

26. $6z+5z-3=41.$

27. $2(p-1)-3(p-4)=4p.$

28. $t=2-2[2t-3(1-t)].$

29. $\dfrac{x}{5}=2x-6.$

30. $\dfrac{5y}{7}-\dfrac{6}{7}=2-4y.$

31. $7+\dfrac{4x}{9}=\dfrac{x}{2}.$

32. $\dfrac{x}{3}-4=\dfrac{x}{5}.$

33. $q=\dfrac{3}{2}q-4.$

34. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}=7.$

35. $3x+\dfrac{x}{5}-5=\dfrac{1}{5}+5x.$

36. $y-\dfrac{y}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{y}{4}=\dfrac{y}{5}.$

37. $\dfrac{2y-3}{4}=\dfrac{6y+7}{3}.$

38. $\dfrac{p}{3}+\dfrac{3}{4}p=\dfrac{9}{2}(p-1).$

39. $w+\dfrac{w}{2}-\dfrac{w}{3}+\dfrac{w}{4}=5.$

40. $\dfrac{7+2(x+1)}{3}=\dfrac{6x}{5}.$

41. $\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{2-x}{6}=x-2.$

42. $\dfrac{x}{5}+\dfrac{2(x-4)}{10}=7.$

43. $\dfrac{9}{5}(3-x)=\dfrac{3}{4}(x-3).$

44. $\dfrac{2y-7}{3}+\dfrac{8y-9}{14}=\dfrac{3y-5}{21}.$

45. $\dfrac{3}{2}(4x-3)=2[x-(4x-3)].$

46. $(3x-1)^2-(5x-3)^2=-(4x-2)^2.$

En los problemas del 47 al 54 exprese el símbolo indicado en términos de los símbolos restantes.

47. $I=Prt;\; P.$

48. $ax+b=0;\; x.$

49. $p=8q-1;\; q.$

50. $p=-3q+6;\; q.$

51. $S=P(1+rt);\; r.$

52. $r=\dfrac{2mI}{B(n+1)};\; m.$

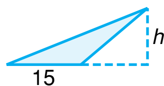
53. $S=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n);\; a_1.$

54. $S=\dfrac{R[(1+i)^n-1]}{i};\; R.$

---

55. Geometría Utilice la fórmula $P=2l+2w$ para determinar el ancho w de un rectángulo con perímetro P de 960 m, cuyo largo l es de 360 m.

56. Geometría Utilice la fórmula $A=\frac{1}{2}bh$ para determinar la altura h de un triángulo con área de 75 cm^2, cuya base b es 15 cm.



57. Impuesto de venta Un agente de ventas necesita calcular el costo de un artículo con un impuesto de venta de 8.25%. Escriba una ecuación que represente el costo total c de un artículo que cuesta x dólares.

58. Ingreso El ingreso mensual total de una guardería obtenido del cuidado de x niños está dado por $r=450x$, y sus costos mensuales totales están dados por $c=380x+3500$. ¿Cuántos niños se necesitan inscribir mensualmente para llegar al punto de equilibrio? En otras palabras, ¿cuándo los ingresos igualan a los costos?

59. Depreciación lineal Si usted compra un artículo para uso empresarial, al preparar la declaración de impuestos usted puede repartir su costo entre toda la vida útil del artículo. Esto se denomina *depreciación*. Un método de depreciación es la *depreciación lineal*, en la que la depreciación anual se calcula dividiendo el costo del artículo, menos su valor de rescate, entre su vida útil. Supóngase que el costo es C dólares, la vida útil es N años y no hay valor de rescate. Entonces el valor V (en dólares) del artículo al final de n años está dado por

$$V=C\left(1-\frac{n}{N}\right).$$

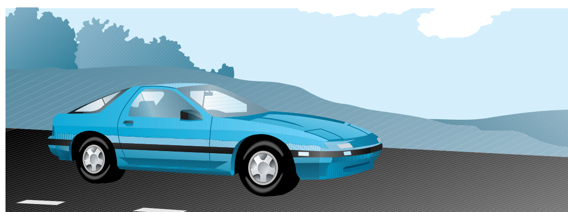
Si el mobiliario nuevo de una oficina se compró por \$3200, tiene una vida útil de 8 años y no tiene valor de rescate, ¿después de cuántos años tendrá un valor de \$2000?

60. Ondas de radar Cuando se utiliza un radar para determinar la velocidad de un automóvil en una autopista, una onda es enviada desde el radar y reflejada por el automóvil en movimiento. La diferencia F (en ciclos por segundo) de la frecuencia entre la onda original y la reflejada está dada por

$$F = \frac{vf}{334.8},$$

donde v es la velocidad del automóvil en millas por hora y f la frecuencia de la onda original (en megaciclos por segundo).

Suponga que usted está manejando en una autopista que tiene un límite de velocidad de 65 millas por hora. Un oficial de la policía dirige una onda de radar con una frecuencia de 2450 megaciclos por segundo a su automóvil y observa que la diferencia en las frecuencias es de 495 ciclos por segundo. ¿El oficial puede reclamarle que iba a exceso de velocidad?



61. Ahorros Paula y Sam quieren comprar una casa, de modo que han decidido ahorrar la cuarta parte de sus respectivos salarios. Paula gana $24.00 por hora y recibe $8.00 extra a la semana, por declinar las prestaciones de la empresa, mientras que Sam gana $28.00 por hora más las prestaciones. Ellos quieren ahorrar al menos $405.00 semanales. Si trabajan el mismo número de horas, ¿cuántas horas debe trabajar cada uno de ellos cada semana?

62. Gravedad La ecuación $h = -4.9t^2 + m$ es la fórmula para la altura h, en metros, de un objeto t segundos después que es soltado desde una posición inicial de m metros. ¿Cuánto tiempo t ha estado cayendo un objeto, si éste ha caído desde una altura m y ahora está a una altura h?

63. Expansión lineal Cuando los objetos sólidos son calentados se expanden en longitud –es la razón por la que en el pavimento y en los puentes se colocan juntas de expansión. Por lo general, cuando la temperatura de un cuerpo sólido de longitud I_0 se incremente desde T_0 hasta T, la longitud, I, del cuerpo está dada por

$$I = I_0[1 + \alpha(T - T_0)],$$

donde α (letra griega *alfa*) se denomina *coeficiente de expansión lineal*. Suponga que una varilla de metal de 1 m de longitud a 0 °C se expande 0.001 m cuando se calienta desde 0 hasta 100 °C. Encuentre el coeficiente de expansión lineal.

64. Relación presa-depredador Para estudiar la relación presa-depredador, se realizó un experimento[4] en el que un sujeto con los ojos vendados, el "depredador", se puso al frente de una mesa cuadrada de 3 pies por lado en la que se colocaron uniformemente distribuidos, discos de papel de lija como "presa". Durante un minuto el "depredador" buscó los discos dando golpecitos suaves con un dedo. Siempre que se encontraba con un disco lo retiraba y reanudaba la búsqueda. El experimento fue repetido para varias densidades de discos (número de discos por 9 pies^2). Se estimó que si y es el número de discos retirados en 1 minuto cuando x discos están en la mesa, entonces

$$y = a(1 - by)x,$$

donde a y b son constantes. Resuelva esta ecuación para y.

En los problemas del 65 al 68 utilice una calculadora gráfica para determinar, si los hay, cuáles de los números dados son raíces de la ecuación dada.

65. $112x^2 = 6x + 1$; $\frac{1}{8}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{14}$.

66. $8x^3 + 11x + 21 = 58x^2$; $7, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$.

67. $\dfrac{3.1t - 7}{4.8t - 2} = 7$; $\sqrt{6}, -\dfrac{47}{52}, \dfrac{14}{61}$.

68. $\left(\dfrac{v}{v+3}\right)^2 = v$; $0, \dfrac{27}{4}, \dfrac{13}{3}$.

OBJETIVO Resolver ecuaciones fraccionarias y con radicales que conducen a ecuaciones lineales.

1.2 Ecuaciones que conducen a ecuaciones lineales

Ecuaciones fraccionarias

En esta sección, ilustramos que al resolver una ecuación no lineal puede suceder que ésta se reduzca a una ecuación lineal. Empezamos con una **ecuación fraccionaria,** que es una ecuación en que una incógnita está en un denominador.

> ***Principios en práctica 1***
> **Resolución de una ecuación fraccionaria**
>
> Un bote que viaja a una velocidad r, recorre 10 millas río abajo en una corriente de 2 millas por hora; al mismo tiempo un bote que viaja a la misma velocidad recorre 6 millas río arriba en contra de la corriente. Escriba una ecuación que describa esta situación, y determine la velocidad de los botes.

EJEMPLO 1 Resolución de una ecuación fraccionaria

Resolver $\dfrac{5}{x-4} = \dfrac{6}{x-3}$.

[4]C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, XCI, núm. 7 (1959), 385-398.

Solución:

Estrategia: primero escribimos la ecuación de manera que no tenga fracciones. Después utilizamos las técnicas algebraicas comunes para resolver la ecuación lineal resultante.

Multiplicando ambos lados por el MCD, $(x - 4)(x - 3)$, tenemos

$$(x-4)(x-3)\left(\frac{5}{x-4}\right) = (x-4)(x-3)\left(\frac{6}{x-3}\right),$$

$$5(x-3) = 6(x-4) \quad \text{(ecuación lineal),}$$

$$5x - 15 = 6x - 24,$$

$$9 = x.$$

Una resolución alternativa que evita la multiplicación de ambos lados por el MCD es como sigue:

$$\frac{5}{x-4} - \frac{6}{x-3} = 0.$$

Suponiendo que x no es 3 ni 4 y combinando las fracciones tenemos

$$\frac{9-x}{(x-4)(x-3)} = 0.$$

Una fracción puede ser 0 sólo cuando su numerador es 0 y su denominador es distinto de cero. Por tanto, $x = 9$.

En el primer paso, multiplicamos cada lado por una expresión que incluya a la *variable* x. Como mencionamos en la sección 1.1, esto significa que no estamos garantizando que la última ecuación sea equivalente a la *original*. Así, debemos verificar si 9 satisface o no la ecuación *original*. Sustituyendo 9 por x en la ecuación, obtenemos

$$\frac{5}{9-4} = \frac{6}{9-3},$$

$$1 = 1,$$

que es un enunciado verdadero. Por tanto, 9 es una raíz.

Algunas ecuaciones que no son lineales no tienen solución. En ese caso, decimos que el conjunto solución es el **conjunto vacío** o **conjunto nulo,** al que denotamos por { } o ∅. El ejemplo 2 ilustra lo anterior.

EJEMPLO 2 Resolución de ecuaciones fraccionarias

a. *Resolver* $\dfrac{3x+4}{x+2} - \dfrac{3x-5}{x-4} = \dfrac{12}{x^2-2x-8}.$

Solución: al observar los denominadores y notar que

$$x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4),$$

concluimos que el MCD es $(x + 2)(x - 4)$. Multiplicando ambos miembros por el MCD, tenemos

$$(x+2)(x-4)\left(\frac{3x+4}{x+2} - \frac{3x-5}{x-4}\right) = (x+2)(x-4)\cdot\frac{12}{(x+2)(x-4)},$$

$$(x-4)(3x+4) - (x+2)(3x-5) = 12,$$

$$3x^2 - 8x - 16 - (3x^2 + x - 10) = 12,$$

$$3x^2 - 8x - 16 - 3x^2 - x + 10 = 12,$$

$$-9x - 6 = 12,$$

$$-9x = 18,$$

$$x = -2. \quad \textbf{(1)}$$

Sin embargo, la ecuación *original* no está definida para $x = -2$ (no podemos dividir entre cero), de modo que no existen raíces. Así, el conjunto solución es $\varnothing$. Aunque -2 es una solución de la ecuación (1), no lo es de la ecuación *original,* por lo que se le denomina **solución extraña** de la ecuación original.

b. *Resolver* $\dfrac{4}{x-5} = 0.$

Solución: la única manera que una fracción puede ser igual a cero es cuando el numerador es 0 pero su denominador no. Ya que el numerador, 4, nunca es 0, el conjunto solución es $\varnothing$.

Principios en práctica 2
Ecuación con literales

El tiempo que le toma a un aeroplano recorrer una distancia dada con viento a favor, puede calcularse dividiendo la distancia entre la suma de la velocidad del aeroplano y la velocidad del viento. Escriba una ecuación que calcule el tiempo t que le toma a un aeroplano, que viaja a una velocidad r con un viento w, cubrir una distancia d. Resuelva la ecuación para w.

EJEMPLO 3 Ecuación con literales

Si $s = \dfrac{u}{au + v}$, *exprese u en términos de las restantes letras; esto es, resolver para u.*

Solución:

Estrategia: como la incógnita, u, está en el denominador, primero quitamos las fracciones y después resolvemos para u.

$$s = \frac{u}{au+v},$$

$$s(au+v) = u \qquad \text{(multiplicando ambos lados por } au+v\text{)},$$

$$sau + sv = u,$$

$$sau - u = -sv,$$

$$u(sa-1) = -sv,$$

$$u = \frac{-sv}{sa-1} = \frac{sv}{1-sa}.$$

Ecuaciones con radicales

Una **ecuación con radicales** (ecuación radical) es aquélla en la que una incógnita aparece en un radicando. Los dos ejemplos siguientes ilustran las técnicas empleadas para resolver tales ecuaciones.

Principios en práctica 3
Resolución de una ecuación con radicales

La diferencia entre la longitud de una rampa y la longitud de la distancia horizontal que cubre es de 2 pies. El cuadrado de la distancia vertical que cubre la rampa es de 16 pies cuadrados. Escriba una ecuación para la diferencia y resuélvala. ¿Cuál es la longitud de la rampa?

EJEMPLO 4 Resolución de una ecuación con radicales

Resolver $\sqrt{x^2+33} - x = 3.$

Solución: para resolver esta ecuación radical, elevamos ambos miembros a la misma potencia para eliminar el radical. Esta operación *no* garantiza la equivalencia, de modo que debemos verificar las "soluciones" resultantes. Empezamos aislando el radical en un lado. Después elevamos al cuadrado ambos lados y despejamos utilizando las técnicas comunes. Así,

$$\sqrt{x^2+33} = x+3,$$

$$x^2+33 = (x+3)^2 \qquad \text{(elevando al cuadrado ambos lados)},$$

$$x^2 + 33 = x^2 + 6x + 9,$$
$$24 = 6x,$$
$$4 = x.$$

Por sustitución se debe demostrar que 4 es en realidad una raíz.

Con algunas ecuaciones radicales puede tener que elevar ambos lados a la misma potencia en más de una ocasión, como lo muestra el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Resolución de una ecuación con radicales

Resolver $\sqrt{y-3} - \sqrt{y} = -3$.

Solución: cuando una ecuación tiene dos términos que implican radicales, primero la escribimos de modo que esté un radical en cada lado, si es posible. Después elevamos al cuadrado y resolvemos. Tenemos

La razón por la que deseamos una radical en cada lado es para eliminar elevando al cuadrado un binomio con dos radicales diferentes.

$$\sqrt{y-3} = \sqrt{y} - 3,$$
$$y - 3 = y - 6\sqrt{y} + 9 \quad \text{(elevando ambos lados al cuadrado),}$$
$$6\sqrt{y} = 12,$$
$$\sqrt{y} = 2,$$
$$y = 4 \quad \text{(elevando ambos lados al cuadrado).}$$

Sustituyendo 4 en el lado izquierdo de la ecuación *original* nos da $\sqrt{1} - \sqrt{4}$, que es -1. Ya que este resultado no es igual al del lado derecho, -3, no hay solución. Esto es, el conjunto solución es $\varnothing$. Aquí 4 es una solución extraña.

Ejercicio 1.2

En los problemas del 1 al 34 resuelva las ecuaciones.

1. $\frac{5}{x} = 25.$

2. $\frac{4}{x-1} = 2.$

3. $\frac{7}{3-x} = 0.$

4. $\frac{5x-2}{x+1} = 0.$

5. $\frac{4}{8-x} = \frac{3}{4}.$

6. $\frac{x+3}{x} = \frac{2}{5}.$

7. $\frac{q}{5q-4} = \frac{1}{3}.$

8. $\frac{4p}{7-p} = 1.$

9. $\frac{1}{p-1} = \frac{2}{p-2}.$

10. $\frac{2x-3}{4x-5} = 6.$

11. $\frac{1}{x} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$

12. $\frac{4}{t-3} = \frac{3}{t-4}.$

13. $\frac{3x-2}{2x+3} = \frac{3x-1}{2x+1}.$

14. $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+1}{3-x} = 0.$

15. $\frac{y-6}{y} - \frac{6}{y} = \frac{y+6}{y-6}.$

16. $\frac{y-3}{y+3} = \frac{y-3}{y+2}.$

17. $\frac{-4}{x-1} = \frac{7}{2-x} + \frac{3}{x+1}.$

18. $\frac{1}{x-3} - \frac{3}{x-2} = \frac{4}{1-2x}.$

19. $\frac{9}{x-3} = \frac{3x}{x-3}.$

20. $\frac{x}{x+3} - \frac{x}{x-3} = \frac{3x-4}{x^2-9}.$

21. $\sqrt{x+5} = 4.$

22. $\sqrt{z-2} = 3.$

23. $\sqrt{5x-6} - 16 = 0.$

24. $6 - \sqrt{2x+5} = 0.$

25. $\sqrt{\frac{x}{2}+1}=\frac{2}{3}$.

26. $(x+6)^{1/2}=7$.

27. $\sqrt{4x-6}=\sqrt{x}$.

28. $\sqrt{5+2x}=\sqrt{4x-2}$.

29. $(x-3)^{3/2}=8$.

30. $\sqrt{y^2-9}=9-y$.

31. $\sqrt{y}+\sqrt{y+2}=3$.

32. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=1$.

33. $\sqrt{z^2+2z}=3+z$.

34. $\sqrt{\frac{1}{w}}-\sqrt{\frac{2}{5w-2}}=0$.

En los problemas del 35 al 38 exprese la letra indicada en términos de las letras restantes.

35. $r=\frac{d}{1-dt}$; t.

36. $\frac{x-a}{b-x}=\frac{x-b}{a-x}$; x.

37. $r=\frac{2ml}{B(n+1)}$; n.

38. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$; q.

39. Densidad de presas En cierta área el número, y, de larvas de polillas consumidas por un solo escarabajo depredador en un periodo determinado, está dado por

$$y=\frac{1.4x}{1+0.09x},$$

en donde x es la *densidad de presas* (el número de larvas por unidad de área). ¿Qué densidad de larvas permitiría sobrevivir a un escarabajo, si éste necesita consumir 10 larvas en el periodo dado?

40. Horas de servicio Supóngase que la razón del número de horas que una tienda de video está abierta al número de clientes diarios es constante. Cuando la tienda está abierta 8 horas, el número de clientes es 92 menos que el número máximo de clientes. Cuando la tienda permanece abierta 10 horas, el número de clientes es 46 menos que el número máximo de clientes. Escriba una ecuación que describa esta situación y determine el número máximo de clientes diarios.

41. Tiempo de viaje El tiempo que le toma a un bote recorrer una distancia dada río arriba (en contra de la corriente), puede calcularse dividiendo la distancia entre la diferencia de la velocidad del bote y la velocidad de la corriente. Escriba una ecuación que calcule el tiempo t que le toma a un bote, que se mueve a una velocidad r en contra de una corriente c, recorrer una distancia d. Resuelva su ecuación para r.

42. Longitud de una rampa La diferencia entre la longitud de una rampa y la longitud horizontal que cubre es de 5 pies. El cuadrado de la distancia vertical que cubre la rampa es 45 pies cuadrados. Escriba una ecuación para la diferencia y resuélvala. ¿Cuál es la longitud de la rampa?

43. Horizonte de la radio El rango de trasmisión, en metros, de un trasmisor VHF de radio, es 4.1 veces la raíz cuadrada de la altura por encima del suelo de la antena, medida en metros. La antena A se coloca 8.25 m más arriba que la antena B y puede trasmitir 6.15 km más lejos. ¿Qué tan arriba del suelo están colocadas las antenas A y B?

44. Derrape de un automóvil La policía ha usado la fórmula $s=\sqrt{30fd}$ para estimar la velocidad s (en millas por hora) de un automóvil, si éste derrapó un tramo de d pies cuando se detuvo. La literal f es el coeficiente de fricción, determinado por la clase de camino (como concreto, asfalto, grava o alquitrán) y si está húmedo o seco. Algunos valores de f se dan en la tabla 1.1. ¿A 40 millas por hora, aproximadamente cuántos pies derrapá un automóvil en un camino de concreto seco? Dé la respuesta al pie más cercano.

TABLA 1.1

	Concreto	Alquitrán
Húmedo	0.4	0.5
Seco	0.8	1.0

OBJETIVO Resolver ecuaciones cuadráticas por medio de factorización o con la fórmula cuadrática.

1.3 Ecuaciones cuadráticas

Para aprender cómo resolver problemas más complejos, pasemos a los métodos de solución de *ecuaciones cuadráticas*.

Definición

Una ***ecuación cuadrática*** en la variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax^2+bx+c=0, \quad (1)$$

donde a, b y c son constantes y $a\neq 0$.

Una ecuación cuadrática también se conoce como *ecuación de segundo grado* o *ecuación de grado dos,* ya que la potencia más grande que aparece en ella es la segunda. Mientras que una ecuación lineal sólo tiene una raíz, una ecuación cuadrática puede tener dos raíces diferentes.

Solución por factorización

Un método útil para resolver ecuaciones cuadráticas se basa en la factorización, como lo muestran los ejemplos siguientes.

■ *Principios en práctica 1*
Resolución de una ecuación cuadrática por factorización

Un número elevado al cuadrado es 30 veces más que el número. ¿Cuál es el número?

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización

a. *Resolver* $x^2 + x - 12 = 0$.

Solución: el lado izquierdo se factoriza con facilidad:

$$(x - 3)(x + 4) = 0.$$

Piense en esto como dos cantidades, $x - 3$ y $x + 4$, cuyo producto es cero. **Siempre que el producto de dos o más números sea *cero*, entonces, al menos uno de los números *debe* ser cero.** Esto significa que

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 4 = 0.$$

Resolviendo éstas tenemos $x = 3$ y $x = -4$. Por tanto, la raíces de la ecuación original son 3 y –4, y el conjunto solución es $\{3, -4\}$.

b. *Resolver* $6w^2 = 5w$.

No divida ambos miembros entre w (una variable), ya que esto no garantiza la equivalencia y podríamos "perder" una raíz.

Solución: escribimos la ecuación como

$$6w^2 - 5w = 0,$$

de modo que un miembro sea 0. Factorizando nos da

$$w(6w - 5) = 0.$$

Haciendo cada factor igual a cero, tenemos

$$w = 0 \quad \text{o} \quad 6w - 5 = 0.$$
$$6w = 5.$$

Por tanto, las raíces son $w = 0$ y $w = \frac{5}{6}$. Observe que si hubiésemos dividido ambos miembros de $6w^2 = 5w$ *entre* w y obtenido $6w = 5$, nuestra única solución sería $w = \frac{5}{6}$. Esto es, se habría perdido la raíz $w = 0$. Esto confirma nuestro estudio de la operación 5 en la sección 1.1.

■ *Principios en práctica 2*
Resolución de una ecuación cuadrática por factorización

El área de un mural rectangular, que tiene un ancho de 10 pies menos que su largo, es de 3000 pies cuadrados. ¿Cuáles son las dimensiones del mural?

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación cuadrática por factorización

Resolver $(3x - 4)(x + 1) = -2$.



Advertencia Usted debe abordar un problema como éste con cuidado. Si el producto de dos cantidades es igual a -2, no es verdadero que al menos una de las dos cantidades debe ser -2. ¿Por qué? **No** debe tomar cada factor igual a -2; al hacerlo así no obtendrá soluciones de la ecuación dada.

Solución: primero multiplicamos los factores del miembro izquierdo:

$$3x^2 - x - 4 = -2.$$

Al reescribirla de modo que 0 aparezca en un miembro, tenemos

$$3x^2 - x - 2 = 0,$$
$$(3x + 2)(x - 1) = 0,$$
$$x = -\frac{2}{3}, 1.$$

Algunas ecuaciones que no son cuadráticas pueden resolverse por factorización, como lo muestra el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Resolución de ecuaciones de grado superior por factorización

a. *Resolver* $4x - 4x^3 = 0$.

Solución: ésta es una *ecuación de tercer grado*. Procedemos a resolverla como sigue:

$$4x - 4x^3 = 0,$$
$$4x(1 - x^2) = 0 \quad \text{(factorizando),}$$
$$4x(1 - x)(1 + x) = 0 \quad \text{(factorizando).}$$

No deje de tomar en cuenta que el factor x da lugar a una raíz.

Al hacer cada uno de los factores igual a cero, obtenemos $4 = 0$ (lo cual es imposible), $x = 0$, $1 - x = 0$, o bien $1 + x = 0$. Así,

$$x = 0, 1, -1,$$

que podemos escribir como $x = 0, \ \pm 1$.

b. *Resolver* $x(x + 2)^2(x + 5) + x(x + 2)^3 = 0$.

Solución: factorizando $x(x + 2)^2$ en ambos términos del miembro izquierdo, tenemos

$$x(x + 2)^2[(x + 5) + (x + 2)] = 0,$$
$$x(x + 2)^2(2x + 7) = 0.$$

De aquí que, $x = 0$, $x + 2 = 0$, o bien $2x + 7 = 0$, de lo cual concluimos que $x = 0, -2, -\frac{7}{2}$.

Principios en práctica 3

Resolución de una ecuación de grado más alto por factorización

Un prisma rectangular, con base cuadrada y altura que es 5 veces más larga que su ancho, tiene un volumen que es igual a 5 veces su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del prisma rectangular?

EJEMPLO 4 Una ecuación fraccionaria que se reduce a una ecuación cuadrática

Resolver

$$\frac{y + 1}{y + 3} + \frac{y + 5}{y - 2} = \frac{7(2y + 1)}{y^2 + y - 6}. \quad (2)$$

Solución: multiplicando ambos lados por el MCD, $(y + 3)(y - 2)$, obtenemos

$$(y - 2)(y + 1) + (y + 3)(y + 5) = 7(2y + 1). \quad (3)$$

Ya que la ecuación (2) se multiplicó por una expresión que incluye a la variable y, recuerde (de la sección 1.1) que la ecuación (3) no es necesariamente equivalente a la (2). Después de simplificar la ecuación (3) tenemos

$$2y^2 - 7y + 6 = 0 \qquad \text{(ecuación cuadrática),}$$
$$(2y - 3)(y - 2) = 0 \qquad \text{(factorizando).}$$

Por tanto, $\frac{3}{2}$ y 2 son *posibles* raíces de la ecuación dada. Pero 2 no puede ser raíz de la ecuación (2) ya que la sustitución conduce a un denominador de 0. Sin embargo, debemos verificar que $\frac{3}{2}$ en verdad satisface la ecuación *original* para concluir así que es la raíz.

No concluya de manera precipitada que la solución de $x^2 = 3$ sólo consiste en $x = \sqrt{3}$.

Principios en práctica 4

Solución por medio de factorización

Si usted ganó $225 por la venta de x artículos a x dólares cada uno, ¿cuántos artículos vendió y a qué precio vendió cada uno de ellos?

EJEMPLO 5 Solución por factorización

Resolver $x^2 = 3$.

Solución:

$$x^2 = 3,$$
$$x^2 - 3 = 0.$$

Factorizando, obtenemos

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0.$$

Por tanto, $x - \sqrt{3} = 0$ o bien $x + \sqrt{3} = 0$, de modo que $x = \pm\sqrt{3}$.

Una forma más general de la ecuación $x^2 = 3$, es $u^2 = k$. Como antes, podemos mostrar lo siguiente

Si $u^2 = k$, entonces $u = \pm\sqrt{k}$. **(4)**

Fórmula cuadrática

Resolver ecuaciones cuadráticas por factorización puede ser muy difícil, como es evidente al tratar ese método en la ecuación $0.7x^2 - \sqrt{2}x - 8\sqrt{5} = 0$. Sin embargo, existe una fórmula llamada *fórmula cuadrática*[5] que da las raíces de cualquier ecuación cuadrática

Fórmula cuadrática

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, en donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$, están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$



Advertencia Asegúrese de utilizar la fórmula cuadrática correctamente.

$$x \neq -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

[5]Una deducción de la fórmula cuadrática aparece en la sección 1.4.

Principios en práctica 5

Una ecuación cuadrática con dos raíces reales

Supóngase que la altura h, en pies, de fuegos artificiales lanzados directamente hacia arriba desde el nivel del suelo, está dada por $h = 160t - 16t^2$, en donde t está en segundos. ¿En cuánto tiempo los fuegos artificiales estarán a 300 pies del suelo?

EJEMPLO 6 Una ecuación cuadrática con dos raíces reales

Resolver $4x^2 - 17x + 15 = 0$ *mediante la fórmula cuadrática.*

Solución: aquí $a = 4$, $b = -17$ y $c = 15$. Por tanto,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(4)(15)}}{2(4)}$$

$$= \frac{17 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{17 \pm 7}{8}.$$

Las raíces son $\frac{17+7}{8} = \frac{24}{8} = 3$ y $\frac{17-7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

Principios en práctica 6

Una ecuación cuadrática con una raíz real

Supóngase que el ingreso semanal r de una compañía está dado por la ecuación $r = -2p^2 + 400p$, en donde p es el precio del producto que vende la compañía. ¿Cuál es el precio del producto si el ingreso semanal es de $20,000?

EJEMPLO 7 Una ecuación cuadrática con una raíz real

Resolver $2 + 6\sqrt{2}y + 9y^2 = 0$ *por medio de la fórmula cuadrática.*

Solución: vea el acomodo de los términos. Aquí $a = 9$, $b = 6\sqrt{2}$, y $c = 2$. Por lo que,

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2(9)}.$$

Así,

$$y = \frac{-6\sqrt{2} + 0}{18} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \text{o} \qquad y = \frac{-6\sqrt{2} - 0}{18} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Por tanto, la única raíz es $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Principios en práctica 7

Una ecuación cuadrática sin raíces reales

Supóngase que la altura h, en pies, de fuegos artificiales lanzados directamente hacia arriba, desde el nivel del piso, está dada por $h = 160t - 16t^2$, en donde t está en segundos. ¿Cuándo estarán los fuegos artificiales a 500 pies del piso?

EJEMPLO 8 Una ecuación cuadrática sin raíces reales

Resolver por medio de la fórmula cuadrática $z^2 + z + 1 = 0$.

Solución: aquí $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$. Las raíces son

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Ahora $\sqrt{-3}$ denota un número cuyo cuadrado es -3. Sin embargo, no existe tal número real, ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo. Entonces la ecuación no tiene raíces reales.[6]

[6] $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ puede expresarse como $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, en donde $i = \sqrt{-1}$ se denomina *unidad imaginaria*.

Esto describe la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática.

De los ejemplos 6 al 8 puede verse que una ecuación cuadrática tiene dos raíces reales y diferentes, una raíz real, o bien no tiene raíces reales, dependiendo de que $b^2 - 4ac > 0$, $= 0$ o < 0, respectivamente.

Tecnología

```
PROGRAM:QUADROOT
:Prompt A,B,C
:If B²-4AC<0
:Then
:Disp "NOREALROO
T"
:Stop
:End
```

```
PROGRAM:QUADROOT
:Disp (-B+√(B²-4
AC))/(2A)
:Disp (-B-√(B²-4
AC))/(2A)
```

FIGURA 1.2 Programa para encontrar las raíces reales de $Ax^2 + Bx + C = 0$.

Mediante la característica de programación de una calculadora gráfica, puede crearse un programa que proporcione las raíces reales de la ecuación cuadrática $Ax^2 + Bx + C = 0$. La figura 1.2 muestra un programa para la calculadora gráfica TI-83. A fin de ejecutarlo para

$$20x^2 - 33x + 10 = 0,$$

se le pide que introduzca los valores de A, B y C (véase la fig. 1.3). Las raíces resultantes son $x = 1.25$ y $x = 0.4$.

```
prgmQUADROOT
A=?20
B=?-33
C=?10
                1.25
                  .4
                Done
```

FIGURA 1.3 Raíces de $20x^2 - 33x + 10 = 0$.

Formas cuadráticas

Algunas veces una ecuación que no es cuadrática puede transformarse en cuadrática por medio de una sustitución adecuada. En este caso se dice que la ecuación dada tiene **forma cuadrática.** El ejemplo siguiente lo ilustrará.

EJEMPLO 9 Resolución de una ecuación que tiene forma cuadrática

Resolver $\dfrac{1}{x^6} + \dfrac{9}{x^3} + 8 = 0.$

Solución: esta ecuación puede escribirse como

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{x^3}\right) + 8 = 0.$$

de modo que es cuadrática en $1/x^3$, por lo que tiene forma cuadrática. Al sustituir la variable w por $1/x^3$ obtenemos una ecuación cuadrática en la variable w, la cual podemos resolver:

$$w^2 + 9w + 8 = 0,$$
$$(w + 8)(w + 1) = 0,$$
$$w = -8 \quad \text{o} \quad w = -1.$$

No suponga que -8 y -1 son soluciones de la ecuación *original*.

Regresando a la variable x, tenemos

$$\frac{1}{x^3} = -8 \quad \text{o} \quad \frac{1}{x^3} = -1.$$

Así,

$$x^3 = -\frac{1}{8} \quad \text{o} \quad x^3 = -1.$$

de lo cual se concluye que

$$x = -\frac{1}{2}, -1.$$

Al verificar, encontramos que estos valores de x satisfacen la ecuación original.

Ejercicio 1.3

En los problemas del 1 al 30 resuelva por factorización.

1. $x^2 - 4x + 4 = 0.$

2. $t^2 + 3t + 2 = 0.$

3. $y^2 - 7y + 12 = 0.$

4. $x^2 + x - 12 = 0.$

5. $x^2 - 2x - 3 = 0.$

6. $x^2 - 16 = 0.$

7. $u^2 - 13u = -36.$

8. $3w^2 - 12w + 12 = 0.$

9. $x^2 - 4 = 0.$

10. $2x^2 + 4x = 0.$

11. $z^2 - 8z = 0.$

12. $x^2 + 9x = -14.$

13. $4x^2 + 1 = 4x.$

14. $2z^2 + 9z = 5.$

15. $y(2y + 3) = 5.$

16. $8 + 2x - 3x^2 = 0.$

17. $-x^2 + 3x + 10 = 0.$

18. $\frac{1}{7}y^2 = \frac{3}{7}y.$

19. $2p^2 = 3p.$

20. $-r^2 - r + 12 = 0.$

21. $x(x + 4)(x - 1) = 0.$

22. $(x - 2)^2(x + 1)^2 = 0.$

23. $x^3 - 64x = 0.$

24. $x^3 - 4x^2 - 5x = 0.$

25. $6x^3 + 5x^2 - 4x = 0.$

26. $(x + 1)^2 - 5x + 1 = 0.$

27. $(x + 3)(x^2 - x - 2) = 0.$

28. $3(x^2 + 3x - 10)(x - 8) = 0.$

29. $p(p - 3)^2 - 4(p - 3)^3 = 0.$

30. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$

En los problemas del 31 al 44 encuentre todas las raíces reales usando la fórmula cuadrática.

31. $x^2 + 2x - 24 = 0.$

32. $x^2 - 2x - 15 = 0.$

33. $4x^2 - 12x + 9 = 0.$

34. $p^2 + 2p = 0.$

35. $p^2 - 7p + 3 = 0.$

36. $2 - 2x + x^2 = 0.$

37. $4 - 2n + n^2 = 0.$

38. $2x^2 + x = 5.$

39. $6x^2 + 7x - 5 = 0.$

40. $w^2 - 2\sqrt{2}w + 2 = 0.$

41. $0.02w^2 - 0.3w = 20.$

42. $0.01x^2 + 0.2x - 0.6 = 0.$

43. $2x^2 + 4x = 5.$

44. $-2x^2 - 6x + 5 = 0.$

En los problemas del 45 al 54 resuelva la ecuación dada que tiene forma cuadrática.

45. $x^4 - 5x^2 + 6 = 0.$

46. $x^4 - 3x^2 - 10 = 0.$

47. $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 2 = 0.$

48. $x^{-2} + x^{-1} - 12 = 0.$

49. $x^{-4} - 9x^{-2} + 20 = 0.$

50. $\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{9}{x^2} + 8 = 0.$

51. $(x - 3)^2 + 9(x - 3) + 14 = 0.$

52. $(x + 5)^2 - 8(x + 5) = 0.$

53. $\dfrac{1}{(x - 2)^2} - \dfrac{12}{x - 2} + 35 = 0.$

54. $\dfrac{2}{(x + 4)^2} + \dfrac{7}{x + 4} + 3 = 0.$

En los problemas del 55 al 76 resuelva por cualquier método.

55. $x^2 = \dfrac{x + 3}{2}.$

56. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{7}{x} - \dfrac{5}{2}.$

57. $\dfrac{3}{x - 4} + \dfrac{x - 3}{x} = 2.$

58. $\dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{6}{2x + 1} = 5.$

59. $\dfrac{6x + 7}{2x + 1} - \dfrac{6x + 1}{2x} = 1.$

60. $\dfrac{6(w + 1)}{2 - w} + \dfrac{w}{w - 1} = 3.$

61. $\dfrac{2}{r - 2} - \dfrac{r + 1}{r + 4} = 0.$

62. $\dfrac{2x - 3}{2x + 5} + \dfrac{2x}{3x + 1} = 1.$

63. $\dfrac{y + 1}{y + 3} + \dfrac{y + 5}{y - 2} = \dfrac{14y + 7}{y^2 + y - 6}.$

64. $\dfrac{3}{t + 1} + \dfrac{4}{t} = \dfrac{12}{t + 2}.$

65. $\dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x(x - 1)} = \dfrac{2}{x^2}.$

66. $5 - \dfrac{3(x + 3)}{x^2 + 3x} = \dfrac{1 - x}{x}.$

67. $\sqrt{2x - 3} = x - 3.$

68. $3\sqrt{x + 4} = x - 6.$

69. $q + 2 = 2\sqrt{4q - 7}.$

70. $x + \sqrt{4x} - 3 = 0.$

71. $\sqrt{x + 7} - \sqrt{2x} - 1 = 0.$

72. $\sqrt{x} - \sqrt{2x - 8} - 2 = 0.$

73. $\sqrt{x} - \sqrt{2x + 1} + 1 = 0.$

74. $\sqrt{y - 2} + 2 = \sqrt{2y + 3}.$

75. $\sqrt{x + 5} + 1 = 2\sqrt{x}.$

76. $\sqrt{\sqrt{x} + 2} = \sqrt{2x - 4}.$

En los problemas 77 y 78 encuentre las raíces, redondeadas a dos decimales.

77. $0.04x^2 - 2.7x + 8.6 = 0.$

78. $0.01x^2 + 0.2x - 0.6 = 0.$

---

79. Geometría El área de una pintura rectangular, con ancho 2 pulgadas menor que el largo, es de 48 pulgadas cuadradas. ¿Cuáles son las dimensiones de la pintura?

80. Temperatura La temperatura se ha elevado X grados por día durante X días. Hace X días fue de 15 grados. Hoy es de 51 grados. ¿Cuánto se ha elevado la temperatura por día? ¿Durante cuántos días se ha estado elevando?

81. Economía Una raíz de la ecuación económica

$$\overline{M} = \frac{Q(Q + 10)}{44}$$

es $-5 + \sqrt{25 + 44\overline{M}}$. Verifique esto utilizando la fórmula cuadrática para despejar Q en términos de $\overline{M}$. Aquí Q es el ingreso real y $\overline{M}$ es el nivel de oferta de dinero.

82. Dieta para ratas Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales en ratas alimentadas con una dieta que contenía 10% de proteínas.[7] La proteína estaba compuesta de levadura y harina de maíz. Al cambiar el porcentaje P (expresado como un decimal) de levadura en la mezcla de la proteína, el grupo estimó que el promedio de aumento de peso g (en gramos) en una rata durante cierto periodo estaba dado por

$$g = -200P^2 + 200P + 20.$$

¿Cuál es el porcentaje de levadura que da un aumento promedio de peso de 70 gramos?

[7]Adaptado de R. Bressani, "The use of Yeast in Human Foods", en R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (editores), *Single-Cell Protein* (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

83. Dosis de droga Existen varias reglas para determinar las dosis de las medicinas para niños una vez especificadas las de los adultos. Tales reglas pueden tener como base el peso, la altura, etc. Si A es la edad del niño, d es la dosis para adulto y c la dosis para niño, a continuación se presentan dos reglas.



Regla de Young: $c = \dfrac{A}{A + 12}d.$

Regla de Cowling: $c = \dfrac{A + 1}{24}d.$

¿A qué edad las dosis para niños son las mismas usando estas reglas? Redondee al año más cercano.

84. Precio de envío de un bien En un estudio acerca del precio de envío de un bien desde una fábrica a un cliente, DeCaino[8] plantea y resuelve las dos ecuaciones cuadráticas siguientes

$$(2n - 1)v^2 - 2nv + 1 = 0,$$

y

$$nv^2 - (2n + 1)v + 1 = 0,$$

donde $n \geq 1$.

a. Resuelva la primera ecuación para v.
b. Resuelva la segunda ecuación para v si $v < 1$.

85. Óptica Un objeto está a 120 cm de una pared. Para enfocar la imagen del objeto sobre la pared, se utiliza una lente convergente con longitud focal de 24 cm. La lente se coloca entre el objeto y la pared, a una distancia de p centímetros del objeto, donde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{120 - p} = \frac{1}{24}.$$

Determine p, redondeada a un decimal.

86. Física Un termómetro con resistencias de platino, de ciertas especificaciones, opera de acuerdo con la ecuación

$$R = 10{,}000 + (4.124 \times 10^{-2})T - (1.779 \times 10^{-5})T^2,$$

donde R es la resistencia (en ohms) del termómetro a la temperatura T (en grados Celsius). Si $R = 13.946$, determine el valor correspondiente de T. Redondee su respuesta al grado Celsius más cercano. Suponga que tal termómetro sólo se utiliza si $T < 600°$C.

87. Movimiento Suponga que la altura h de un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba desde el piso está dada por

$$h = 44.1t - 4.9t^2,$$

donde h está en metros y t es el tiempo transcurrido en segundos.

a. ¿Después de cuántos segundos el objeto golpea el piso?
b. ¿Cuándo se encuentra a una altura de 88.2 m?

En los problemas del 88 al 93 utilice un programa para determinar las raíces reales de la ecuación. Redondee las respuestas a tres decimales. Para los problemas 88 y 89, confirme sus resultados de manera algebraica.

88. $2x^2 - 3x - 27 = 0.$

89. $8x^2 - 18x + 9 = 0.$

90. $15x^2 + 7x - 3 = 0.$

91. $27x^2 - \frac{11}{8}x + 5 = 0.$

92. $\frac{9}{2}z^2 - 6.3 = \frac{z}{3}(1.1 - 7z).$

93. $(\pi t - 4)^2 = 4.1t - 3.$

1.4 DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA CUADRÁTICA

A continuación se presenta una deducción de la fórmula cuadrática. Suponga que $ax^2 + bx + c = 0$ es una ecuación cuadrática. Ya que $a \neq 0$, podemos dividir ambos miembros entre a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Si sumamos a ambos lados $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, entonces el miembro izquierdo se factoriza como el cuadrado de un binomio:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a},$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Esta ecuación tiene la forma $u^2 = k$, así, de la ecuación (4) en la sección 1.3,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

[8]S. J. DeCanio, "Delivered Pricing and Multiple Basing Point Equilibria: A Revolution", *Quarterly Journal of Economics,* XCIX, núm. 2 (1984), 329-349.

Resolviendo para x se obtiene

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

En resumen, las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por la **fórmula cuadrática:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

1.5 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 1.1 ecuación lado (miembro) de una ecuación variable raíz de una ecuación conjunto solución ecuaciones equivalentes ecuación lineal (primer grado) ecuación con literales constante arbitraria

Sección 1.2 ecuación fraccionaria conjunto vacío, ∅ solución extraña ecuación radical

Sección 1.3 ecuación cuadrática (segundo grado) fórmula cuadrática

Resumen

Cuando resolvemos una ecuación podemos aplicar ciertas reglas para obtener ecuaciones equivalentes, esto es, ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones que la ecuación dada originalmente. Estas reglas incluyen la suma (o resta) del mismo polinomio en (de) ambos miembros, así como la multiplicación (o división) de ambos miembros por (entre) la misma constante, excepto por (entre) cero.

Una ecuación lineal (en x) es de primer grado y tiene la forma $ax + b = 0$, donde $a \neq 0$. Toda ecuación lineal tiene exactamente una raíz. Para resolver una ecuación lineal hay que aplicarle operaciones matemáticas hasta obtener una ecuación equivalente en la que la incógnita queda aislada en un lado de la ecuación.

Una ecuación cuadrática (en x) es de segundo grado y tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$. Tiene dos raíces reales y diferentes, exactamente una raíz real, o bien no tiene raíces. Una ecuación cuadrática puede resolverse por factorización o por medio de la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cuando se resuelve una ecuación fraccionaria o radical, con frecuencia se aplican operaciones que no garantizan que la ecuación resultante sea equivalente a la original. Estas operaciones incluyen la multiplicación de ambos miembros por una expresión que contenga a la variable, y elevar ambos miembros a la misma potencia. En estos casos, todas las soluciones obtenidas al final de tales procedimientos deben verificarse sustituyéndolas en la ecuación original. De esta manera se pueden encontrar las llamadas soluciones extrañas.

Problemas de repaso

Los problemas que tienen números a color se presentan así como sugerencia para formar parte de una evaluación de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 44 resuelva las ecuaciones.

1. $4 - 3x = 2 + 5x$.

2. $\frac{5}{7}x - \frac{2}{3}x = \frac{3}{21}x$.

3. $3[2 - 4(1 + x)] = 5 - 3(3 - x)$.

4. $3(x + 4)^2 + 6x = 3x^2 + 7$.

5. $2 - w = 3 + w$.

6. $x = 2x$.

7. $x = 3x - (17 + 2x)$.

8. $3x - 8 = 4(x - 2)$.

9. $2(4 - \frac{3}{5}p) = 5$.

10. $\frac{5}{7}x - \frac{2}{3}x = \frac{3}{21}$.

11. $\dfrac{3x - 1}{x + 4} = 0$.

12. $\dfrac{5}{p + 3} - \dfrac{2}{p + 3} = 0$.

13. $\dfrac{2x}{x-3} - \dfrac{x+1}{x+2} = 1.$

14. $\dfrac{t+3t+4}{7-t} = 12.$

15. $3x^2 + 2x - 5 = 0.$

16. $x^2 - 2x - 2 = 0.$

17. $5q^2 = 7q.$

18. $2x^2 - x = 0.$

19. $x^2 - 10x + 25 = 0.$

20. $r^2 + 10r - 25 = 0.$

21. $3x^2 - 7 = 1.$

22. $x(x-9) = 0.$

23. $(8t-5)(2t+6) = 0.$

24. $2(x^2-1) + 2x = x^2 - 6x + 1.$

25. $-3x^2 + 5x - 1 = 0.$

26. $y^2 = 6.$

27. $x^2(x^2-9) = 4(x^2-9).$

28. $4x^2(x-5) - 9(x-5) = 0.$

29. $\dfrac{6w+7}{2w+1} - \dfrac{6w+1}{2w} = 1.$

30. $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{4}{x} - \dfrac{12}{x+2} = 0.$

31. $\dfrac{2}{x^2-9} - \dfrac{3x}{x+3} = \dfrac{1}{x-3}.$

32. $\dfrac{3}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2+4x+4} - \dfrac{4}{x+2} = 0.$

33. $\sqrt{2x+7} = 5.$

34. $\sqrt{3x-4} = \sqrt{2x+5}.$

35. $\sqrt[3]{11x+9} = 4.$

36. $\sqrt{x^2+5x+25} = x+4.$

37. $\sqrt{y} + 6 = 5.$

38. $\sqrt{z^2+9} = 5.$

39. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} = 7.$

40. $\sqrt{6x-29} = x-4.$

41. $x + 2 = 2\sqrt{4x-7}.$

42. $\sqrt{3z} - \sqrt{5z+1} + 1 = 0.$

43. $y^{2/3} + y^{1/3} - 2 = 0.$

44. $2y^{-2/3} - 5y^{-1/3} - 3 = 0.$

En los problemas del 45 al 52 resuelva la ecuación para la letra indicada.

45. $E = 4\pi k\dfrac{Q}{A};\ Q.$

46. $E_1 = i_2R_1 + i_3R_1 + i_2R_2;\ R_2.$

47. $n - 1 = C + \dfrac{C'}{\lambda^2};\ C'.$

48. $\sigma = \dfrac{n_0 - n_e}{\lambda}L;\ n_0.$

49. $T^2 = 4\pi^2\left(\dfrac{L}{g}\right);\ T.$

50. $s = \dfrac{1}{2}at^2;\ t.$

51. $mgh = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}I\omega^2;\ \omega.$

52. $P = \dfrac{E^2}{R+r} - \dfrac{E^2r}{(R+r)^2};\ E.$

---

53. **Electricidad** En estudios de redes eléctricas, aparece la ecuación siguiente:

$$S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC} = 0.$$

Demuestre que

$$S = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

54. **Electricidad** En un circuito eléctrico, se dice que hay resonancia cuando

$$2\pi f_r L = \frac{1}{2\pi f_r C},$$

donde f_r es una frecuencia de resonancia, L la inductancia y C la capacitancia. Resuelva para f_r *si* $f_r > 0$.

En los problemas 55 y 56 utilice una calculadora gráfica para determinar cuáles, si los hay, de los números dados son raíces de la ecuación dada.

55. $12x^3 + 61x = 83x^2 - 30;\ 4, 6, \frac{5}{4}.$

56. $\sqrt{t^2+4} = t + 1;\ \frac{2}{3}, \frac{14}{3}, \frac{3}{2}.$

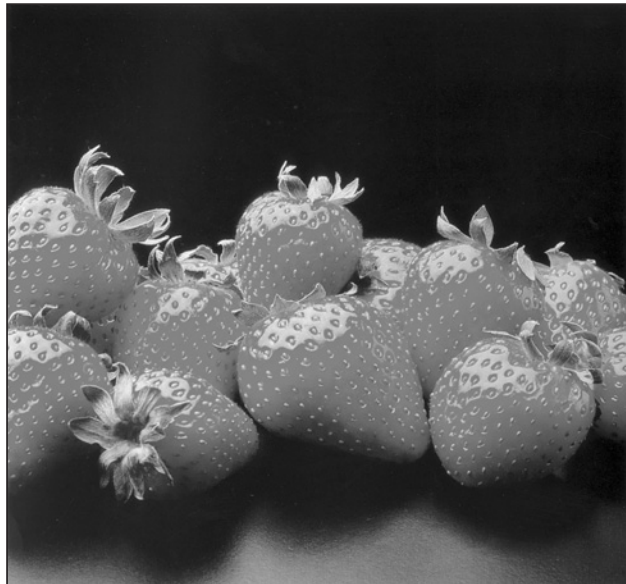
En los problemas 57 y 58 utilice un programa para determinar las raíces reales de la ecuación. Redondee sus respuestas a tres decimales.

57. $5.6 - 7.2x - 19.3x^2 = 0.$

58. $(9x-3)^2 - \dfrac{7}{6}(x-2) = 18.$

Aplicación práctica

Crecimiento real de una inversión[9]



Cuando hablamos de crecimiento real de una inversión, nos estamos refiriendo al crecimiento en su poder de compra, esto es, al aumento en la cantidad de bienes que la inversión puede comprar. El crecimiento real depende de la influencia tanto del interés como de la inflación. El interés eleva el valor de la inversión, mientras que la inflación baja su crecimiento por el incremento en los precios, de ahí que disminuya su poder de compra. Por lo general, la tasa de crecimiento real no es igual a la diferencia entre la tasa de interés y la de la inflación, sino que se describe por una fórmula diferente conocida como "efecto de Fisher".

Puede entender el efecto de Fisher considerando cuidadosamente la siguiente pregunta. Durante el año 1998, la tasa anual de interés fue de 8.35% y la tasa anual de inflación de 1.6% (*fuente*: Oficina de Censos de Estados Unidos. Resumen estadístico de 1999 de Estados Unidos, `www.census.gov/statab/www/freq.html`). Bajo estas circunstancias, ¿cuál fue la tasa anual real de crecimiento de una inversión? Podría pensar que la respuesta se obtiene simplemente restando los porcentajes: 8.35% − 1.6% = 6.75%. Sin embargo, 6.75% no es la respuesta correcta.

Suponga que se analiza la situación en términos más específicos. Considere fresas que se venden a $1.00 por libra, y suponga que a causa de la inflación, este precio aumenta a una tasa de 1.6% en un año. De junio de 1998 a junio de 1999, el precio por libra se elevó de $1.00 a

$$\$1.00 + (1.6\% \text{ de } \$1.00) = \$1.016.$$

Por otra parte, considere 100 dólares invertidos en junio de 1998 a una tasa de interés anual de 8.35%. En junio de 1999 el interés ganado es de $100(0.0835), de modo que la cantidad acumulada es

$$\$100 + \$100(0.0835) = \$108.35.$$

Ahora, compare el poder de compra de 100 dólares en junio de 1998 con el de $108.35 en junio de 1999. En 1998, los 100 dólares compraban 100 libras de fresas a $1.00 por libra. En 1999 las fresas estaban a $1.016 por libra, de modo que la cantidad acumulada de $108.35 compró $108.35/1.016 \approx 106.64$ libras de fresas (el símbolo $\approx$ significa *aproximadamente igual a*).

¿Qué cambio ocurrió en el poder de compra de la inversión? Se incrementó de 100 a 106.64 libras, un incremento de 6.64%. Esto es,

$$\frac{\text{cantidad nueva} - \text{cantidad inicial}}{\text{cantidad inicial}} = \frac{106.64 - 100}{100}$$

$$= 0.0664 = 6.64\%.$$

Así, 6.64% es el crecimiento real, que es menor a la diferencia del 8.35% − 1.6% = 6.75%. Realmente esta diferencia no tiene significado, ya que los tres porcentajes se refieren a tres cantidades diferentes: (a) interés (una fracción de la inversión −8.35% de $100), (b) inflación (una fracción del precio por unidad de los bienes −1.6% de $1.00) y (c) la tasa de crecimiento real (un porcentaje del poder de compra −6.64% de la cantidad inicial de fresas).

Para deducir una fórmula de la tasa de crecimiento real, g, sean y la tasa anual de interés (el rendimiento) e i la tasa anual de inflación. En un año, una inversión de P dólares (el capital o principal) gana un interés de $y \cdot P$ dólares, de modo que produce una cantidad acumulada en (dólares) de

$$P + y \cdot P = P(1 + y) \quad \text{(factorizando).}$$

En un año el precio de los bienes, digamos p dólares por unidad, aumenta $i \cdot p$ dólares a un nuevo precio de

$$p + i \cdot p = p(1 + i)$$

dólares por unidad. El poder de compra inicial representa la cantidad inicial de bienes:

$$\text{cantidad inicial} = \frac{\text{cantidad}}{\text{precio inicial}} = \frac{P}{p}.$$

[9]Adaptado de Yves Nievergelt, "Fisher's Effect: Real Growth Is Not Interest Less Inflation", *Mathematics Teacher*, 81 (octubre de 1988), 546-547. Con permiso de National Council of Teachers of Mathematics.

Un año después, la nueva cantidad de bienes que la cantidad acumulada de la inversión compraría al nuevo precio está dada por

$$\text{nueva cantidad} = \frac{\text{nuevo saldo}}{\text{nuevo precio}} = \frac{P(1+y)}{p(1+i)}.$$

En consecuencia, la tasa de crecimiento, o cambio relativo, del poder de compra está dada por

$$g = \frac{\text{cantidad nueva} - \text{cantidad inicial}}{\text{cantidad inicial}}$$

$$= \frac{\dfrac{P(1+y)}{p(1+i)} - \dfrac{P}{p}}{\dfrac{P}{p}}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador por p/P se obtiene

$$g = \frac{1+y}{1+i} - 1$$

$$= \frac{(1+y)-(1+i)}{1+i} = \frac{y-i}{1+i}.$$

Así, la tasa real de crecimiento está dada por la ecuación con literales

$$g = \frac{y-i}{1+i}. \qquad (1)$$

La relación en la ecuación (1) es el efecto de Fisher.[10] Para ilustrar su uso, aplíquela al ejemplo anterior, en donde $y = 8.35\%$ e $i = 1.6\%$. La fórmula de Fisher da

$$g = \frac{0.0835 - 0.016}{1 + 0.016} \approx 0.0664 = 6.64\%.$$

Ejercicios

1. Durante 1994, la tasa promedio de interés promediaba 7.15% cuando la inflación estaba en 2.6%.
   - **a.** Calcule el monto acumulado de una inversión de \$100 después de un año a 7.15%.
   - **b.** Si una libra de chabacano seco costó \$10 en enero de 1994, ¿cuánto costó un año después?
   - **c.** Si una libra de chabacano seco costó \$10 en enero de 1994, ¿qué cantidad de chabacanos se compraron con \$100 en 1994?
   - **d.** Un año después, ¿qué cantidad de chabacanos se compraron con la cantidad acumulada [véase la parte (a)]?
   - **e.** Utilice los resultados de las partes (c) y (d) para calcular la tasa real de crecimiento por medio de la ecuación

     $$g = \frac{\text{cantidad nueva} - \text{cantidad inicial}}{\text{cantidad inicial}}.$$

   - **f.** Verifique su respuesta de la parte (e) por medio de la fórmula de Fisher.
2. Determine la tasa real de crecimiento, dadas una tasa de interés de 10% y una tasa de inflación de 5%.
3. Determine la tasa real de crecimiento, dadas una tasa de interés de 1% y una tasa de inflación de 3%. ¿Qué significa la respuesta? ¿Tiene sentido en vista de la información dada?

[10] Irving Fisher, "Appreciation and Interest", *Publications of the American Economic Association*, tercera serie, 11 (agosto de 1986), 331-442.



CAPÍTULO 2

Aplicaciones de ecuaciones y desigualdades

En este capítulo aplicaremos las ecuaciones a situaciones cotidianas. Después haremos lo mismo con las desigualdades, que son proposiciones en que una cantidad es mayor, menor, no mayor o no menor que otra cantidad.

Una aplicación de las desigualdades es la regulación de equipo deportivo. En un juego común de las ligas mayores, se utilizan algunas docenas de pelotas de béisbol y no sería lógico esperar que todas pesasen exactamente $5\frac{1}{8}$ onzas. Pero es razonable pedir que cada una pese no menos de 5 onzas ni más de $5\frac{1}{4}$ onzas, que es como se lee en las reglas oficiales (`www.majorleaguebaseball.com`).

Otra desigualdad se aplica para el caso de los veleros utilizados en las carreras de la Copa América, la cual se efectúa cada tres o cuatro años (la siguiente es en 2003). La International America's Cup Class (IACC) da la siguiente regla de definición para yates:

$$\frac{L + 1.25\sqrt{S} - 9.8\sqrt[3]{DSP}}{0.679} \leq 24.000 \text{ m.}$$

El símbolo "≤" significa que la expresión del lado izquierdo debe ser menor o igual a los 24 m del lado derecho. *L*, *S* y *DSP* también están especificadas por complicadas fórmulas, pero aproximadamente, *L* es la longitud, *S* es el área del velamen y *DSP* es el desplazamiento (el volumen del casco bajo la línea de flotación).

La fórmula IACC proporciona a los diseñadores de yates un poco de flexibilidad. Supóngase que un yate tiene $L = 20.2$ m, $S = 282$ m^3 y $DSP = 16.4$ m^3. Como la fórmula es una desigualdad, el diseñador podría reducir el área del velamen mientras deja sin cambios la longitud y el desplazamiento. Sin embargo, por lo común, los valores de *L, S* y *DSP* se utilizan para que hagan que la expresión de lado izquierdo quede tan cercana como sea posible a 24 m.

Además de analizar aplicaciones de ecuaciones y desigualdades lineales, en este capítulo se revisará el concepto de valor absoluto.

OBJETIVO Modelar situaciones que se describen por medio de ecuaciones lineales o cuadráticas.

2.1 APLICACIONES DE ECUACIONES

En la mayoría de los casos, para resolver problemas prácticos, las relaciones establecidas deben traducirse a símbolos matemáticos. Esto se conoce como *modelado.* Los ejemplos siguientes nos ilustran las técnicas y conceptos básicos. Examine cada uno de ellos con mucho cuidado antes de pasar a los ejercicios.

EJEMPLO 1 Mezcla

Un químico debe preparar 350 ml *de una solución compuesta por* 2 *partes de alcohol y* 3 *de ácido. ¿Cuánto debe utilizar de cada una?*

Solución: sea n el número de mililitros de cada parte. La figura 2.1 muestra la situación. A partir del diagrama tenemos

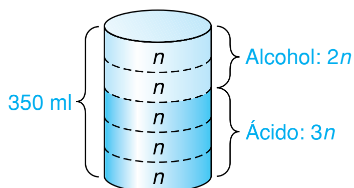


FIGURA 2.1 Solución química (ejemplo 1).

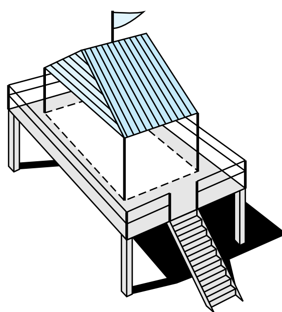
$$2n + 3n = 350,$$
$$5n = 350,$$
$$n = \frac{350}{5} = 70.$$

Observe que la solución de una ecuación no necesariamente es la solución del problema propuesto.

Pero $n = 70$ *no* es la respuesta al problema original. Cada *parte* tiene 70 ml. La cantidad de alcohol es $2n = 2(70) = 140$, y la cantidad de ácido es $3n = 3(70) = 210$. Así, el químico debe utilizar 140 ml de alcohol y 210 ml de ácido. Este ejemplo muestra cómo nos puede ser útil un diagrama para plantear un problema dado en palabras.

EJEMPLO 2 Plataforma de observación

Se construirá una plataforma rectangular de observación que dominará un valle [véase *la fig.* 2.2 (a)]. *Sus dimensiones serán de* 6 *por* 12 m. *Un cobertizo rectangular de* 40 m^2 *de área estará en el centro de la plataforma, y la parte no cubierta será un pasillo de anchura uniforme. ¿Cuál debe ser el ancho de este pasillo?*



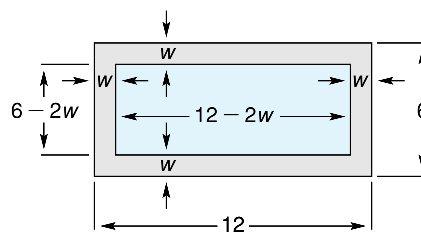


FIGURA 2.2 Pasillo en la plataforma de observación (ejemplo 2).

Solución: un diagrama de la plataforma se muestra en la figura 2.2(b). Sea w el ancho (en metros) del pasillo. Entonces, la parte destinada al cobertizo tiene dimensiones de $12 - 2w$ por $6 - 2w$, y como su área debe ser de 40 m^2, en donde área = (largo)(ancho), tenemos

$$(12 - 2w)(6 - 2w) = 40,$$
$$72 - 36w + 4w^2 = 40 \qquad \text{(multiplicando),}$$

$$4w^2 - 36w + 32 = 0,$$
$$w^2 - 9w + 8 = 0 \quad \text{(dividiendo ambos lados entre 4),}$$
$$(w - 8)(w - 1) = 0,$$
$$w = 8, 1.$$

Aunque 8 es una solución de la ecuación, *no* es una solución para nuestro problema, ya que una de las dimensiones de la plataforma es de sólo 6 m. Así, la única solución posible es que el pasillo mida 1 m de ancho.

Las palabras clave que aquí se introducen son *costo fijo, costo variable, costo total, ingreso total y utilidad.* Éste es el momento para que usted adquiera familiaridad con estos términos, ya que aparecen a lo largo de todo el libro.

En el ejemplo siguiente nos referimos a algunos términos de negocios relativos a una compañía manufacturera. **Costo fijo** (*o gastos generales*) es la suma de todos los costos que son independientes del nivel de producción, como renta, seguros, etc. Este costo debe pagarse independientemente de que se produzca o no. **Costo variable** es la suma de todos los costos dependientes del nivel de producción, como salarios y materiales. **Costo total** es la suma de los costos variable y fijo:

$$\text{costo total} = \text{costo variable} + \text{costo fijo.}$$

Ingreso total es el dinero que un fabricante recibe por la venta de su producto. Está dado por:

$$\text{ingreso total} = \text{(precio por unidad)(número de unidades vendidas).}$$

Utilidad (o ganancia) es el ingreso total menos el costo total:

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total.}$$

EJEMPLO 3 Utilidad

La compañía Anderson fabrica un producto para el cual el costo variable por unidad es de \$6 *y el costo fijo de* \$80,000. *Cada unidad tiene un precio de venta de* \$10. *Determine el número de unidades que deben venderse para obtener una utilidad de* \$60,000.

Solución: sea q el número de unidades que deben venderse (en muchos problemas de negocios, q representa la cantidad). Entonces, el costo variable (en dólares) es $6q$. Por tanto, el *costo total* será $6q + 80{,}000$. Y el ingreso total por la venta de q unidades es $10q$. Ya que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total,}$$

nuestro modelo para este problema es

$$60{,}000 = 10q - (6q + 80{,}000).$$

Resolviendo se obtiene

$$60{,}000 = 10q - 6q - 80{,}000,$$
$$140{,}000 = 4q,$$
$$35{,}000 = q.$$

Por tanto, se deben vender 35,000 unidades para obtener una ganancia de \$60,000.

EJEMPLO 4 Precios

Una fábrica produce ropa deportiva para dama y está planeando vender su nueva línea de conjuntos deportivos a detallistas. El costo para éstos será de \$33

por conjunto. Por conveniencia del detallista, la fábrica colocará una etiqueta con el precio en cada conjunto. ¿Qué cantidad debe ser marcada en las etiquetas de modo que el detallista pueda reducir este precio en un 20% *durante una liquidación y aún obtener una ganancia de* 15% *sobre el costo?*

Solución: aquí se usa la relación

Observe que *precio = costo + utilidad*

$$\text{precio de venta} = \text{costo por conjunto} + \text{utilidad por conjunto.}$$

Sea p el precio, en dólares, por conjunto en la etiqueta. Durante la liquidación el detallista realmente recibe $p - 0.2p$. Esto debe ser igual al costo, 33, más la utilidad, (0.15)(33). De aquí que

$$\begin{aligned} \text{precio de venta} &= \text{costo} + \text{utilidad} \\ p - 0.2p &= 33 + (0.15)(33), \\ 0.8p &= 37.95, \\ p &= 47.4375. \end{aligned}$$

Desde un punto de vista práctico, el fabricante debe marcar las etiquetas con un precio de \$47.44.

EJEMPLO 5 Inversión

Un total de \$10,000 *se invirtieron en dos empresas comerciales A y B. Al final del primer año, A y B tuvieron rendimientos de* 6 *y* $5\frac{3}{4}$%*, respectivamente, sobre las inversiones originales. ¿Cuál fue la cantidad original asignada a cada empresa, si la utilidad total fue de* \$588.75*?*

Solución: sea x la cantidad, en dólares, invertida al 6%. Entonces $10{,}000 - x$ se invirtieron al $5\frac{3}{4}$%. El interés ganado en A fue $(0.06)(x)$ y en B $(0.0575)(10{,}000 - x)$, que en total asciende a 588.75. De aquí que,

$$\begin{aligned} (0.06)x + (0.0575)(10{,}000 - x) &= 588.75, \\ 0.06x + 575 - 0.0575x &= 588.75, \\ 0.0025x &= 13.75, \\ x &= 5500. \end{aligned}$$

Así, \$5500 se invirtieron al 6%, y $\$10{,}000 - \$5500 = \$4500$ al $5\frac{3}{4}$%.

EJEMPLO 6 Redención de un bono

La mesa directiva de cierta compañía acuerda en redimir algunos de sus bonos en 2 *años. En ese tiempo, se requerirán* \$1,102,500*. Suponga que en este momento reservan* \$1,000,000*. ¿A qué tasa de interés anual, compuesto anualmente, se debe tener invertido este dinero a fin de que su valor futuro sea suficiente para redimir los bonos?*

Solución: sea r la tasa anual necesaria. Al final del primer año, la cantidad acumulada será \$1,000,000 más el interés $1{,}000{,}000r$ para un total de

$$1{,}000{,}000 + 1{,}000{,}000r = 1{,}000{,}000(1 + r).$$

Bajo interés compuesto, al final del segundo año la cantidad acumulada será de $1{,}000{,}000(1 + r)$ más el interés de esto, que es $1{,}000{,}000(1 + r)r$. Así, el valor total al final del segundo año será

$$1{,}000{,}000(1 + r) + 1{,}000{,}000\,(1 + r)r.$$

Esto debe ser igual a $1,102,500:

$$1{,}000{,}000(1 + r) + 1{,}000{,}000(1 + r)r = 1{,}102{,}500. \qquad (1)$$

Ya que $1{,}000{,}000(1 + r)$ es un factor común de ambos términos del miembro izquierdo, tenemos

$$1{,}000{,}000(1 + r)(1 + r) = 1{,}102{,}500,$$

$$1{,}000{,}000(1 + r)^2 = 1{,}102{,}500,$$

$$(1 + r)^2 = \frac{1{,}102{,}500}{1{,}000{,}000} = \frac{11{,}025}{10{,}000} = \frac{441}{400},$$

$$1 + r = \pm\sqrt{\frac{441}{400}} = \pm\frac{21}{20},$$

$$r = -1 \pm \frac{21}{20}.$$

Por tanto, $r = -1 + (21/20) = 0.05$ o $r = -1 - (21/20) = -2.05$. Aunque 0.05 y -2.05 son raíces de la ecuación (1), rechazamos -2.05, ya que necesitamos que r sea positiva. Por lo que $r = 0.05$, de modo que la tasa buscada es 5%.

En ocasiones puede haber más de una manera de modelar un problema que está dado en palabras, como lo muestra el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Renta de un departamento

Una compañía de bienes raíces es propietaria del conjunto de departamentos Parklane, el cual consiste en 96 departamentos, cada uno de los cuales puede ser rentado en $550 mensuales. Sin embargo, por cada $25 mensuales de aumento en la renta, se tendrán tres departamentos desocupados sin posibilidad de que se renten. La compañía quiere recibir $54,600 mensuales de rentas. ¿Cuál debe ser la renta mensual de cada departamento?

Solución:

Método I. Suponga que r es la renta, en dólares, que se cobrará por cada departamento. Entonces el aumento sobre el nivel de $550 es $r - 550$. Así, el número de aumentos de 25 dólares es $\frac{r - 550}{25}$. Como cada 25 dólares de aumento causa que tres departamentos queden sin rentar, el número total de departamentos sin rentar será $3\left(\frac{r - 550}{25}\right)$. De aquí que el número total de departamentos rentados será $96 - 3\left(\frac{r - 550}{25}\right)$. Como

renta total = (renta por departamento)(número de departamentos rentados),

tenemos

$$54{,}600 = r\left[96 - \frac{3(r - 550)}{25}\right],$$

$$54{,}600 = r\left[\frac{2400 - 3r + 1650}{25}\right],$$

$$54{,}600 = r\left[\frac{4050 - 3r}{25}\right]$$
$$1{,}365{,}000 = r(4050 - 3r)$$

Por tanto,

$$3r^2 - 4050r + 1{,}365{,}000 = 0.$$

Utilizando la fórmula cuadrática,

$$r = \frac{4050 \pm \sqrt{(-4050)^2 - 4(3)(1{,}365{,}000)}}{2(3)}$$
$$= \frac{4050 \pm \sqrt{22{,}500}}{6} = \frac{4050 \pm 150}{6} = 675 \pm 25.$$

Así, la renta para cada departamento debe ser de \$650 o \$700.

Método II. Suponga que n es el número de incrementos de \$25. Entonces el aumento en la renta por departamento será $25n$ y habrá $3n$ departamentos sin rentar. Como

renta total = (renta por departamento)(número de departamentos rentados),

tenemos

$$54{,}600 = (550 + 25n)(96 - 3n),$$
$$54{,}600 = 52{,}800 + 750n - 75n^2,$$
$$75n^2 - 750n + 1800 = 0,$$
$$n^2 - 10n + 24 = 0,$$
$$(n - 6)(n - 4) = 0.$$

Así, $n = 6$ o $n = 4$. La renta que debe cobrarse es $550 + 25(6) = \$700$ o bien $550 + 25(4) = \$650$.

Ejercicio 2.1

1. **Cercado** Una malla de alambre se colocará alrededor de un terreno rectangular de modo que el área cercada sea de 800 pies^3 y el largo del terreno sea el doble de su ancho. ¿Cuántos pies de malla se utilizarán?

2. **Geometría** El perímetro de un rectángulo es de 200 pies y su largo es tres veces el ancho. Determine las dimensiones del rectángulo.

3. **Lagarta (oruga)** Uno de los insectos defoliadores más importantes es la oruga lagarta, la cual se alimenta de plantas de sombra, de bosque y de árboles frutales. Una persona vive en un área en la que la oruga se ha convertido en un problema. Esta persona desea rociar los árboles de su propiedad antes de que ocurra una mayor defoliación. Necesita 128 onzas de una solución compuesta de 3 partes de insecticida A y 5 partes de insecticida B. Después de preparada la solución, se mezcla con agua. ¿Cuántas onzas de cada insecticida deben usarse?



4. **Mezcla de concreto** Un constructor fabrica cierto tipo de concreto, al mezclar 1 parte de cemento Portland (compuesto de cal y arcilla), 3 partes de arena y 5 partes de piedra pulverizada (en volumen). Si se necesitan 765 pies^3 de concreto, ¿cuántos pies cúbicos de cada ingrediente necesita el constructor?

5. **Acabado de muebles** De acuerdo con *The Consumer's Handbook* (Paul Fargis, ed., Nueva York, Hawthorn, 1974), un buen aceite para el acabado de muebles de madera contiene 2 partes de aceite de linaza y 1 parte

de trementina. Si usted necesita preparar una pinta (16 onzas líquidas) de este aceite, ¿cuántas onzas líquidas de trementina se necesitan?

6. **Administración de bosques** Una compañía maderera posee un bosque que tiene forma rectangular de 1 × 2 millas. Si se tala una franja uniforme de árboles en los extremos de este bosque, ¿cuál debe ser el ancho de la franja, si se deben conservar $\frac{3}{4}$ de millas cuadradas de bosque?

7. **Vereda de un jardín** Un terreno rectangular de 4 × 8 m se usa como jardín. Se decide poner una vereda en toda la orilla interior de modo que 12 m^2 del terreno se dejen para flores. ¿Cuál debe ser el ancho de la vereda?

8. **Conducto de ventilación** El diámetro de un conducto circular de ventilación es de 140 mm. Este conducto está acoplado a un conducto cuadrado como se muestra en la figura 2.3. Para asegurar un flujo suave de aire, las áreas de las secciones circular y cuadrada deben ser iguales. Calcule, al milímetro más cercano, cuál debe ser la longitud x del lado de la sección cuadrada.

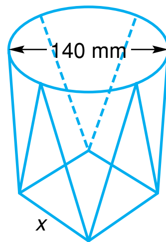


FIGURA 2.3 Conducto de ventilación (problema 8).

9. **Utilidad** Una compañía de refinación de maíz produce gluten de maíz para alimento de ganado, con un costo variable de $76 por tonelada. Si los costos fijos son $110,000 por mes y el alimento se vende en $126 por tonelada, ¿cuántas toneladas deben venderse para que la compañía tenga una utilidad mensual de $540,000?

10. **Ventas** La directiva de una compañía quiere saber cuántas unidades de su producto necesita vender para obtener una utilidad de $100,000. Para este caso se cuenta con la siguiente información: precio de venta por unidad, $20; costo variable por unidad, $15; costo fijo total, $600,000. A partir de estos datos determine las unidades que deben venderse.

11. **Inversión** Una persona desea invertir $20,000 en dos empresas, de modo que el ingreso total por año sea de $1440. Una empresa paga el 6% anual; la otra tiene mayor riesgo y paga un $7\frac{1}{2}$% anual. ¿Cuánto debe invertir en cada una?



12. **Inversión** Una persona invirtió $20,000, parte a una tasa de interés de 6% anual y el resto al 7% anual. El interés total al final de un año fue equivalente a una tasa de $6\frac{3}{4}$% anual sobre el total inicial de $20,000. ¿Cuánto se invirtió a cada tasa?

13. **Precios** El costo de un producto al menudeo es de $3.40. Si se desea obtener una ganancia del 20% sobre el precio de venta, ¿a qué precio debe venderse el producto?

14. **Retiro de bonos** En dos años una compañía requiere de $1,123,600 con el fin de retirar algunos bonos. Si ahora invierte $1,000,000 con este objetivo, ¿cuál debe ser la tasa de interés, compuesta anualmente, que debe recibir sobre este capital para retirar los bonos?

15. **Programa de expansión** En dos años una compañía iniciará un programa de expansión. Tiene decidido invertir $2,000,000 ahora, de modo que en dos años el valor total de la inversión sea de $2,163,200, la cantidad requerida para la expansión. ¿Cuál es la tasa de interés anual, compuesta anualmente, que la compañía debe recibir para alcanzar su objetivo?

16. **Negocios** Una compañía determina que si produce y vende q unidades de un producto, el ingreso total por las ventas será $100\sqrt{q}$. Si el costo variable por unidad es de $2 y el costo fijo de $1200, determine los valores de q para los que

$$\text{ingreso total por ventas} = \text{costo variable} + \text{costo fijo}.$$

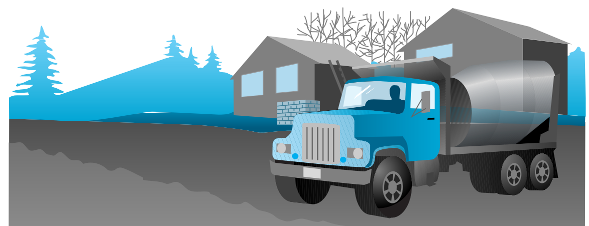
(Esto es, que la utilidad sea cero.)

17. **Alojamiento** El dormitorio de una universidad puede albergar a 210 estudiantes. Este otoño hay cuartos disponibles para 76 estudiantes de nuevo ingreso. En promedio un 95% de aquellos estudiantes de nuevo ingreso que hicieron una solicitud realmente reservan un cuarto. ¿Cuántas solicitudes de cuartos debe distribuir el colegio si quiere recibir 76 reservaciones?

18. **Encuestas** Un grupo de personas fue encuestado y el 20%, o 700, de ellas favoreció a un nuevo producto sobre la marca de mayor venta. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?

19. **Salario de una celadora** Se reportó que en cierta prisión para mujeres, el salario de las celadoras era 30% menor ($200 menos) por mes, que el de los hombres que ejercen el mismo trabajo. Determine el salario anual de un celador. Redondee su respuesta al dólar más cercano.

20. **Huelga de conductores** Hace pocos años, los transportistas de cemento estuvieron en huelga durante 46 días. Antes de la huelga recibían $7.50 por hora y trabajan 260 días, 8 horas diarias durante un año. ¿Qué porcentaje de incremento en el ingreso anual fue necesario para, en un año, suplir la pérdida de esos 46 días?



21. Punto de equilibrio Un fabricante de cartuchos para juegos de vídeo, vende cada cartucho en $19.95. El costo de fabricación de cada cartucho es de $12.92. Los costos fijos mensuales son de $8000. Durante el primer mes de ventas de un nuevo juego, ¿cuántos cartuchos debe vender el fabricante para llegar al punto de equilibrio (esto es, para que el ingreso total se igual al costo total)?

22. Club de inversión Un club de inversión compró un bono de una compañía petrolera por $5000. El bono da un rendimiento de 8% anual. El club ahora quiere comprar acciones de una compañía de suministros para hospitales. El precio de cada acción es de $20 y se gana un dividendo de $0.50 al año por acción. ¿Cuántas acciones debe comprar el club de modo que de su inversión total en acciones y bonos obtenga el 5% anual?

23. Cuidado de la vista Como un beneficio complementario para sus empleados, una compañía estableció un plan de cuidado de la vista. Bajo este plan, cada año la compañía paga los primeros $35 de los gastos de cuidado de la vista y el 80% de todos los gastos adicionales en ese rubro, hasta cubrir un *total* máximo de $100. Para un empleado, determine los gastos anuales totales en cuidado de la vista cubiertos por este programa.



24. Control de calidad En un periodo determinado, el fabricante de una barra de dulce con centro de caramelo determinó que 3.1% de las barras fueron rechazadas por imperfecciones.

a. Si c barras de dulce se fabrican en un año, ¿cuántas esperaría rechazar el fabricante?

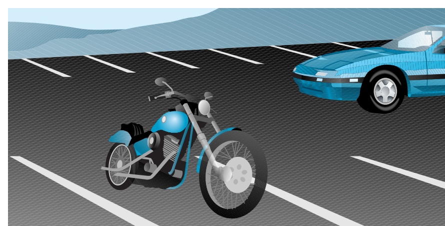
b. Para este año, el consumo anual del dulce se proyecta que será de 600,000,000 de barras. Aproximadamente, ¿cuántas barras tendrá que producir el fabricante, si toma en cuenta las rechazadas?

25. Negocios Suponga que los clientes comprarán q unidades de un producto cuando el precio es de $(80 - q)/4$ dólares *cada uno*. ¿Cuántas unidades deben venderse a fin de que el ingreso por ventas sea de 400 dólares?

26. Inversión ¿En cuánto tiempo se duplicará una inversión a interés simple con una tasa del 5% anual? [*Sugerencia:* véase el ejemplo 6(a) de la sec. 1.1 y exprese el 5% como 0.05.]

27. Alternativas en los negocios El inventor de un juguete nuevo ofrece a la compañía Kiddy Toy los derechos de exclusividad para fabricar y vender el juguete por una suma total de $25,000. Después de estimar que las posibles ventas futuras al cabo de un año serán nulas, la compañía está revisando la siguiente propuesta alternativa: dar un pago total de $2000 más una regalía de $0.50 por cada unidad vendida. ¿Cuántas unidades deben venderse el primer año para hacer esta alternativa tan atractiva al inventor como la petición original? [*Sugerencia:* determine cuándo son iguales los ingresos con ambas propuestas.]

28. Estacionamiento Un estacionamiento es de 120 pies de largo por 80 pies de ancho. Debido a un incremento en el personal, se decidió duplicar el área del lote aumentando franjas de igual anchura en un extremo y un lado (en forma de escuadra). Determine el ancho de cada franja.



29. Rentas Usted es el asesor financiero de una compañía que posee un edificio con 50 oficinas. Cada una puede rentarse en $400 mensuales. Sin embargo, por cada incremento de $20 mensuales se quedarán dos vacantes sin posibilidad de que sean ocupadas. La compañía quiere obtener un total de $20,240 mensuales de rentas del edificio. Se le pide determinar la renta que debe cobrarse por cada oficina. ¿Cuál es su respuesta?

30. Inversión Hace seis meses, una compañía de inversión tenía un portafolio de $3,100,000, que consistía en acciones de primera y acciones atractivas. Desde entonces, el valor de la inversión en acciones de primera aumentó $\frac{1}{10}$, mientras que el valor de las acciones atractivas disminuyó $\frac{1}{10}$. El valor actual del portafolio es $3,240,000. ¿Cuál es el valor *actual* de la inversión en acciones de primera?

31. Ingreso El ingreso mensual de cierta compañía está dado por $R = 800p - 7p^2$, donde p es el precio en dólares del producto que fabrica esa compañía. ¿A qué precio el ingreso será de $10,000, si el precio debe ser mayor de $50?

32. Razón precio-utilidad La *razón precio-utilidad* (P/U) de una compañía es el cociente que se obtiene de dividir el valor de mercado de una acción de sus acciones comunes en circulación, entre las utilidades por acción. Si P/U se incrementa en 10% y los ingresos por acción aumentan en 20%, determine el incremento porcentual en el valor de mercado por acción para las acciones comunes.

33. Equilibrio de mercado Cuando el precio de un producto es p dólares por unidad, suponga que un fabricante suministrará $2p - 8$ unidades del producto al mercado y que los consumidores demandarán $300 - 2p$ unidades. En el valor de p para el cual la oferta es igual a la demanda, se dice que el mercado está en equilibrio. Determine ese valor de p.

34. Equilibrio de mercado Repita el problema 33 para las condiciones siguientes: a un precio de p dólares por unidad, la oferta es $3p^2 - 4p$ y la demanda es $24 - p^2$.

35. Barda de seguridad Por razones de seguridad, una compañía cercará un área rectangular de 11,200 pies^2 en la parte posterior de su planta. Un lado estará delimitado por el edificio y los otros tres por la barda (véase la fig. 2.4). Si se van a utilizar 300 pies de barda, ¿cuáles son las dimensiones del área rectangular?

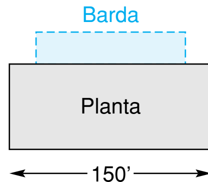


FIGURA 2.4 Barda de seguridad (problema 35).

36. Diseño de empaque Una compañía está diseñando un empaque para su producto. Una parte del empaque será una caja abierta fabricada a partir de una pieza cuadrada de aluminio, de la que se cortará un cuadrado de 2 pulgadas de cada esquina para así doblar hacia arriba los lados (véase la fig. 2.5). La caja es para contener 50 pulgadas^3. ¿Cuáles son las dimensiones de la pieza cuadrada de aluminio que debe utilizarse?

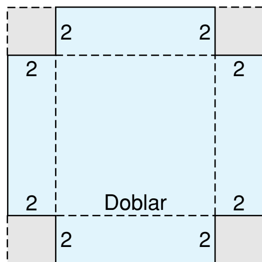


FIGURA 2.5 Construcción de una caja (problema 36).

37. Diseño de producto Una compañía de dulces fabrica una popular barra de forma rectangular con 10 cm de largo, por 5 cm de ancho y 2 cm de grosor (véase la fig. 2.6). A causa de un incremento en los costos, la compañía ha decidido reducir el volumen de la barra en un drástico 28%; el grosor será el mismo, pero el largo y el ancho se reducirán en la misma cantidad. ¿Cuál será el largo y el ancho de la nueva barra?

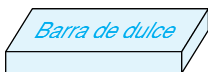


FIGURA 2.6 Barra de dulce (problema 37).

38. Diseño de producto Una compañía fabrica un dulce en forma de arandela (un dulce con un agujero en medio; véase la fig. 2.7). A causa del incremento en los costos, la compañía reducirá el volumen del dulce en un 20%. Para hacerlo conservarán el mismo grosor y radio exterior, pero harán mayor el radio interno. Actualmente el grosor es de 2 mm, el radio interno 2 mm y el radio exterior 7 mm. Determine el radio interno del dulce con el nuevo estilo. [*Sugerencia:* el volumen V de un disco sólido es $\pi r^2 h$, donde r es el radio y h el grosor del disco.]

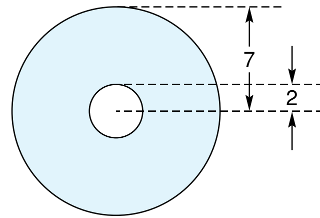


FIGURA 2.7 Dulce en forma de arandela (problema 38).

39. Saldo compensatorio Un *saldo compensatorio* se refiere a aquella práctica en la cual un banco requiere a quien solicita un crédito, mantenga en depósito una cierta parte de un préstamo durante el plazo del mismo. Por ejemplo, si una compañía obtiene un préstamo de $100,000, el cual requiere de un saldo compensatorio del 20%, tendría que dejar $20,000 en depósito y usar sólo $80,000. Para satisfacer los gastos de renovación de sus herramientas, Victor Manufacturing Company debe pedir prestados $95,000. El banco, con el que no han tenido tratos previos, requiere de un saldo compensatorio del 15%. Aproximando a la unidad de millar de dólares más cercana, diga, ¿cuál debe ser el monto total del préstamo para obtener los fondos necesarios?



40. Plan de incentivos Una compañía de maquinaria tiene un plan de incentivos para sus agentes de ventas. Por cada máquina que un agente venda la comisión es de $40. La comisión por cada máquina vendida se incrementa en $0.04, siempre que se vendan más de 600 unidades. Por ejemplo, la comisión sobre cada una de 602 máquinas vendidas será de $40.08. ¿Cuántas máquinas debe vender un agente para obtener ingresos por $30,800?

41. Bienes raíces Una compañía fraccionadora compra una parcela en $7200. Después de vender todo, excepto

20 acres, con una ganancia de $30 por acre sobre su costo original, el costo total de la parcela se recuperó. ¿Cuántos acres se vendieron?

42. Margen de utilidad EL *margen de utilidad* de una compañía es su ingreso neto dividido entre sus ventas totales. El margen de utilidad en cierta compañía aumentó en 0.02 con respecto al año anterior. El año anterior vendió su producto en $3.00 cada uno y tuvo un ingreso neto de $4500. Este año incrementó el precio de su producto en $0.50 por unidad, vendió 2000 más y tuvo un ingreso neto de $7140. La compañía nunca ha tenido un margen de utilidad mayor que 0.15. ¿Cuántos de sus productos vendió la compañía el año pasado y cuántos vendió este año?

43. Negocios Una compañía fabrica los productos A y B. El costo de producir cada unidad de A es $2 más que el de B. Los costos de producción de A y B son $1500 y $1000, respectivamente, y se hacen 25 unidades más de A que de B. ¿Cuántas unidades de cada producto se fabrican?

OBJETIVO Resolver desigualdades lineales con una variable e introducir la notación de intervalos.

2.2 Desigualdades lineales

Suponga que a y b son dos puntos sobre la recta de los números reales. Entonces, a y b coinciden, a se encuentra a la izquierda de b, o a se encuentra a la derecha de b (véase la fig. 2.8).

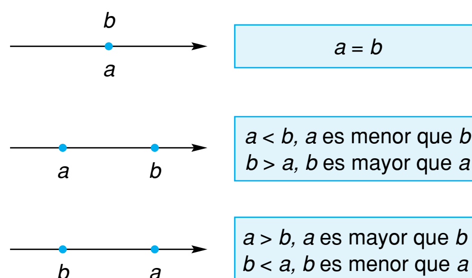


FIGURA 2.8 Posición relativa de dos puntos.

Si a y b coinciden entonces $a = b$. Si a se encuentra a la izquierda de b, decimos que a es menor que b y escribimos $a < b$, en donde el *símbolo de desigualdad* "$<$" se lee "es menor que". Por otra parte, si a se encuentra a la derecha de b, decimos que a es mayor que b y escribimos $a > b$. Los enunciados $a > b$ y $b < a$ son equivalentes.

Otro símbolo de desigualdad, "$\leq$", se lee "es menor o igual a" y se define como: $a \leq b$ si y sólo si $a < b$ o $a = b$. De manera semejante, el símbolo "$\geq$" está definido como: $a \geq b$ si y sólo si $a > b$ o $a = b$. En este caso decimos que a es mayor o igual a b.

Usaremos las palabras *números reales* y *puntos* de manera indistinta, ya que existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos que están sobre una recta. Así, podemos hablar de los puntos $-5, -2, 0$,7 y 9, y escribir $7 < 9, -2 > -5, 7 \leq 7$ y $7 \geq 0$ (véase la fig. 2.9). Claramente, si $a > 0$, entonces a es positivo; si $a < 0$, entonces a es negativo.

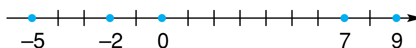


FIGURA 2.9 Puntos en la recta numérica.

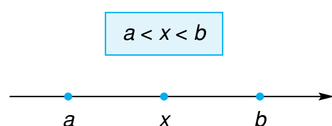


FIGURA 2.10 $a < x$ y $x < b$.

Suponga que $a < b$, y x está entre a y b (véase la fig. 2.10). Entonces no sólo $a < x$, sino también $x < b$. Indicamos esto escribiendo $a < x < b$,

que puede considerarse como una desigualdad doble. Por ejemplo, $0 < 7 < 9$ (como referencia regrese a la fig. 2.9).

Acabamos de definir una desigualdad usando la relación menor que ($<$), pero las otras ($>$, $\leq$, $\geq$) también podrían haber sido utilizadas.

Definición

Una ***desigualdad*** es un enunciado que establece que un número es menor que otro.

Por supuesto, representamos las desigualdades por medio de símbolos de desigualdad. Si dos desigualdades tienen sus símbolos apuntando en la misma dirección, entonces decimos que tienen el *mismo sentido*. Si no, se dice que son de *sentidos opuestos* o que una tiene el *sentido contrario* de la otra. Por tanto, $a < b$ y $c < d$ tienen el mismo sentido, pero $a < b$ tiene el sentido contrario de $c > d$.

Resolver una desigualdad, como $2(x - 3) < 4$, significa encontrar todos los valores de la variable para los cuales dicha desigualdad es cierta. Esto implica la aplicación de ciertas reglas que ahora establecemos:

Reglas para las desigualdades

1. Si un mismo número se suma o resta en ambos lados de una desigualdad, la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica,

Tenga en mente que las reglas también se aplican a $\leq$, $>$, y $\geq$.

$$\text{si } a < b, \text{ entonces } a + c < b + c \text{ y } a - c < b - c.$$

Por ejemplo, $7 < 10$, de modo que $7 + 3 < 10 + 3$.

2. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número **positivo,** la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } ac < bc \text{ y } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Por ejemplo, $3 < 7$ y $2 > 0$, de modo que $3(2) < 7(2)$ y $\frac{3}{2} < \frac{7}{2}$.

El sentido de una desigualdad debe invertirse cuando multiplicamos o dividimos ambos lados por un número negativo.

3. Si ambos lados de una desigualdad se multiplican o dividen por el mismo número ***negativo,*** entonces la desigualdad resultante tendrá el sentido ***contrario*** de la original. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } a(-c) > b(-c) \text{ y } \frac{a}{-c} > \frac{b}{-c}.$$

Por ejemplo, $4 < 7$ pero $4(-2) > 7(-2)$ y $\dfrac{4}{-2} > \dfrac{7}{-2}$.

4. Cualquier lado de una desigualdad puede reemplazarse por una expresión equivalente a ella. En forma simbólica,

$$\text{si } a < b \text{ y } a = c, \text{ entonces } c < b.$$

Por ejemplo, si $x < 2$ y $x = y + 4$, entonces $y + 4 < 2$.

5. Si los lados de una desigualdad son ambos positivos o negativos, entonces sus recíprocos[1] respectivos estarán relacionados por un símbolo de desigualdad con sentido ***contrario*** a la desigualdad original. Por ejemplo, $2 < 4$, pero $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.
6. Si ambos lados de una desigualdad son positivos y elevamos cada lado a la misma potencia positiva, entonces la desigualdad resultante tendrá el mismo sentido que la original. Por tanto, si $0 < a < b$ y $n > 0$, entonces

$$a^n < b^n \text{ y } \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b},$$

en donde suponemos que n es un entero positivo en la última desigualdad. Por ejemplo, $4 < 9$ de modo que $4^2 < 9^2$ y $\sqrt{4} < \sqrt{9}$.

El resultado de aplicar las reglas 1 a 4 a una desigualdad se conoce como *desigualdad equivalente.* Ésta es una desigualdad cuya solución es exactamente la misma que la de la original. Aplicaremos estas reglas a una *desigualdad lineal*.

Definición

Una ***desigualdad lineal*** en la variable x es aquella que puede escribirse en la forma

$$ax + b < 0,$$

donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

La definición también aplica para $\leq$, $>$, y $\geq$.

■ *Principios en práctica 1*

Resolución de una desigualdad lineal

Un agente de ventas tiene un ingreso mensual dado por $I = 200 + 0.8S$, en donde S es el número de productos vendidos en el mes. ¿Cuántos productos debe vender para obtener al menos \$4500 en un mes?

■ EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad lineal

Resolver $2(x - 3) < 4$.

Solución:

Estrategia: reemplazaremos la desigualdad dada por desigualdades equivalentes hasta que la solución sea evidente.

$$\begin{aligned} 2(x-3) &< 4, & \\ 2x - 6 &< 4 & \text{(Regla 4)}, \\ 2x - 6 + 6 &< 4 + 6 & \text{(Regla 1)}, \\ 2x &< 10 & \text{(Regla 4)}, \\ \frac{2x}{2} &< \frac{10}{2} & \text{(Regla 2)}, \\ x &< 5. & \end{aligned}$$

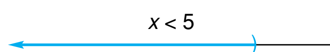


FIGURA 2.11 Todos los números reales menores que 5.

Todas las desigualdades son equivalentes. Por tanto, la desigualdad original es cierta para *todos* los números reales x tales que $x < 5$. Por ejemplo, la desigualdad es cierta para $x = -10, -0.1, 0, \frac{1}{2}$ y 4.9. Podemos escribir nuestra solución simplemente como $x < 5$ y representarla de manera geométrica por medio de una semirrecta gruesa en la figura 2.11. El paréntesis indica que el 5 *no está incluido* en la solución. ■

[1] El *recíproco* de un número diferente de cero, a, se define como $\frac{1}{a}$.

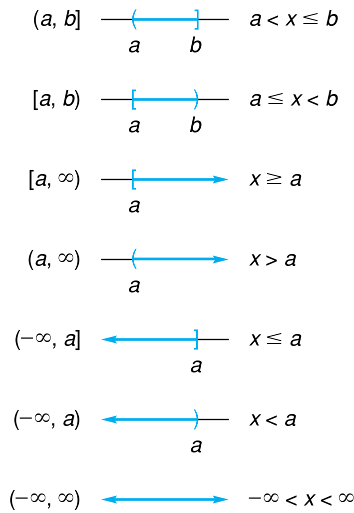


FIGURA 2.13 Intervalos.

En el ejemplo 1, la solución consistía en un conjunto de números, a saber, todos los menores que 5. En general, es común utilizar el término **intervalo** para referirse a tales conjuntos. En el caso del ejemplo 1, el conjunto de todas las x tales que $x < 5$ puede denotarse por la *notación de intervalo* $(-\infty, 5)$. El símbolo $-\infty$ no es un número, sino sólo una convención para indicar que el intervalo se extiende de manera indefinida hacia la izquierda.

Existen otros tipos de intervalos. Por ejemplo, el conjunto de todos los números x para los cuales $a \leq x \leq b$ se conoce como un **intervalo cerrado,** que incluye a los números a y b, los cuales se llaman *extremos* del intervalo. Este intervalo se denota mediante $[a, b]$ y se muestra en la figura 2.12(a). Los corchetes indican que a y b *están incluidos* en el intervalo. Por otra parte, el conjunto de todas las x para las que



FIGURA 2.12 Intervalos cerrados y abiertos.

$a < x < b$ se llama **intervalo abierto** y se denota mediante (a, b). Los extremos *no* son parte de este conjunto [véase la fig. 2.12(b)]. Para ampliar estos conceptos, tenemos los intervalos mostrados en la figura 2.13.

EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad lineal

Resolver $3 - 2x \leq 6$.

Solución:

$$3 - 2x \leq 6,$$

$$-2x \leq 3 \qquad \text{(Regla 1)},$$

$$x \geq -\frac{3}{2} \qquad \text{(Regla 3)}.$$

Al dividir ambos lados entre –2 se invierte el sentido de la desigualdad.

La solución es $x \geq -\frac{3}{2}$, o, en notación de intervalo, $[-\frac{3}{2}, \infty)$. Esto se representa geométricamente en la figura 2.14.

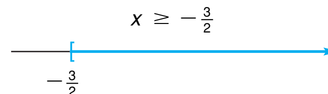


FIGURA 2.14 El intervalo $(-\frac{3}{2}, \infty)$.

Principios en práctica 2
Resolución de una desigualdad lineal

El veterinario de un zoológico puede comprar cuatro diferentes alimentos para animales con diferentes valores de nutrimentos, para los animales de pastoreo. Sea x_1 el número de bolsas de alimento 1, x_2 el número de bolsas de alimento 2, y así sucesivamente. El número de bolsas de cada alimento necesario puede describirse por medio de las ecuaciones siguientes:

$$x_1 = 150 - x_4$$
$$x_2 = 3x_4 - 210$$
$$x_3 = x_4 + 60$$

Con base en estas ecuaciones, plantee cuatro desigualdades, suponiendo que cada variable debe ser no negativa.

EJEMPLO 3 Resolución de una desigualdad lineal

Resolver $\frac{3}{2}(s - 2) + 1 > -2(s - 4)$.

Solución:

$$\tfrac{3}{2}(s - 2) + 1 > -2(s - 4),$$

$$2[\tfrac{3}{2}(s - 2) + 1] > 2[-2(s - 4)] \qquad \text{(Regla 2)},$$

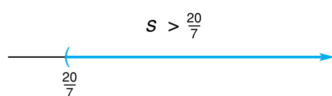


FIGURA 2.15 El intervalo $(\frac{20}{7}, \infty)$.

$$3(s - 2) + 2 > -4(s - 4),$$
$$3s - 4 > -4s + 16,$$
$$7s > 20 \qquad \text{(Regla 1)},$$
$$s > \frac{20}{7} \qquad \text{(Regla 2)}.$$

La solución es $(\frac{20}{7}, \infty)$. Véase la figura 2.15.

EJEMPLO 4 Resolución de desigualdades lineales

a. *Resolver* $2(x - 4) - 3 > 2x - 1$.

Solución:

$$2(x - 4) - 3 > 2x - 1,$$
$$2x - 8 - 3 > 2x - 1,$$
$$-11 > -1.$$

Como nunca será verdadero que $-11 > -1$, no existe solución y el conjunto solución es $\varnothing$.

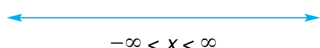


FIGURA 2.16 El intervalo $(-\infty, \infty)$.

b. *Resolver* $2(x - 4) - 3 < 2x - 1$.

Solución: procediendo como en la parte (a), obtenemos $-11 < -1$. Esto es verdadero para todos los números reales x, de modo que la solución es $(-\infty, \infty)$; véase la figura 2.16.

Ejercicio 2.2

En los problemas del 1 al 34 resuelva las desigualdades. Dé su respuesta en notación de intervalo y represéntela en forma geométrica sobre la recta de los números reales.

1. $3x > 12$.

2. $4x < -2$.

3. $4x - 13 \leq 7$.

4. $3x \geq 0$.

5. $-4x \geq 2$.

6. $2y + 1 > 0$.

7. $5 - 7s > 3$.

8. $4s - 1 < -5$.

9. $3 < 2y + 3$.

10. $6 \leq 5 - 3y$.

11. $2x - 3 \leq 4 + 7x$.

12. $-3 \geq 8(2 - x)$.

13. $3(2 - 3x) > 4(1 - 4x)$.

14. $8(x + 1) + 1 < 3(2x) + 1$.

15. $2(3x - 2) > 3(2x - 1)$.

16. $3 - 2(x - 1) \leq 2(4 + x)$.

17. $x + 2 < \sqrt{3} - x$.

18. $\sqrt{2}(x + 2) > \sqrt{8}(3 - x)$.

19. $\frac{5}{6}x < 40$.

20. $-\frac{2}{3}x > 6$.

21. $\frac{9y + 1}{4} \leq 2y - 1$

22. $\frac{4y - 3}{2} \geq \frac{1}{3}$.

23. $4x - 1 \geq 4(x - 2) + 7$.

24. $0x \leq 0$.

25. $\frac{1 - t}{2} < \frac{3t - 7}{3}$.

26. $\frac{3(2t - 2)}{2} > \frac{6t - 3}{5} + \frac{t}{10}$.

27. $2x + 13 \geq \frac{1}{2}x - 4$.

28. $4x - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}x$.

29. $\frac{2}{3}r < \frac{5}{6}r$.

30. $\frac{7}{4}t > -\frac{8}{3}t$.

31. $\frac{y}{2} + \frac{y}{3} > y + \frac{y}{5}$.

32. $9 - 0.1x \leq \frac{2 - 0.01x}{0.2}$.

33. $0.1(0.03x + 4) \geq 0.02x + 0.434$.

34. $\frac{5y - 1}{-3} < \frac{7(y + 1)}{-2}$.

---

35. Utilidades Cada mes del año pasado una compañía tuvo utilidades mayores que \$37,000 pero menores que \$53,000. Si S representa los ingresos totales del año, describa S utilizando desigualdades.

36. Utilizando desigualdades, simbolice el enunciado siguiente. El número de horas de trabajo x para fabricar un producto no es menor que $2\frac{1}{2}$ ni mayor que 4.

37. Geometría En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos x es menor que 3 veces el otro ángulo agudo más 10 grados. Resuelva para x.

38. Gasto Una estudiante tiene \$360 para gastar en un sistema estereofónico y algunos discos compactos. Si ella compra un estereofónico que cuesta \$219 y el costo de los discos es de \$18.95 cada uno, determine el mayor número de discos que ella puede comprar.

OBJETIVO Modelar situaciones en términos de desigualdades.

2.3 Aplicaciones de desigualdades

La resolución de problemas expresados con palabras algunas veces puede implicar desigualdades, como lo ilustran los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Utilidad

Para una compañía que fabrica calentadores para acuarios, el costo combinado de mano de obra y material es de \$21 *por calentador. Los costos fijos* (*costos en que se incurre en un periodo dado, sin importar la producción*) *son* \$70,000. *Si el precio de venta de un calentador es* \$35, *¿cuántos debe vender para que la compañía genere utilidades?*

Solución:

Estrategia: recuerde que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}.$$

Debemos encontrar el ingreso total y después determinar cuándo su diferencia es positiva.

Sea q el número de calentadores que deben venderse. Entonces su costo es $21q$. Por tanto, el costo total para la compañía es $21q + 70{,}000$. El ingreso total de la venta de q calentadores será $35q$. Ahora,

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total},$$

y queremos que la utilidad > 0. Así,

$$\begin{aligned} \text{ingreso total} - \text{costo total} &> 0. \\ 35q - (21q + 70{,}000) &> 0, \\ 14q &> 70{,}000, \\ q &> 5000. \end{aligned}$$

Por tanto, deben venderse al menos 5001 calentadores para que la compañía genere utilidades.

EJEMPLO 2 Renta *versus* compra

Un constructor debe decidir entre rentar o comprar una máquina excavadora. Si fuese a rentar la máquina, el costo de la renta sería de \$3000 *mensuales* (*sobre la base de un año*) *y el costo diario* (*gas, aceite y operador*) *sería de* \$180 *por cada día que la máquina se utilice. Si él fuese a comprarla, sus costos fijos anuales serían de* \$20,000 *y los costos diarios de operación y mantenimiento serían de* \$230 *por cada día que la máquina se utilizara. ¿Cuántos días al año por lo menos, tendría que utilizar el constructor la máquina para justificar la renta en lugar de la compra?*

Solución:

Estrategia: vamos a determinar expresiones para el costo anual de la renta y el costo anual de la compra, así encontraremos cuándo el costo de la renta es menor que el de la compra.

Sea d el número de días de cada año que la máquina será utilizada. Si la máquina se renta, el costo total anual consiste en los gastos de la renta, que son (12)(3000) y los costos diarios de $180d$. Si la máquina se compra, el costo por año es $20000 + 230d$. Queremos que

$$\begin{aligned} \text{costo}_{\text{renta}} &< \text{costo}_{\text{compra}}, \\ 12(3000) + 180d &< 20{,}000 + 230d, \\ 36{,}000 + 180d &< 20{,}000 + 230d, \\ 16{,}000 &< 50d, \\ 320 &< d. \end{aligned}$$

Por tanto, el constructor debe utilizar la máquina al menos 321 días para justificar rentarla.

EJEMPLO 3 Razón de activo

La *razón de activo* de un negocio es el cociente de sus activos circulantes (efectivo, inventario de mercancías y cuentas por cobrar), a sus pasivos circulantes (préstamos a corto plazo e impuestos).

Después de consultar con el contralor, el presidente de la Ace Sports Equipment Company decide pedir un préstamo a corto plazo para hacerse de inventario. La compañía tiene un activo de \$350,000 *y un pasivo de* \$80,000. *¿Cuánto pueden pedir prestado si quieren que su razón de activo no sea menor que* 2.5*?* (*Nota: los fondos que recibirán se consideran como activo y el préstamo como pasivo.*)

Solución: sea x la cantidad que la compañía puede pedir prestada. Entonces sus activos serán $350{,}000 + x$ y sus pasivos $80{,}000 + x$. Así,

$$\text{razón de activo} = \frac{\text{activo circulante}}{\text{pasivo circulante}} = \frac{350{,}000 + x}{80{,}000 + x}.$$

Aunque la desigualdad que debe resolverse no es lineal, conduce a una desigualdad lineal.

Queremos

$$\frac{350{,}000 + x}{80{,}000 + x} \geq 2.5.$$

Ya que x es positiva, también lo es $80{,}000 + x$. Por lo que podemos multiplicar ambos lados de la desigualdad por $80{,}000 + x$ y su sentido permanecerá igual. Tenemos

$$350{,}000 + x \geq 2.5(80{,}000 + x),$$
$$150{,}000 \geq 1.5x,$$
$$100{,}000 \geq x.$$

En consecuencia, la compañía puede pedir prestado hasta $100,000 y aún mantener una razón de activo no menor que 2.5.

EJEMPLO 4 Publicidad

Una compañía de publicidad determina que el costo por publicar cada ejemplar de una cierta revista es de $1.50. *El ingreso recibido de los distribuidores es* $1.40 *por revista. El ingreso por publicidad es* 10% *de los ingresos recibidos de los distribuidores por todos los ejemplares vendidos por arriba de* 10,000. *¿Cuál es el número mínimo de revistas que deben venderse de modo que la compañía obtenga utilidades?*

Solución:

Estrategia: tenemos que utilidad = ingreso total − costo total, de modo que encontramos una expresión para la utilidad y después la hacemos mayor que cero.

Sea q el número de revistas vendidas. El ingreso recibido de los distribuidores es $1.40q$ y el recibido por publicidad es $(0.10)[(1.40)(q - 10{,}000)]$. El costo total de la publicación es $1.50q$. Así,

$$\text{ingreso total} - \text{costo total} > 0.$$
$$1.40q + (0.10)[(1.40)(q - 10{,}000)] - 1.50q > 0,$$
$$1.4q + 0.14q - 1400 - 1.5q > 0,$$
$$0.04q - 1400 > 0,$$
$$0.04q > 1400,$$
$$q > 35{,}000.$$

Por tanto, el número total de revistas debe ser mayor que 35,000. Esto es, al menos 35,001 ejemplares deben venderse para garantizar utilidades.

Ejercicio 2.3

1. **Utilidades** La compañía Davis fabrica un producto que tiene un precio unitario de venta de $20 y un costo unitario de $15. Si los costos fijos son de $600,000, determine el número mínimo de unidades que deben venderse para que la compañía tenga utilidades.

2. **Utilidades** Para producir una unidad de un producto nuevo, una compañía determina que el costo del material es de $2.50 y el de mano de obra de $4. El gasto general, sin importar el volumen de ventas, es de $5000. Si el precio para un mayorista es de $7.40 por unidad, determine el número mínimo de unidades que debe venderse para que la compañía obtenga utilidades.

3. **Arrendamiento con opción a compra vs. compra** Una mujer de negocios quiere determinar la diferencia entre el costo de poseer un automóvil y el de arrendarlo con opción a compra. Ella puede arrendar un automóvil por $420 al mes (con una base anual). Bajo este plan, el costo por milla (gasolina y aceite) es $0.06. Si ella compra el automóvil, el gasto fijo anual sería de $4700, y otros costos ascenderían a $0.08 por milla. ¿Cuántas millas por lo menos tendría que conducir ella por año para que el arrendamiento no fuese más caro que la compra?

4. **Fabricación de camisetas** Una fábrica de camisetas produce N camisetas con un costo de mano de obra total (en dólares) de $1.2N$ y un costo total por material de $0.3N$. Los gastos generales para la planta son de $6000. Si cada camiseta se vende en $3, ¿cuántas camisetas deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?

5. **Publicidad** El costo unitario de publicación de una revista es de $0.65. Cada una se vende al distribuidor en $0.60, y la cantidad que se recibe por publicidad es el 10% de la cantidad recibida por todas las revistas vendidas arriba de las 10,000. Encuentre el menor número de revistas que pueden publicarse sin pérdida, esto es, que utilidad ≥ 0. (Suponga que toda la emisión se venderá.)

6. **Asignación de producción** Una compañía produce relojes despertadores. Durante una semana normal de trabajo, el costo por mano de obra para producir un reloj es de $2.00, pero si es hecho en tiempo extra su costo asciende a $3.00. El administrador ha decidido no gastar más de $25,000 por semana en mano de obra. La compañía debe producir 11,000 relojes esta semana. ¿Cuál es la cantidad mínima de relojes que deben producirse durante una semana normal de trabajo?

7. **Inversión** Una compañía invierte $30,000 de sus fondos excedentes a dos tasas de interés anual: 5 y $6\frac{3}{4}$%. Desea un rendimiento anual que no sea menor al $6\frac{1}{2}$%. ¿Cuál es la cantidad mínima que debe invertir a la tasa de $6\frac{3}{4}$%?

8. **Razón de activo** La tasa de activo de Precision Machine Products es 3.8. Si sus activos circulantes son de $570,000, ¿cuáles son sus pasivos circulantes? Para elevar sus fondos de reserva, ¿cuál es la cantidad máxima que puede pedir prestada a corto plazo si quiere que su razón de activo no sea menor que 2.6? (Véase el ejemplo 3 para una explicación de la razón de activo.)

9. **Asignación de ventas** Actualmente, un fabricante tiene 2500 unidades de un producto en inventario. Hoy el precio unitario del producto es de $4 por unidad. El próximo mes el precio por unidad se incrementará en $0.50. El fabricante quiere que el ingreso total recibido por la venta de las 2500 unidades no sea menor que $10,750. ¿Cuál es el número máximo de unidades que pueden venderse este mes?

10. **Ingresos** Suponga que los consumidores comprarán q unidades de un producto al precio de $\frac{100}{q} + 1$ dólares por unidad. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que deben venderse para que el ingreso por ventas sea mayor que $5000?

11. **Sueldo por hora** A los pintores con frecuencia se les paga por hora o por obra determinada. El salario que reciben puede afectar su velocidad de trabajo. Por ejemplo, suponga que unos pintores pueden trabajar por $8.50 la hora, o por $300 más $3 por cada hora por debajo de 40, si completan el trabajo en menos de 40 horas. Suponga que el trabajo les toma t horas. Si $t \geq 40$, claramente el sueldo por hora es mejor. Si $t < 40$, ¿para qué valores de t el salario por hora es mejor?

12. **Compensación** Suponga que una compañía le ofrece un puesto en ventas y que usted elige entre dos métodos para determinar su salario. Un método paga $12,600 más un bono del 2% sobre sus ventas anuales. El otro método paga una comisión directa del 8% sobre sus ventas. ¿Para qué nivel de ventas anuales es mejor seleccionar el primer método?

13. **La razón de prueba de ácido** La *razón de prueba de ácido* (o *razón rápida*) de un negocio es la razón de la liquidez de sus activos —efectivo y valores más cuentas por cobrar— a sus obligaciones actuales. La mínima razón para que una compañía tenga unas finanzas sólidas es alrededor de 1.0, pero, por lo común, esto varía un poco de industria a industria. Si una compañía tiene $450,000 en efectivo y valores, y tiene $398,000 en obligaciones actuales, ¿cuánto necesita tener en cuentas por cobrar para mantener la razón en o por arriba de 1.3?

OBJETIVO Resolver ecuaciones y desigualdades que incluyan valores absolutos.

2.4 Valor absoluto

Ecuaciones con valor absoluto

En la recta de los números reales, a la distancia desde el cero hasta un número x se le llama el **valor absoluto** de x, el cual se denota por $|x|$. Por ejemplo, $|5| = 5$ y $|-5| = 5$, ya que tanto el 5 como el -5 están a 5 unidades del cero (véase la fig. 2.17). En forma similar, $|0| = 0$. Note que x nunca puede ser negativo, esto es $|x| \geq 0$.

Básicamente, el valor absoluto de un número real es su valor cuando se ignora su signo.

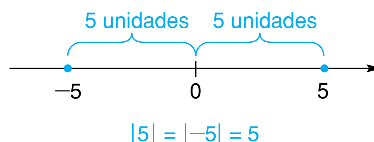


FIGURA 2.17 Valor absoluto.

Si x es positiva o cero, entonces $|x|$ es simplemente x misma, de modo que podemos omitir las líneas verticales y escribir $|x| = x$. Por otra parte, considere el valor absoluto de un número negativo, como $x = -5$.

$$|x| = |-5| = 5 = -(-5) = -x.$$

Así, si x es negativa, entonces $|x|$ es el número positivo $-x$. El signo menos indica que hemos cambiado el signo de x. Así, directamente de su interpretación geométrica, el valor absoluto puede definirse como sigue.

Definición
El ***valor absoluto*** de un número real x, escrito $|x|$, se define como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Aplicando la definición, tenemos $|3| = 3$, $|-8| = -(-8)$ y $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. También, $-|2| = -2$ y $-|-2| = -2$.



Advertencia $\sqrt{x^2}$ no necesariamente es x, pero

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Por ejemplo, $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$ no -2. Esto concuerda con el hecho que

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

También, $|-x| \neq x$ y

$$|-x - 1| \neq x + 1.$$

Por ejemplo, si hacemos $x = -3$, entonces $|-(-3)| \neq -3$, y

$$|-(-3) - 1| \neq -3 + 1.$$

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones con valor absoluto

a. *Resolver* $|x - 3| = 2$.

Solución: esta ecuación establece que $x - 3$ es un número que está a 2 unidades del cero. Por tanto,

$$x - 3 = 2 \text{ o } x - 3 = -2.$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene $x = 5$ o $x = 1$.

b. *Resolver* $|7 - 3x| = 5$.

Solución: esta ecuación es verdadera si $7 - 3x = 5$ o si $7 - 3x = -5$. Resolviéndolas se obtiene $x = \frac{2}{3}$ o $x = 4$.

c. *Resolver* $|x - 4| = -3$.

Solución: el valor absoluto de un número nunca es negativo, de modo que el conjunto solución es $\varnothing$.

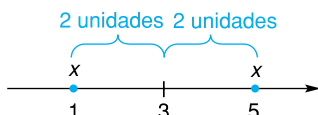


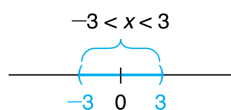
FIGURA 2.18 La solución de $|x - 3| = 2$ es 1 o 5.

Podemos interpretar $|a - b|$ o $|b - a|$ como la distancia entre a y b. Por ejemplo, la distancia entre 5 y 9 es

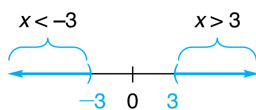
$$|9 - 5| = |4| = 4,$$

$$\text{o} \qquad |5 - 9| = |-4| = 4.$$

En forma análoga, la ecuación $|x - 3| = 2$ establece que la distancia entre x y 3 son 2 unidades. Por tanto, x puede ser 1 o 5, como se muestra en el ejemplo 1(a) y la figura 2.18.



(a) Solución de $|x| < 3$



(b) Solución de $|x| > 3$

FIGURA 2.19 Solución de $|x| < 3$ y $|x| > 3$.

Desigualdades con valor absoluto

Ahora estudiaremos las desigualdades que incluyen valores absolutos. Si $|x| < 3$, entonces x está a menos de 3 unidades del cero. Por tanto, x debe estar entre -3 y 3, esto es, en el intervalo $-3 < x < 3$ [véase la fig. 2.19(a)]. Por otra parte, si $|x| > 3$, entonces x debe estar a más de 3 unidades del cero. Así, existen dos intervalos en la solución: $x < -3$ o $x > 3$ [véase la fig. 2.19(b)]. Podemos extender estas ideas como sigue. Si $|x| \le 3$, entonces $-3 \le x \le 3$. Si $|x| \ge 3$, entonces $x \le -3$ o bien $x \ge 3$. La tabla 2.1 presenta un resumen de las soluciones para desigualdades con valor absoluto.

TABLA 2.1

Desigualdad ($d > 0$)	Solución
$\lvert x\rvert < d$	$-d < x < d$
$\lvert x\rvert \le d$	$-d \le x \le d$
$\lvert x\rvert > d$	$x < -d$ o $x > d$
$\lvert x\rvert \ge d$	$x \le -d$ o $x \ge d$

EJEMPLO 2 Resolución de desigualdades con valor absoluto

a. *Resolver* $|x - 2| < 4$.

Solución: el número $x - 2$ debe estar a menos de 4 unidades del cero. Del análisis anterior, eso significa que $-4 < x - 2 < 4$. Podemos establecer el procedimiento para resolver esta desigualdad como sigue:

$$-4 < x - 2 < 4,$$

$$-4 + 2 < x < 4 + 2 \qquad \text{(sumando 2 a cada miembro),}$$

$$-2 < x < 6.$$

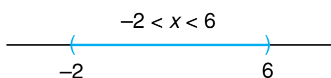


FIGURA 2.20 La solución de $|x - 2| < 4$ es el intervalo $(-2, 6)$.

Así, la solución es el intervalo abierto $(-2, 6)$. Esto significa que todos los números reales entre -2 y 6 satisfacen la desigualdad original (véase la fig. 2.20).

b. *Resolver* $|3 - 2x| \le 5$.

Solución:

$$-5 \leq 3 - 2x \leq 5,$$
$$-5 - 3 \leq -2x \leq 5 - 3 \qquad \text{(restando 3 de cada miembro)},$$
$$-8 \leq -2x \leq 2,$$
$$4 \geq x \geq -1 \qquad \text{(dividiendo cada miembro entre } -2\text{)},$$
$$-1 \leq x \leq 4 \qquad \text{(reescribiendo)}.$$

Note que el sentido de la desigualdad original se *invirtió* cuando dividimos entre un número negativo. La solución es el intervalo cerrado $[-1, 4]$.

EJEMPLO 3 Resolución de desigualdades con valor absoluto

a. *Resolver* $|x + 5| \geq 7$.

Solución: aquí $x + 5$ debe estar *al menos* a 7 unidades del cero. Así que, $x + 5 \leq -7$ o bien $x + 5 \geq 7$. Esto significa que $x \leq -12$ o bien $x \geq 2$. Por tanto, la solución consiste en dos intervalos: $(-\infty, -12]$ y $[2, \infty)$. Podemos abreviar esta colección de números escribiendo

$$(-\infty, -12] \cup [2, \infty).$$

donde el símbolo $\cup$ es llamado el símbolo de la *unión* (véase la fig. 2.21). Más formalmente, la **unión** de los conjuntos A y B es el conjunto que consiste en todos los elementos que están en A o en B (o en ambos).

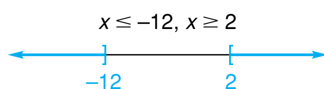


FIGURA 2.21 La unión $(-\infty, -12] \cup [2, \infty)$.

b. *Resolver* $|3x - 4| > 1$.

Solución: $3x - 4 < -1$ o bien $3x - 4 > 1$. Así que $3x < 3$ o bien $3x > 5$. Por tanto, $x < 1$ o $x > \frac{5}{3}$, de modo que la solución consiste en todos los números reales en el conjunto $(-\infty, 1) \cup (\frac{5}{3}, \infty)$.

Las desigualdades $x < 1$ y $x > \frac{5}{3}$ no pueden combinarse en una sola desigualdad, aunque podría parecer que sí. Es incorrecto combinar $\frac{5}{3} < x$ y $x < 1$ como $\frac{5}{3} < x < 1$, ya que esto implica que $\frac{5}{3} < 1$.

> ***Principios en práctica 1***
> **Notación de valor absoluto**
>
> Exprese el enunciado siguiente utilizando la notación de valor absoluto: el peso real w de una caja de cereal debe estar alrededor de 0.3 onzas del peso que se indica en la caja, que es de 22 onzas.

EJEMPLO 4 Notación de valor absoluto

Por medio de la notación de valor absoluto, exprese los enunciados siguientes:

a. x está a menos de 3 unidades del 5.

Solución:

$$|x - 5| < 3.$$

b. x difiere de 6 en por lo menos 7.

Solución:

$$|x - 6| \geq 7.$$

c. $x < 3$ y $x > -3$ de manera simultánea.

Solución:

$$|x| < 3.$$

d. x está a más de 1 unidad de -2.

Solución:

$$|x - (-2)| > 1,$$
$$|x + 2| > 1.$$

e. x está a menos de σ (letra griega "sigma") unidades de μ (letra griega "mu").

Solución:

$$|x - \mu| < \sigma.$$

Propiedades del valor absoluto

Cuatro propiedades básicas del valor absoluto son:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|$.
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.
3. $|a-b| = |b-a|$.
4. $-|a| \leq a \leq |a|$.

Por ejemplo, la propiedad 1 establece que el valor absoluto del producto de dos números es igual al producto de los valores absolutos de esos números.

EJEMPLO 5 Propiedades del valor absoluto

a. $|(-7) \cdot 3| = |-7| \cdot |3| = 21$.
b. $|4 - 2| = |2 - 4| = 2$.
c. $|7 - x| = |x - 7|$.
d. $\left|\frac{-7}{3}\right| = \frac{|-7|}{|3|} = \frac{7}{3}$; $\left|\frac{-7}{-3}\right| = \frac{|-7|}{|-3|} = \frac{7}{3}$.
e. $\left|\frac{x-3}{-5}\right| = \frac{|x-3|}{|-5|} = \frac{|x-3|}{5}$.
f. $-|2| \leq 2 \leq |2|$.

Ejercicio 2.4

En los problemas del 1 al 10 escriba una forma equivalente sin el símbolo de valor absoluto.

1. $|-13|$. **2.** $|2^{-1}|$. **3.** $|8-2|$. **4.** $|(-4-6)/2|$.
5. $|3(-\frac{5}{3})|$. **6.** $|2-7| - |7-2|$. **7.** $|x| < 4$. **8.** $|x| < 10$.
9. $|2 - \sqrt{5}|$. **10.** $|\sqrt{5} - 2|$.

11. Utilizando el símbolo de valor absoluto, exprese cada uno de los siguientes enunciados:

a. x está a menos de 3 unidades de 7.
b. x difiere de 2 en menos de 3.
c. x no está a más de 5 unidades de 7.
d. La distancia entre 7 y x es 4.
e. $x + 4$ está a menos de 2 unidades de 0.
f. x está entre -3 y 3, pero no es igual a 3 ni a -3.
g. $x < -6$ o $x > 6$.
h. $x - 6 > 4$ o $x - 6 < -4$.
i. El número x de horas que una máquina funcionará de manera eficiente difiere de 105 en menos de 3.
j. El ingreso promedio mensual x (en dólares) de una familia difiere de 850 en menos de 100.

12. Utilice la notación de valor absoluto para indicar que x y μ difieren en no más de σ.

13. Utilice la notación de valor absoluto para indicar que los precios p_1 y p_2 de dos productos pueden diferir en no más de 8 (dólares).

14. Determine todos los valores de x tales que $|x - \mu| \leq 2\sigma$.

En los problemas del 15 al 36 resuelva la ecuación o desigualdad dada.

15. $|x| = 7$.

16. $|-x| = 2$.

17. $\left|\frac{x}{3}\right| = 2$.

18. $\left|\frac{4}{x}\right| = 8$.

19. $|x - 5| = 8$.

20. $|4 + 3x| = 6$.

21. $|5x - 2| = 0$.

22. $|7x + 3| = x$.

23. $|7 - 4x| = 5$.

24. $|1 - 2x| = 1$.

25. $|x| < 4$.

26. $|-x| < 3$.

27. $\left|\frac{x}{4}\right| > 2$.

28. $\left|\frac{x}{3}\right| > \frac{1}{2}$.

29. $|x + 7| < 2$.

30. $|5x - 1| < -6$.

31. $|x - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$.

32. $|1 - 3x| > 2$.

33. $|5 - 8x| \leq 1$.

34. $|4x - 1| \geq 0$.

35. $\left|\frac{3x - 8}{2}\right| \geq 4$.

36. $\left|\frac{x - 8}{4}\right| \leq 2$.

En los problemas 37 y 38 exprese el enunciado utilizando la notación de valor absoluto.

37. En un experimento científico, la medida de una distancia d es 17.2 m, lo que es preciso a ± 30 cm.

38. La diferencia de temperatura entre dos sustancias químicas que se están mezclando no debe ser menor que 5 grados ni mayor que 10 grados.

39. Estadística En el análisis estadístico, la desigualdad de Chebyshev asegura que si x es una variable aleatoria, μ su media y σ su desviación estándar, entonces

$$(\text{probabilidad de que } |x - \mu| > h\sigma) \geq \frac{1}{h^2}.$$

Determine aquellos valores de x tales que $|x - \mu| > h\sigma$.

40. Tolerancia de manufactura En la fabricación de artefactos, la dimensión promedio de una parte es 0.01 cm. Utilizando el símbolo de valor absoluto, exprese el hecho de que una medida individual x de una parte, no debe diferir del promedio en más de 0.005 cm.

2.5 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 2.1 costo fijo, gasto general, costo variable, costo total, ganancia total, utilidad

Sección 2.2 $a < b$, $a \leq b$, $a > b$, $a \geq b$, $a < x < b$, desigualdad, sentido de una desigualdad, desigualdad equivalente, desigualdad lineal, $-\infty < x < \infty$, intervalo abierto, intervalo cerrado, extremos, notación de intervalo

Sección 2.4 valor absoluto $|x|$, unión $\cup$

Resumen

Si un problema está expresado en palabras usted debe transformarlo en una ecuación. Debe plantear los enunciados en forma de una ecuación (o en una desigualdad). Esto se conoce como *modelado matemático.* Es importante que primero lea el problema más de una vez de modo que entienda con claridad la información y qué es lo que se pide encontrar. Después debe seleccionar una letra para representar la cantidad desconocida que quiere determinar. Utilice las relaciones e información que el problema proporciona, y forme una ecuación que incluya a la letra dicha. Por último, resuelva la ecuación y vea si su solución responde lo que se pregunta. Algunas veces la solución de la *ecuación* no es la respuesta al *problema,* pero puede ser útil para obtenerla.

Algunas relaciones básicas que se utilizan para resolver problemas de administración son las siguientes:

$$\text{costo total} = \text{costo variable} + \text{costo fijo},$$

$$\text{ingreso total} = (\text{precio por unidad})(\text{número de unidades vendidas}),$$

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}.$$

Los símbolos de desigualdad $>, \leq, >$ y $\geq$ se utilizan para representar una desigualdad, la cual es un enunciado en el que un número es, por ejemplo, menor que otro. Tres operaciones básicas que cuando se aplican a una desigualdad, garantizan una desigualdad equivalente son:

1. Sumar (o restar) el mismo número a (o de) ambos lados.
2. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número positivo.
3. Multiplicar (o dividir) ambos lados por el mismo número negativo e invertir el sentido de la desigualdad.

Estas operaciones son útiles para resolver una desigualdad lineal (ésta es una que pueda escribirse en la forma $ax + b < 0$ o $ax + b \leq 0$, donde $a \neq 0$).

Una definición algebraica de valor absoluto es:

$$|x| = x, \text{ si } x \geq 0 \quad \text{y} \quad |x| = -x, \text{ si } \quad x < 0.$$

Interpretamos $|a - b|$ o $|b - a|$ como la distancia entre a y b. Si $d > 0$, entonces la solución de la desigualdad $|x| < d$ es el intervalo $(-d, d)$. La solución a $|x| > d$ consiste en dos intervalos y está dada por $(-\infty, -d) \cup (d, \infty)$. Algunas propiedades básicas del valor absoluto son:

1. $|ab| = |a| \cdot |b|$.
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.
3. $|a - b| = |b - a|$.
4. $-|a| \leq a \leq |a|$.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 15 resuelva la ecuación o la desigualdad.

1. $3x - 8 \geq 4(x - 2)$.
2. $2x - (7 + x) \leq x$.
3. $-(5x + 2) < -(2x + 4)$.
4. $-2(x + 6) > x + 4$.
5. $3p(1 - p) > 3(2 + p) - 3p^2$.
6. $2(4 - \frac{3}{5}q) < 5$.
7. $\frac{x + 5}{3} - \frac{1}{2} \leq 2$.
8. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > \frac{x}{4}$.
9. $\frac{1}{4}s - 3 \leq \frac{1}{8}(3 + 2s)$.
10. $\frac{1}{3}(t + 2) \geq \frac{1}{4}t + 4$.
11. $|3 - 2x| = 7$.
12. $\left|\frac{5x - 6}{13}\right| = 0$.
13. $|4t - 1| < 1$.
14. $4 < \left|\frac{2}{3}x + 5\right|$.
15. $|3 - 2x| \geq 4$.

16. **Utilidad** ¿A qué porcentaje de la utilidad sobre el costo es equivalente una utilidad del 40% sobre el precio de venta de un producto?

17. **Intercambio de existencias** En cierto día, se negociaron 1132 diferentes emisiones en el mercado de acciones de Nueva York. Había 48 emisiones más que mostraban incremento de las que mostraban bajas, y ninguna emisión permaneció sin cambio. ¿Cuántas emisiones sufrieron bajas?

18. **Impuesto a las ventas** El impuesto sobre la renta en cierto estado es de 6%. Si durante un año hubo un total de \$3017.29 en compras, incluyendo el impuesto, ¿cuánto corresponde al impuesto?

19. **Asignación de producción** Una compañía fabricará un total de 10,000 unidades de su producto en las plantas A y B. La información disponible aparece a continuación.

	Planta A	Planta B
Costo unitario por mano de obra y material	\$5	\$5.50
Costos fijos	\$30,000	\$35,000

Considerando las dos plantas la compañía ha decidido asignar no más de \$117,000 para costos totales. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe producir la planta A?

20. **Tanque de almacenamiento** Una compañía va a reemplazar dos tanques cilíndricos de almacenamiento de petróleo por un tanque nuevo. Los tanques viejos miden 16 pies de altura cada uno. Uno tiene un radio de 15 pies y el otro un radio de 20 pies. El tanque nuevo también será de 16 pies de altura. Determine su radio si tiene el mismo volumen que los dos tanques juntos. (*Sugerencia:* el volumen V de un tanque cilíndrico es $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h la altura.)

21. **Razón de operación** La *razón de operación* de un negocio de ventas al menudeo es la razón, expresada como un porcentaje, de los costos de operación (todo, desde gastos en publicidad hasta depreciación del equipo) a las ventas netas (es decir, ventas brutas menos devoluciones y rebajas). Una razón de operación menor al 100% indica una operación rentable, mientras que una razón de operación en el rango de 80% a 90% es extremadamente buena. Si una compañía tiene ventas netas de \$236,460 en un periodo, escriba una desigualdad que describa los costos de operación que mantendrían la razón de operación por debajo de 90%.



Aplicación práctica
Grabación con calidad variable[2]

Si usted, al igual que millones de personas, tiene una grabadora de video, usted ha visto la conveniencia de grabar programas de televisión para verlos después. En formato VHS puede seleccionar la velocidad de grabación estándar (SP, standard play), larga duración (LP, long play) o extendida (EP, extended play). El formato SP es el de mayor velocidad y proporciona la mejor calidad de grabación. LP, una velocidad más lenta, proporciona una menor calidad, y EP, que es el de velocidad más lenta, da la calidad más baja de grabación.

Con la cinta de video común T-120, el tiempo máximo de grabación en SP es de 2 horas. En LP de 4 horas y en EP 6 horas. En el análisis siguiente, se supone que estos tiempos de grabación son exactos y que la cantidad de cinta utilizada cambia uniformemente con el tiempo de grabación.

Si desea grabar una película que no es de más de 2 horas, es obvio que SP puede utilizarse para obtener la mejor calidad. Sin embargo, para grabar una película de 3 horas en una sola cinta T-120, usar sólo la velocidad SP provocaría que la cinta se llenase 1 hora antes de que la película terminara. Puede salvar esta dificultad si utiliza SP junto con otro formato de velocidad, asegurándose de maximizar el tiempo en SP.

Por ejemplo, puede empezar a grabar en LP y completar en SP. Obviamente su problema será determinar cuándo debe realizarse el cambio a SP. Sea t el tiempo, en horas, que LP es utilizado, entonces $3 - t$ horas de la película serán grabadas en SP. Como la velocidad en el modo LP es de $\frac{1}{4}$ de cinta por hora y en SP es $\frac{1}{2}$ cinta por hora, la parte de la cinta utilizada en LP es $t/4$ y la parte en SP es $(3 - t)/2$. La suma de estas fracciones debe ser 1, ya que la cinta debe usarse por completo. Por tanto, necesita resolver una ecuación lineal.

$$\frac{t}{4} + \frac{3-t}{2} = 1,$$
$$t + 2(3-t) = 4,$$
$$6 - t = 4,$$
$$t = 2.$$

Así, debe grabar en LP durante 2 horas y después cambiar a SP la restante $3 - t = 3 - 2 = 1$ hora. Esto significa que sólo un tercio de la película se grabará con la mejor calidad.

En lugar de restringirse a una película de 3 horas, puede generalizar el problema anterior para grabar una película de l horas, donde $2 < l \leq 4$. Esta situación da

$$\frac{t}{4} + \frac{l-t}{2} = 1,$$

cuya solución es

$$t = 2l - 4.$$

Asimismo, puede parecerle que no existe demasiada diferencia entre las calidades de grabación en LP y EP. Si desea iniciar en EP y terminar con SP, puede manejar una película de longitud l, en donde $2 < l \leq 6$. Sea t el tiempo, en horas, que EP es utilizada. Entonces

$$\frac{t}{6} + \frac{l-t}{2} = 1,$$
$$t + 3(l - t) = 6,$$
$$-2t + 3l = 6,$$
$$3l - 6 = 2t,$$
$$t = \frac{3}{2}l - 3.$$

Por ejemplo, con una película de 3 horas grabaría en EP durante $t = \frac{3}{2}(3) - 3 = 1\frac{1}{2}$ horas y después en SP durante $3 - 1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ horas. Esto demuestra que al utilizar EP en lugar de LP, se tendrá $\frac{1}{2}$ hora más de calidad de grabación en SP. Como un segundo ejemplo, considere la grabación de una película de 4 horas y 20 minutos. Aquí $l = 4\frac{1}{3}$ horas, de modo que utilizaría EP durante

$$t = \frac{3}{2}\left(\frac{13}{3}\right) - 3 = 3\tfrac{1}{2} \text{ horas}$$

y SP para el resto de la película.

[2]Adaptado de Gregory N. Fiore, "An Application of Linear Equations to the VCR", *Mathematics Teacher*, 81 (octubre de 1988), 370-372. Con permiso de National Council of Teachers of Mathematics.

El mismo método puede utilizarse para maximizar la calidad de audio en CDs grabables. Un CD estándar puede almacenar alrededor de 74 minutos de sonido estéreo de alta fidelidad. Sin embargo, usted puede almacenar muchas horas de audio en un CD por medio de un software (programa), el cual sacrifica un poco la calidad del sonido para comprimir la cantidad de espacio en el CD que se grabará. Dependiendo del método utilizado, una grabación puede comprimirse a un doceavo o incluso a un vigésimo de su tamaño original. Esto es especialmente útil para archivar grabaciones en grandes volúmenes.

Supóngase que usted trabaja para una estación de radio que utiliza compresión para archivar sus transmisiones. Tiene dos esquemas de compresión para seleccionar, uno de los cuales comprime el espacio de una grabación en un factor de 12 con muy poca pérdida de la calidad del sonido, y la otra que comprime la grabación en un factor de 20 con una pérdida notable de la calidad. Usted tiene 18 horas de audio que archivar. ¿Cuántas de esas 18 horas, o 1080 minutos, deben comprimirse al mayor nivel de grabación para maximizar la calidad global y que aún así quepan las 18 horas en un solo CD?

Para encontrar la respuesta, sea t igual al número de minutos comprimidos a una razón de 12 a 1. Esta parte de la grabación le tomará $t/12$ minutos del espacio en el CD. Los otros $1080 - t$ minutos se comprimirán a una razón de 20 a 1 y tomarán $(1080 - t)/20$ minutos del espacio. Como hay 74 minutos de espacio en el CD, la respuesta se encuentra resolviendo la ecuación lineal

$$\frac{t}{12} + \frac{1080 - t}{20} = 74.$$

La resolución es la siguiente:

$$\begin{aligned} 5t + 3(1080 - t) &= 4440, \\ 2t + 3240 &= 4440, \\ 2t &= 1200, \\ t &= 600. \end{aligned}$$

Así que, usted debe procesar 600 minutos, o 10 horas, a una compresión de 12 a 1, y las restantes 8 horas a una compresión de 20 a 1.

Para aprender más acerca de los esquemas de compresión visite `www.webopedia.com` y busque "data compression" (compresión de datos) y términos relacionados.

Ejercicios

1. Si los modos LP y SP se utilizan para grabar una película de $2\frac{1}{2}$ horas, ¿cuánto tiempo después de iniciada la película debe cambiarse de LP a SP?

2. Si los modos EP y SP se utilizan para grabar un programa de $2\frac{1}{2}$ horas, ¿cuántos minutos después de iniciado el programa debe cambiarse de EP a SP?

3. Si los modos EP y SP se utilizan para grabar una película de 2 horas y 40 minutos, ¿cuánto tiempo después de iniciada la película debe hacerse el cambio de EP a SP?

4. Los modos EP y SP se utilizan para grabar una película de 3 horas. ¿Cuánto tiempo después de iniciada la película se debe cambiar de EP a SP, si el espectador elimina 8 minutos de comerciales cada hora?

5. Utilice la función *Solver* de una calculadora gráfica para resolver la ecuación

$$\frac{x}{12} + \frac{1080 - x}{20} = 74.$$

Después, de una manera similar, resuelva la ecuación

$$\frac{x}{15} + \frac{1590 - x}{24} = 74.$$

6. En el contexto de la grabación comprimida de audio en CDs, ¿qué representa la segunda ecuación en el problema 5?



CAPÍTULO 3

Funciones y gráficas

Supóngase que un hombre de 90 kg bebe cuatro cervezas en rápida sucesión. Sabemos que su concentración de alcohol en la sangre, CAS, primero se eleva y después disminuye en forma paulatina a cero. Pero, ¿cuál es la mejor manera de describir qué tan rápido se eleva la CAS, en dónde alcanza su punto máximo y qué tan rápido disminuye?

Si obtenemos las medidas de los valores de CAS para este bebedor en particular, podemos mostrarlas en una tabla, como sigue:

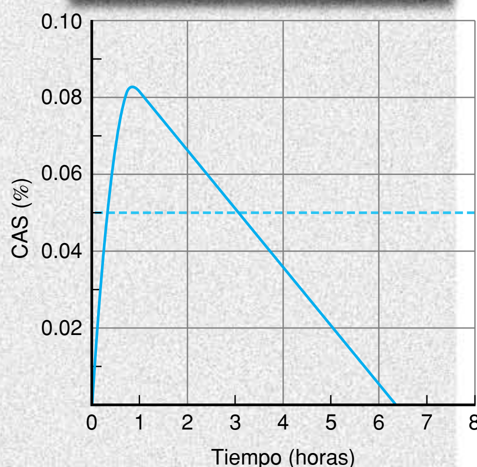
Tiempo (h)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
CAS (%)	0.0820	0.0668	0.0516	0.0364	0.0212	0.0060

Sin embargo, una tabla sólo puede mostrar un número limitado de valores y en realidad no proporciona la imagen global.

En lugar de lo anterior, podríamos relacionar la CAS con el tiempo t si utilizamos una combinación de ecuaciones lineales y cuadráticas (recuerde el cap. 1):

$$\text{CAS} = -0.1025t^2 + 0.1844t \qquad \text{si } t \leq 0.97,$$
$$\text{CAS} = -0.0152t + 0.0972 \qquad \text{si } t > 0.97.$$

Sin embargo, como con la tabla, es difícil ver las ecuaciones y entender rápidamente lo que sucede con la CAS en el transcurso del tiempo.



Quizá la mejor descripción de cambio en la CAS con el tiempo es una gráfica como la de la izquierda. Aquí, con facilidad vemos qué sucede. La concentración de alcohol en la sangre asciende rápidamente, tiene un máximo de 0.083% después de aproximadamente una hora, y luego disminuye de manera gradual durante las siguientes cinco horas y media. Observe que por más de tres horas la CAS de este bebedor está por arriba de 0.05%, el punto en el que, por lo regular, las habilidades que uno tiene para conducir algún vehículo empiezan a declinar. La curva variará de un bebedor a otro, pero las mujeres por lo común se ven afectadas con mayor severidad que los hombres, no sólo a causa de la diferencia de peso, sino también a consecuencia del diferente contenido de agua entre los cuerpos de ambos sexos.

La relación entre el tiempo y el contenido de alcohol en la sangre, es un ejemplo de una función. Este capítulo trata a fondo las funciones y sus gráficas.

OBJETIVO Entender lo que es una función y determinar dominios y valores de una función.

3.1 FUNCIONES

En el siglo XVII, Gottfried Wilhelm Leibniz, uno de los inventores del cálculo, introdujo el término *función* en el vocabulario matemático. El concepto de función es uno de los más básicos en todas las matemáticas y es esencial para el estudio del cálculo.

En forma breve, una función es un tipo especial de relación que expresa cómo una cantidad (la *salida*) depende de otra cantidad (la *entrada*). Por ejemplo, cuando se invierte dinero a alguna tasa de interés, el interés I (salida) depende del tiempo t (entrada) que el dinero esté invertido. Para expresar esta dependencia, decimos que I es una "función de" t. Las relaciones funcionales como ésta en general se especifican mediante una fórmula que muestra lo que debe hacerse con la entrada para determinar la salida.

Para ejemplificar esto, suponga que \$100 ganan un interés simple a una tasa anual del 6%. Entonces, puede mostrarse que el interés y el tiempo están relacionados por la fórmula

$$I = 100(0.06)t, \qquad (1)$$

donde I está en dólares y t en años. Por ejemplo,

$$\text{si } t = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{entonces} \qquad I = 100(0.06)\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3. \qquad (2)$$

Así, la fórmula (1) asigna a la entrada $\frac{1}{2}$ la salida 3. Podemos pensar en la fórmula (1) como la definición de una *regla*: multiplicar t por 100(0.06). La regla asigna a cada número de entrada t exactamente un número de salida I, el cual se simboliza mediante la siguiente notación de flecha:

$$t \to I \qquad \text{o} \qquad t \to 100(0.06)t.$$

Esta regla es un ejemplo de una *función* en el siguiente sentido:

Definición

Una ***función*** es una regla que asigna a cada número de entrada exactamente un número de salida. Al conjunto de números de entrada para los cuales se aplica la regla se le llama el ***dominio*** de la función. El conjunto de todos los números de salida se llama el ***rango***.

Para la función del interés definida por la fórmula (1), el número de entrada t no puede ser negativo, ya que el tiempo negativo no tiene sentido. Así, el dominio consiste en todos los números no negativos; esto es, todo $t \geq 0$. De (2) vemos que cuando la entrada es $\frac{1}{2}$, la salida es 3. De modo que 3 está en el rango.

Hasta aquí hemos usado el término *función* en un sentido restringido, ya que en general, las entradas o salidas no tienen por qué ser números. Por ejemplo, una lista de estados y capitales asigna a cada estado su capital (exactamente una salida), de modo que hay una función implicada. Sin embargo, por el momento sólo consideraremos las funciones cuyos dominios y rangos consistan en números reales.

Una variable que representa a los números de entrada para una función se denomina **variable independiente.** Una variable que representa a los números de salida se denomina **variable dependiente,** ya que su valor *depende* del valor de *la variable independiente*. Decimos que la variable dependiente es una *función de la variable independiente*. Esto es, la salida es una función de la entrada. Así, para la fórmula de interés $I = 100(0.06)t$, la variable independiente es t, la dependiente es I, e I es una función de t.

Como otro ejemplo, la ecuación (o fórmula):

$$y = x + 2 \qquad (3)$$

define a y como una función de x. La ecuación da la regla: "sumar 2 a x". Esta regla asigna a cada entrada x exactamente una salida $x + 2$, que es y. Si $x = 1$,

entonces $y = 3$; si $x = -4$, entonces $y = -2$. La variable independiente es x y la dependiente y.

En $y^2 = x$, x y y están relacionadas, pero la relación no es una función de x.

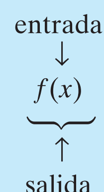
No todas las ecuaciones en x y y definen a y como una función de x. Por ejemplo, sea $y^2 = x$. Si x es 9, entonces $y^2 = 9$, de modo que $y = \pm 3$. Por tanto, para la entrada 9 se asigna no uno, sino *dos* números de salida, 3 y -3. Esto viola la definición de una función, de modo que y **no** es una función de x.

Por otra parte, algunas ecuaciones en dos variables definen a cualquiera de las variables como una función de la otra variable. Por ejemplo, si $y = 2x$, entonces para cada entrada x, existe exactamente una salida, $2x$. Por lo que y es función de x. Sin embargo, al despejar x de la ecuación se obtiene $x = y/2$. Para cada entrada y, existe exactamente una salida, $y/2$. En consecuencia, x es una función de y.

En general, las letras f, g, h, F, G, etc., se usan para representar reglas de funciones. Por ejemplo, la ecuación (3), $y = x + 2$, define a y como una función de x, en donde la regla es "sumar 2 a la entrada". Suponga que hacemos que f represente esta regla. Entonces decimos que f es la función. Para indicar que f asigna a la entrada 1 la salida 3, escribimos $f(1) = 3$, que se lee "f de 1 es igual a 3". En forma análoga, $f(-4) = -2$. En términos generales, si x es cualquier entrada tenemos la notación:

$f(x)$ es un número de salida.

$f(x)$, que se lee "f de x", representa el número de salida en el rango de f que corresponde al número de entrada x en el dominio.



Así el resultado $f(x)$ es lo mismo que y. Pero como $y = x + 2$, podemos escribir $y = f(x) = x + 2$ o simplemente

$$f(x) = x + 2.$$

Por ejemplo, para encontrar $f(3)$, que es la salida correspondiente a la entrada 3, reemplazamos con 3 cada x en $f(x) = x + 2$:

$$f(3) = 3 + 2 = 5.$$

Del mismo modo,

$$f(8) = 8 + 2 = 10,$$

$$f(-4) = -4 + 2 = -2.$$

Los números de salida como $f(-4)$ se llaman **valores de la función** (o valores funcionales). Tenga en mente que están en el rango de f.



Advertencia $f(x)$ **no** significa f veces x, $f(x)$ es la salida que corresponde a la entrada x.

La notación funcional es muy utilizada en cálculo.

Con mucha frecuencia, las funciones se definen por medio de la "notación funcional". Por ejemplo, la ecuación $g(x) = x^3 + x^2$, define a la función g que asigna a cada número de entrada x el número de salida $x^3 + x^2$:

$$g\colon\ x \to x^3 + x^2.$$

En otras palabras, g suma el cubo y el cuadrado de un número de entrada. Algunos valores de la función son:

$$g(2) = 2^3 + 2^2 = 12,$$
$$g(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0,$$
$$g(t) = t^3 + t^2,$$
$$g(x + 1) = (x + 1)^3 + (x + 1)^2.$$

La idea de *reemplazo* es muy importante en la determinación de los valores funcionales.

Observe que $g(x + 1)$ se encontró al reemplazar cada x en $x^3 + x^2$ por la entrada $x + 1$.

Cuando hagamos referencia a la función g definida por $g(x) = x^3 + x^2$, con toda libertad llamaremos a la ecuación "función". Así, hablamos de "la función $g(x) = x^3 + x^2$", y de manera análoga, "la función $y = x + 2$".

Seamos más específicos acerca del dominio de una función. A menos que se establezca otra cosa, el dominio consiste en todos los números reales para los cuales la regla de la función tenga sentido, esto es, la regla proporciona valores funcionales que sean números reales.

Por ejemplo, suponga

$$h(x) = \frac{1}{x - 6}.$$

Aquí cualquier número real puede usarse para x, excepto 6, ya que el denominador es cero cuando x es 6. Por tanto, el dominio de h se entenderá que es todos los números reales excepto 6.

Principios en práctica 1
Determinación de dominios

El área de un círculo depende de la longitud del radio del círculo.

a. Escriba una función $a(r)$ para el área de un círculo cuando la longitud del radio es r.
b. ¿Cuál es el dominio de esta función, sin tomar en cuenta el contexto?
c. ¿Cuál es el dominio de esta función, tomando en cuenta el contexto?

EJEMPLO 1 Determinación de dominios

Encontrar el dominio de cada función.

a. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$.

Solución: no podemos dividir entre cero, así que debemos encontrar todos los valores de x que hacen que el denominador sea cero. Éstos *no pueden* ser números de entrada. Entonces igualamos el denominador a cero y resolvemos para x.

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{(ecuación cuadrática)},$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0 \quad \text{(factorizando)},$$
$$x = 2, -1.$$

Por consiguiente, el dominio de f son todos los números reales *excepto* 2 y -1.

b. $g(t) = \sqrt{2t - 1}$.

Solución: $\sqrt{2t - 1}$ es un número real si $2t - 1$ es mayor o igual a cero. Si $2t - 1$ es negativo, entonces $\sqrt{2t - 1}$ no es un número real (*es un número imaginario*). Ya que los valores de la función deben ser números reales, debemos suponer que:

$$2t - 1 \geq 0,$$
$$2t \geq 1 \quad \text{(sumando 1 a ambos miembros)},$$
$$t \geq \frac{1}{2} \quad \text{(dividiendo ambos miembros entre 2)}.$$

Por tanto, el dominio es el intervalo $[\frac{1}{2}, \infty)$.

■ ***Principios en práctica 2***
Determinación del dominio y de los valores funcionales

El tiempo que toma recorrer una distancia dada depende de la rapidez a la cual se haga el recorrido.

a. Escriba una función $t(r)$ para el tiempo que toma, si la distancia es 300 millas y la rapidez es r.
b. ¿Cuál es el dominio de esta función, sin tomar en cuenta el contexto?
c. ¿Cuál es el dominio de esta función en el contexto dado?
d. Determine $t(x)$, $t\left(\frac{x}{2}\right)$, y $t\left(\frac{x}{4}\right)$.
e. ¿Qué le sucede al tiempo, si la rapidez se reduce (divide) por una constante c? Describa esta situación utilizando una ecuación.

■ **EJEMPLO 2 Determinación del dominio y de los valores funcionales**

Sea $g(x) = 3x^2 - x + 5$. Cualquier número real puede utilizarse como x, de modo que el dominio de g son todos los números reales.

a. *Encontrar* $g(z)$.

Solución: al reemplazar cada x por z en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ se obtiene

$$g(z) = 3(z)^2 - z + 5 = 3z^2 - z + 5.$$

b. *Encontrar* $g(r^2)$.

Solución: al reemplazar cada x por r^2 *en* $g(x) = 3x^2 - x + 5$ se obtiene

$$g(r^2) = 3(r^2)^2 - r^2 + 5 = 3r^4 - r^2 + 5.$$

c. *Encontrar* $g(x + h)$.

Solución:

$$\begin{aligned} g(x + h) &= 3(x + h)^2 - (x + h) + 5 \\ &= 3(x^2 + 2hx + h^2) - x - h + 5 \\ &= 3x^2 + 6hx + 3h^2 - x - h + 5. \end{aligned}$$


Advertencia No confunda la notación. En el ejemplo 2(c), encontramos $g(x + h)$ al reemplazar cada x en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ por la entrada $x + h$. **No** escriba la función y luego sume h. Esto es, $g(x + h) \neq g(x) + h$:

$$g(x + h) \neq 3x^2 - x + 5 + h.$$

Tampoco utilice la ley distributiva en $g(x + h)$, esto **no** representa una multiplicación. Esto es,

$$g(x + h) \neq g(x) + g(h).$$

■ **EJEMPLO 3 Determinación de un cociente de diferencia**

Si $f(x) = x^2$, *determinar* $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

El cociente de diferencia de una función es un importante concepto matemático.

Solución: la expresión $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ se conoce como un **cociente de diferencia.** Aquí el numerador es una diferencia de valores funcionales. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + h. \end{aligned}$$

En algunos casos, el dominio de una función está restringido por razones físicas o económicas. Por ejemplo, en la función de interés vista anteriormente, $I = 100(0.06)t$ tiene $t \geq 0$, ya que t representa el tiempo. El ejemplo 4 da otra ilustración.

Principios en práctica 3

Función de demanda

Supóngase que la función de demanda semanal para pizzas grandes en una pizzería es

$p = 26 - \frac{q}{40}$.

a. Si el precio actual es \$18.50 por pizza, ¿cuántas pizzas se venden por semana?

b. Si se venden 200 pizzas cada semana, ¿cuál es el precio actual?

c. Si el propietario quiere duplicar el número de pizzas grandes vendidas por semana (a 400), ¿cuál debe ser su precio?

EJEMPLO 4 Función de demanda

Suponga que la ecuación $p = 100/q$ describe la relación entre el precio por unidad p de cierto producto, y el número de unidades q del producto que los consumidores comprarán (demanda) por semana a ese precio. Esta ecuación se llama *ecuación de demanda* para el producto. Si q es un número de entrada, entonces para cada valor de q se asigna exactamente un número de salida p:

$$q \rightarrow \frac{100}{q} = p.$$

Por ejemplo,

$$20 \rightarrow \frac{100}{20} = 5;$$

esto es, cuando q es 20, entonces p es 5. Así, el precio p es una función de la cantidad demandada, q. Esta función se llama **función de demanda.** La variable independiente es q, y p es la variable dependiente. Ya que q no puede ser cero (la división entre cero no está definida) y no puede ser negativa (q representa una cantidad), el dominio son todos los valores de q tales que $q > 0$.

Hemos visto que una función es en esencia una *correspondencia* por la que a cada número de entrada en el dominio, se asigna un número de salida en el rango. Para la correspondencia dada por $f(x) = x^2$, algunos ejemplos de asignaciones se muestran por medio de flechas en la figura 3.1. El ejemplo siguiente muestra una correspondencia funcional que no está dada por medio de una fórmula algebraica.

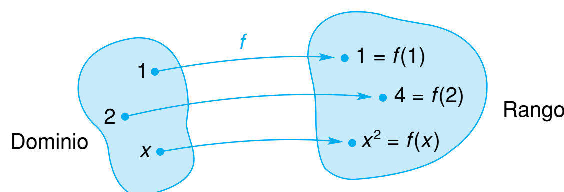


FIGURA 3.1 Correspondencia funcional para $f(x) = x^2$.

PROGRAMACIÓN DE OFERTA

p Precio por unidad en dólares	q Cantidad ofrecida por semana
500	11
600	14
700	17
800	20

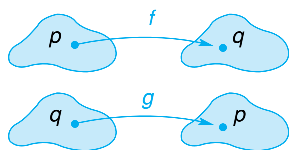


FIGURA 3.2 Programación de oferta y funciones de oferta.

EJEMPLO 5 Programa de oferta

La tabla de la figura 3.2 es un *programa de oferta*. Da una correspondencia entre el precio p de cierto producto y la cantidad q que los fabricantes proporcionan por semana a ese precio. A cada precio le corresponde exactamente una cantidad y viceversa.

Si p es la variable independiente, entonces q es una función de p, digamos $q = f(p)$, y

$$f(500) = 11, \quad f(600) = 14, \quad f(700) = 17, \quad \text{y} \quad f(800) = 20.$$

Observe que cuando el precio por unidad se incrementa, los fabricantes están dispuestos a surtir más unidades por semana.

Por otra parte, si q es la variable independiente, entonces p es una función de q, digamos $p = g(q)$, y

$$g(11) = 500, \quad g(14) = 600, \quad g(17) = 700, \quad \text{y} \quad g(20) = 800.$$

Hablamos de f y g como **funciones de oferta.**

Tecnología

X	Y_1
.7	6.6227
-2.31	651.3
10	157007

X=10

FIGURA 3.3 Tabla de valores funcionales de $f(x) = 17x^4 - 13x^3 + 7$.

Los valores de una función se calculan fácilmente con una calculadora gráfica. Por ejemplo, suponga que:

$$f(x) = 17x^4 - 13x^3 + 7,$$

y que deseamos encontrar $f(0.7)$, $f(-2.31)$ y $f(10)$. Con una calculadora TI-83, primero introducimos la función como Y_1:

$$Y_1 = 17X\hat{}4 - 13X\hat{}3 + 7.$$

Después presionamos la tecla *TABLE* y de manera sucesiva introducimos los valores para x .7, −2.31 y 10. Los resultados se muestran en la figura 3.3. Hacemos notar que existen otros métodos para determinar los valores funcionales por medio de la TI-83.

Ejercicio 3.1

En los problemas del 1 al 12 obtenga el dominio de cada función.

1. $f(x) = \frac{8}{x}$.

2. $g(x) = \frac{x}{5}$.

3. $h(x) = \sqrt{x-3}$.

4. $H(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$.

5. $F(t) = 4t^2 - 6$.

6. $H(x) = \frac{x}{x+8}$.

7. $f(x) = \frac{9x-9}{2x+7}$.

8. $g(x) = \sqrt{4x+3}$.

9. $G(y) = \frac{4}{y^2-y}$.

10. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+6x+5}$.

11. $h(s) = \frac{4-s^2}{2s^2-7s-4}$.

12. $G(r) = \frac{2}{r^2+1}$.

En los problemas del 13 al 24 determine los valores de la función para cada una de las funciones.

13. $f(x) = 2x + 1$; $f(0), f(3), f(-4)$.

14. $H(s) = 5s^2 - 3$; $H(4), H(\sqrt{2}), H(\frac{2}{3})$.

15. $G(x) = 2 - x^2$; $G(-8), G(u), G(u^2)$.

16. $f(x) = 7x$; $f(s), f(t+1), f(x+3)$.

17. $g(u) = u^2 + u$; $g(-2), g(2v), g(-x^2)$.

18. $h(v) = \frac{1}{\sqrt{v}}$; $h(16), h\left(\frac{1}{4}\right), h(1-x)$.

19. $f(x) = x^2 + 2x + 1$; $f(1), f(-1), f(x+h)$.

20. $H(x) = (x+4)^2$; $H(0), H(2), H(t-4)$.

21. $g(x) = \frac{x-4}{x^2+5}$; $g(5), g(3x), g(x+h)$.

22. $H(x) = \sqrt{4+x}$; $H(-4), H(-3), H(x+1) - H(x)$.

23. $f(x) = x^{4/3}$; $f(0), f(64), f(\frac{1}{8})$.

24. $g(x) = x^{2/5}$; $g(32), g(-64), g(t^{10})$.

En los problemas del 25 al 32 determine (a) $f(x+h)$ y (b) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; simplifique sus respuestas.

25. $f(x) = 4x - 5$.

26. $f(x) = \frac{x}{2}$.

27. $f(x) = x^2 + 2x$.

28. $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$.

29. $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$.

30. $f(x) = x^3$.

31. $f(x) = \frac{1}{x}$.

32. $f(x) = \frac{x+8}{x}$.

33. Si $f(x) = 9x + 7$, determine $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

34. Si $f(x) = x^2 - x$, determine $\frac{f(x) - f(4)}{x-4}$.

En los problemas del 35 al 38, ¿es y una función de x? ¿Es x una función de y?

35. $9y - 3x - 4 = 0$.

36. $x^2 + y = 0$.

37. $y = 7x^2$.

38. $x^2 + y^2 = 1$.

39. La fórmula para el área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$. ¿Es el área una función del radio?

40. Suponga que $f(b) = ab^2 + a^2b$. (a) Determine $f(a)$. (b) Determine $f(ab)$.

41. Valor de un negocio Un negocio con un capital original de $20,000 tiene ingresos y gastos semanales de $4000 y $3200, respectivamente. Si todas las utilidades se conservan en el negocio, exprese el valor V del negocio al final de t semanas como una función de t.

42. Depreciación Si una máquina de $30,000 se deprecia en un 2% de su valor original cada año, determine una función f que exprese el valor, V, de la máquina después que han transcurrido t años.

43. Función de utilidad Cuando se venden q unidades de cierto producto (q es no negativa), la utilidad P está dada por la ecuación $P = 1.25q$. ¿Es P una función de q? ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?

44. Función de demanda Supóngase que la función de demanda anual para que un actor particular estelarice una película es $p = \frac{1,200,000}{q}$, en donde q es el número de películas que él estelariza durante el año. Si el actor actualmente cobra $600,000 por película, ¿cuántas películas estelariza cada año? Si quiere estelarizar cuatro películas por año, ¿cuánto cobrará por esto?

45. Función de oferta Supóngase que la función de oferta semanal por una libra de su café casero en un local de venta de café es $p = \frac{q}{50}$, en donde q es el número de libras de café que se ofrecen por semana. ¿Cuántas libras de café a la semana deben ofrecerse si el precio es de $8.00 por libra? ¿Cuántas libras de café a la semana deben ofrecerse si el precio es de $20.00 por libra? ¿Cómo cambia la cantidad ofrecida conforme el precio se incrementa?

46. Altas del hospital Una compañía de seguros examinó el registro de un grupo de individuos hospitalizados por una enfermedad en particular. Se encontró que la proporción total de quienes habían sido dados de alta al final de t días de hospitalización está dada por

$$f(t) = 1 - \left(\frac{300}{300 + t}\right)^3.$$

Evalúe (a) $f(0)$, (b) $f(100)$ y (c) $f(300)$. (d) ¿Al final de cuántos días se habrá dado de alta al 99.9% (0.999) del grupo?

47. Psicología Se llevó a cabo un experimento para analizar la respuesta humana a descargas eléctricas.[1] Los sujetos recibieron una descarga de cierta intensidad. Se les pidió asignar una magnitud de 10 a esta descarga en particular, llamada estímulo estándar. Después se les aplicaron otras descargas (estímulos) de varias intensidades. Para cada una de éstas la respuesta R era un número que indicaba la magnitud percibida de la descarga en relación con aquélla del estímulo estándar. Se encontró que R era una función de la intensidad I de la descarga (I *en microamperes*) y se estimó por

$$R = f(I) = \frac{I^{4/3}}{2500}, \qquad 500 \leq I \leq 3500.$$

Evalúe (a) $f(1000)$ y (b) $f(2000)$. (c) Suponga que I_0 y $2I_0$ están en el dominio de f. Exprese $f(2I_0)$ en términos de $f(I_o)$. ¿Qué efecto sobre la respuesta tiene el duplicar la intensidad?

48. Psicología En un experimento de aprendizaje por asociación de parejas,[2] la probabilidad de una respuesta correcta como función del número n de intentos tiene la forma

$$P(n) = 1 - \frac{1}{2}(1 - c)^{n-1}, \qquad n \geq 1,$$

donde el valor estimado de c es 0.344. Usando este valor de c, determine $P(1)$ y $P(2)$.

49. Programa de oferta La tabla siguiente se conoce como un *programa de oferta*. Dicha tabla proporciona una correspondencia entre el precio p de un producto y la cantidad q que los consumidores demandarán (esto es, comprarán) a ese precio. (a) Si $p = f(q)$, liste los números en el dominio de f. Determine $f(2900)$ y $f(3000)$. (b) Si $q = g(p)$, liste los números en el dominio de g. Determine $g(10)$ y $g(17)$.

Precio por unidad, p	**Cantidad demandada por semana, q**
$10	3000
12	2900
17	2300
20	2000

En los problemas del 50 al 53 utilice su calculadora para determinar los valores funcionales indicados para la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

50. $f(x) = 2.03x^3 - 5.27x^2 - 13.71$; (a) $f(1.73)$, (b) $f(-5.78)$, (c) $f(\sqrt{2})$.

51. $f(x) = \frac{14.7x^2 - 3.95x - 15.76}{24.3 - x^3}$; (a) $f(4)$, (b) $f(-17/4)$, (c) $f(\pi)$.

52. $f(x) = (20 - 3x)(2.25x^2 - 7.1x - 16)^4$; (a) $f(0.1)$, (b) $f(-0.01)$, (c) $f(1.6)$.

53. $f(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}x^2 + 47.62(x + 1)}{9.07}}$; (a) $f(15.93)$, (b) $f(-146)$, (c) $f(0)$.

[1] Adaptado de H. Babkoff, "Magnitude Estimation of Short Electrocutaneous Pulses", *Psychological Research*, 39, núm. 1 (1976), 39-49.

[2] D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York: Academic Press, 1983).

OBJETIVO Introducir los conceptos de función constante, función polinomial, función racional, función definida por partes, función valor absoluto y notación factorial.

3.2 FUNCIONES ESPECIALES

En esta sección veremos funciones que tienen formas y representaciones especiales. Empezamos con el que tal vez sea el tipo más sencillo de función que existe: una *función constante*.

Principios en práctica 1
Función constante

Supóngase que las primas mensuales del seguro de salud para un individuo son de $125.00.

a. Escriba las primas mensuales del seguro de salud como una función del número de visitas que el individuo hace al doctor.
b. ¿Cómo cambian las primas del seguro de salud conforme aumenta el número de visitas al doctor?
c. ¿Qué clase de función es ésta?

EJEMPLO 1 Función constante

Sea $h(x) = 2$. El dominio de h son todos los números reales. Todos los valores funcionales son 2. Por ejemplo,

$$h(10) = 2, \qquad h(-387) = 2, \qquad h(x + 3) = 2.$$

Llamamos a h una *función constante* ya que todos los valores de la función son iguales. En forma más general, tenemos esta definición:

Una función de la forma $h(x) = c$, en donde c es una *constante*, se llama **función constante.**

Una función constante pertenece a una clase más amplia de funciones llamadas *funciones polinomiales*. En general, una función de la forma

$$f(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0,$$

Cada término en una función polinomial es una constante o bien una constante por una potencia entera positiva de x.

en donde n es un entero no negativo y $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0$ son constantes con $c_n \neq 0$ se llama **función polinomial** (en x). El número n se llama el **grado** del polinomio, y c_n *es el* **coeficiente principal**. Así,

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 9$$

es una función polinomial de grado 2 con coeficiente principal 3. Del mismo modo, $g(x) = 4 - 2x$ tiene grado 1 y coeficiente principal -2. Las funciones polinomiales de grado 1 o 2 son llamadas **funciones lineales** o **cuadráticas,** respectivamente. De aquí que, $g(x) = 4 - 2x$ es lineal y $f(x) = 3x^2 - 8x + 9$ es cuadrática. Observe que una función constante distinta de cero, tal como $f(x) = 5$ [la cual puede escribirse como $f(x) = 5x^0$], es una función polinomial de grado cero. La función constante $f(x) = 0$ también se considera una función polinomial, pero no tiene asignado algún grado. El dominio de cualquier función polinomial son todos los números reales.

Principios en práctica 2
Funciones polinomiales

La función $d(t) = 3t^2$ representa la distancia en metros que un automóvil viajará en t segundos, cuando tiene una aceleración constante de 6 m/s^2.

a. ¿Qué clase de función es ésta?
b. ¿De qué grado es?
c. ¿Cuál es su coeficiente principal?

EJEMPLO 2 Funciones polinomiales

a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$ es una función polinomial de grado 3 con coeficiente principal 1.

b. $g(x) = \dfrac{2x}{3}$ es una función lineal con coeficiente principal $\dfrac{2}{3}$.

c. $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ *no* es una función polinomial. Puesto que $f(x) = 2x^{-3}$ y el ex-

p o -

nente para x no es un entero no negativo, esta función no tiene la forma propia de las polinomiales. En forma similar, $g(x) = \sqrt{x}$ no es función polinomial porque $g(x) = x^{1/2}$.

Una función que es un cociente de funciones polinomiales se llama **función racional.**

EJEMPLO 3 Funciones racionales

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{x + 5}$ es una función racional, ya que el numerador y el denominador son funciones polinomiales. Observe que esta función racional no está definida para $x = -5$.

b. $g(x) = 2x + 3$ es una función racional, ya que $2x + 3 = \dfrac{2x + 3}{1}$. De hecho, toda función polinomial también es una función racional.

Toda función polinomial es una función racional.

Algunas veces es necesaria más de una expresión para definir una función, como lo muestra el ejemplo 4.

Principios en práctica 3
Función compuesta

Para reducir el inventario, una tienda departamental cobra tres precios. Si compra de cero a cinco pares de medias, el precio es de \$3.50 por par. Si compra de 6 a 10 pares de medias, el precio es \$3.00 por par. Si compra más de 10 pares, el precio es de \$2.75 por par. Escriba una función definida por partes para representar el costo de compra de n pares de medias.

EJEMPLO 4 Función compuesta

Sea

$$F(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 \le s < 1, \\ 0, & \text{si } 1 \le s \le 2, \\ s - 3 & \text{si } 2 < s \le 8. \end{cases}$$

Ésta se llama **función compuesta,** ya que su regla está dada por más de una expresión. Aquí s es la variable independiente, y el dominio F es toda s tal que $-1 \le s \le 8$. El valor de s determina cuál expresión usar.

Determinar $F(0)$: como $-1 \le 0 < 1$, tenemos $F(0) = 1$.

Determinar $F(2)$: como $1 \le 2 \le 2$, tenemos $F(2) = 0$.

Determinar $F(7)$: como $2 < 7 \le 8$, sustituimos 7 por la s en $s - 3$.

$$F(7) = 7 - 3 = 4.$$

Tecnología

Para ilustrar cómo introducir una función definida por partes en una calculadora TI-83, la figura 3.4 muestra la secuencia de pasos que introducen la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0, \\ x^2, & \text{si } 0 \le x < 10, \\ -x, & \text{si } x \ge 10. \end{cases}$$

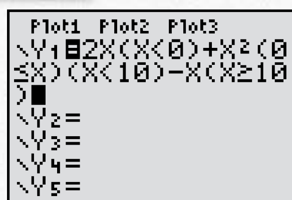


FIGURA 3.4 Introducción de una función definida por partes.

EJEMPLO 5 Función valor absoluto

La función $f(x) = |x|$ es la *función valor absoluto*. Recuerde que el **valor absoluto** o **magnitud,** de un número real x se denota por $|x|$ y se define por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La función valor absoluto puede considerarse una función definida por partes.

Por eso el dominio de f son todos los números reales. Algunos valores funcionales son

$$f(16) = |16| = 16,$$
$$f(-\tfrac{4}{3}) = |-\tfrac{4}{3}| = -(-\tfrac{4}{3}) = \tfrac{4}{3},$$
$$f(0) = |0| = 0.$$

En los ejemplos siguientes hacemos uso de la *notación factorial*.

El símbolo $r!$, r es un entero positivo, se lee "***r* factorial**". Representa el producto de los primeros r enteros positivos:

$$r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r.$$

Definimos 0! como 1.

Principios en práctica 4
Factoriales

Siete libros diferentes se colocarán en una repisa. ¿De cuántas formas pueden acomodarse? Represente la pregunta como un problema de factoriales y dé la solución.

EJEMPLO 6 Factoriales

a. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

b. $3!(6 - 5)! = 3! \cdot 1! = (3 \cdot 2 \cdot 1)(1) = (6)(1) = 6.$

c. $\dfrac{4!}{0!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = \dfrac{24}{1} = 24.$

EJEMPLO 7 Genética

Suponga que dos conejillos de Indias negros se reproducen y tienen cinco descendientes. Bajo ciertas condiciones puede mostrarse que la probabilidad P de que exactamente r de los descendientes sean de color café y los otros negros, es una función de r, digamos $P = P(r)$, donde

$$P(r) = \frac{5!\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{5-r}}{r!(5-r)!}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, 5.$$

Los factoriales aparecen con frecuencia en la teoría de probabilidad.

La letra P en $P = P(r)$ se utiliza en dos formas. En el lado derecho P representa la regla de la función. En el izquierdo representa la variable dependiente. El dominio de P son todos los enteros desde 0 hasta 5, inclusive. Determinar la probabilidad de que exactamente tres conejillos de Indias sean de color café.

Solución: queremos encontrar $P(3)$. Tenemos

$$P(3) = \frac{5!\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2}{3!2!} = \frac{120\left(\frac{1}{64}\right)\left(\frac{9}{16}\right)}{6(2)} = \frac{45}{512}.$$

Ejercicio 3.2

En los problemas del 1 al 4 determine si la función dada es una función polinomial.

1. $f(x) = x^2 - x^4 + 4$.

2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 7}{3}$.

3. $g(x) = \dfrac{3}{x^2 + 7}$.

4. $g(x) = 3^{-2}x^2$.

En los problemas del 5 al 8 determine si la función dada es una función racional.

5. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3 + 4}$.

6. $f(x) = \dfrac{3}{2x + 1}$.

7. $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 5, \\ 4 & \text{si } x \geq 5. \end{cases}$

8. $g(x) = 4x^{-4}$.

En los problemas del 9 al 12 determine el dominio de cada función.

9. $H(z) = 16$.

10. $f(t) = \pi$.

11. $f(x) = \begin{cases} 5x, & \text{si } x > 1, \\ 4, & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x = 3, \\ x^2, & \text{si } 1 \leq x < 3. \end{cases}$

En los problemas del 13 al 16 establezca (a) el grado y (b) el coeficiente principal de la función polinomial dada.

13. $F(x) = 7x^3 - 2x^2 + 6$.

14. $f(x) = 5x$.

15. $f(x) = 2 - 3x^4 + 2x$.

16. $f(x) = 9$.

En los problemas del 17 al 22 determine los valores funcionales para cada función.

17. $f(x) = 8$; $f(2), f(t + 8), f(-\sqrt{17})$.

18. $g(x) = |x - 3|$; $g(10), g(3), g(-3)$.

19. $F(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t = 0; \\ -1, & \text{si } t < 0 \end{cases}$

$F(10), F(-\sqrt{3}), F(0), F(-\frac{18}{5})$.

20. $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x \geq 0 \\ 3, & \text{si } x < 0 \end{cases}$;

$f(3), f(-4), f(0)$.

21. $G(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 3 \\ 2 - x^2, & \text{si } x < 3 \end{cases}$;

$G(8), G(3), G(-1), G(1)$.

22. $h(r) = \begin{cases} 3r - 1, & \text{si } r > 2 \\ r^2 - 4r + 7, & \text{si } r < 2 \end{cases}$;

$h(3),\ h(-3),\ h(2)$.

En los problemas del 23 al 28 determine el valor de cada expresión.

23. $6!$.

24. $0!$.

25. $(4 - 2)!$.

26. $5! \cdot 3!$.

27. $\dfrac{5!}{4!}$.

28. $\dfrac{8!}{5!(8 - 5)!}$.

---

29. Viaje en tren Un boleto de viaje redondo en tren a la ciudad cuesta \$4.50. Escriba el costo de un boleto de viaje redondo como función del ingreso del pasajero. ¿Qué clase de función es ésta?

30. Geometría Un prisma rectangular tiene un largo tres veces mayor que su ancho, y altura una unidad menor que el doble del ancho. Escriba el volumen del prisma rectangular como una función del ancho. ¿Qué clase de función es ésta?

31. Función de costo En la fabricación de un componente para una máquina, el costo inicial de un troquel es de \$850 y todos los otros costos adicionales son de \$3 por unidad producida. (a) Exprese el costo total C (en dólares) como una función lineal del número q de unidades producidas. (b) ¿Cuántas unidades se producen si el costo total es de \$1600?

32. Inversión Si un capital de P dólares se invierte a una tasa de interés simple anual r durante t años, exprese la cantidad total acumulada del capital y del interés como una función de t. ¿Su resultado es una función lineal de t?

33. Ventas Para alentar la venta en grupos grandes, un teatro cobra dos precios. Si su grupo es menor de 10, cada boleto cuesta \$8.50. Si su grupo es de 10 o más, cada boleto cuesta \$8.00. Escriba una función definida por partes para representar el costo de comprar n boletos.

34. Factoriales En un parque de diversiones, un grupo de amigos quiere viajar en los troncos en todos los órdenes posibles. ¿Cuántos viajes tiene que hacer un grupo de tres? ¿Cuántos un grupo de cuatro? ¿Un grupo de cinco?

35. Genética Bajo ciertas condiciones, si dos padres con ojos de color café tienen exactamente tres hijos, la probabilidad P de que tengan exactamente r hijos con ojos azules está dada por la función $P = P(r)$, donde

$$P(r) = \frac{3!\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{3-r}}{r!(3 - r)!}, \qquad r = 0, 1, 2, 3.$$

Determine la probabilidad de que exactamente dos de los hijos tengan los ojos azules.

36. Genética En el ejemplo 7 determine la probabilidad de que los cinco descendientes tengan ojos de color café.

37. Crecimiento de bacterias En un cultivo están desarrollándose bacterias. El tiempo t (en horas) para que el número de bacterias se duplique (tiempo de generación), es una función de la temperatura T (en °C) del cultivo. Si esta función está dada por[3]

$$t = f(T) = \begin{cases} \frac{1}{24}T + \frac{11}{4}, & \text{si } 30 \leq T \leq 36, \\ \frac{4}{3}T - \frac{175}{4}, & \text{si } 36 < T \leq 39, \end{cases}$$

(a) determine el dominio de f, y (b) encuentre $f(30)$, $f(36)$ y $f(39)$.

En los problemas del 38 al 41 utilice su calculadora para encontrar los valores funcionales indicados para la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

38. $f(x) = \begin{cases} 0.08x^5 - 47.98, & \text{si } x \geq 7.98 \\ 0.67x^6 - 37.41, & \text{si } x < 7.98; \end{cases}$

(a) $f(7.98)$, (b) $f(2.26)$, (c) $f(9)$.

39. $f(x) = \begin{cases} 47.1x^5 + 30.4, & \text{si } x > 0 \\ 9.4x^3 - x, & \text{si } x \leq 0; \end{cases}$

(a) $f(5.5)$, (b) $f(-3.6)$, (c) $f(6/7)$.

40. $f(x) = \begin{cases} 4.07x - 2.3 & \text{si } x < -8 \\ 19.12, & \text{si } -8 \leq x < -2; \\ x^2 - 4x^{-2}, & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

(a) $f(-5.8)$, (b) $f(-14.9)$, (c) $f(7.6)$

41. $f(x) = \begin{cases} x/(x+3), & \text{si } x < -5 \\ x(x-4)^2, & \text{si } -5 \leq x < 0; \\ \sqrt{2.1x + 3}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(a) $f(-\sqrt{30})$, (b) $f(46)$, (c) $f(-2/3)$.

3.3 Combinación de funciones

OBJETIVO Combinar funciones por medio de suma, resta, multiplicación, división y composición.

Existen diferentes formas de combinar dos funciones para crear una nueva función. Suponga que f y g son las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = 3x.$$

Sumando $f(x)$ y $g(x)$ se obtiene

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3x.$$

Esta operación define una nueva función llamada *suma* de f y g, que se denota por $f + g$. Su valor funcional en x es $f(x) + g(x)$. Esto es,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x.$$

Por ejemplo,

$$(f + g)(2) = 2^2 + 3(2) = 10.$$

En general, para cualesquiera funciones f y g, definimos la **suma** $\boldsymbol{f + g}$, la **diferencia** $\boldsymbol{f - g}$, el **producto** $\boldsymbol{fg}$ y el ***cociente*** $\boldsymbol{\frac{f}{g}}$ como sigue:[4]

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x),$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

[3]Adaptado de F. K. E. Imrie y A: J. Vlitos, "Production of Fungal Protein from Carob", en *Single-Cell Protein II*, ed. S. R. Tannenbaum y D. I. C. Wang (Cambridge, MA.: MIT Press, 1975).

[4]En cada una de las cuatro combinaciones, se supone que x se encuentra en los dominios tanto de f como de g. En el cociente tampoco se permite cualquier valor de x para el cual $g(x)$ sea cero.

Así, para $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$, tenemos

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x,$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 3x,$$
$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2(3x) = 3x^3,$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{3x} = \frac{x}{3}, \qquad \text{para } x \neq 0.$$

EJEMPLO 1 Combinación de funciones

Si $f(x) = 3x - 1$ *y* $g(x) = x^2 + 3x$, *encontrar*

a. $(f + g)(x)$,
b. $(f - g)(x)$,
c. $(fg)(x)$,
d. $\frac{f}{g}(x)$.

Solución:

a. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (3x - 1) + (x^2 + 3x) = x^2 + 6x - 1.$
b. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (3x - 1) - (x^2 + 3x) = -1 - x^2.$
c. $(fg)(x) = f(x)g(x) = (3x - 1)(x^2 + 3x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x.$
d. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x - 1}{x^2 + 3x}.$

Composición

También podemos combinar dos funciones aplicando primero una función a un número y después la otra función al resultado. Por ejemplo, suponga que $g(x) = 3x$, $f(x) = x^2$ y $x = 2$. Entonces $g(2) = 3(2) = 6$. Así, g envía la entrada 2 a la salida 6:

$$2 \xrightarrow{g} 6.$$

Después, hacemos que la salida 6 se convierta en la entrada para f:

$$f(6) = 6^2 = 36.$$

De modo que f envía 6 al 36:

$$6 \xrightarrow{f} 36.$$

Aplicando primero g y después f, enviamos el 2 al 36:

$$2 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} 36.$$

De manera más general, reemplacemos el 2 por x, donde x está en el dominio de g (véase la fig. 3.5). Aplicando g a x, obtenemos el número $g(x)$, que debemos suponer está en el dominio de f. Aplicando f a $g(x)$, obtenemos $f(g(x))$, se lee "f de g de x", que está en el rango de f. Esta operación de aplicar g y después aplicar f al resultado define una función llamada "composición" (o función compuesta), la cual se denota por $f \circ g$. Esta función asigna al número de entrada x el número de salida $f(g(x))$. [Véase la flecha inferior en la fig. 3.5.]

De esta manera $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Es válido pensar que $f(g(x))$ es una función de una función.

FIGURA 3.5 Composición de f con g.

Definición

Si f y g son funciones, la ***composición de f con g*** es la función $f \circ g$ definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

donde el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g, tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

Para $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$, podemos obtener una forma sencilla para $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = (3x)^2 = 9x^2.$$

Por ejemplo, $(f \circ g)(2) = 9(2)^2 = 36$, como vimos anteriormente.

Principios en práctica 1
Composición

Un CD cuesta x dólares por mayoreo. El precio que el almacén paga, está dado por la función $s(x) = x + 3$. El precio que el cliente paga es $c(x) = 2x$, en donde x es el precio que el almacén paga. Escriba una función compuesta para determinar el precio del cliente como una función del precio de mayoreo.

EJEMPLO 2 Composición

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ *y* $g(x) = x + 1$. *Encontrar*

a. $(f \circ g)(x)$, **b.** $(g \circ f)(x)$.

Solución:

a. $(f \circ g)(x)$ es $f(g(x))$. Ahora g suma 1 a x, y f saca la raíz cuadrada del resultado. Así que,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = \sqrt{x + 1}.$$

El dominio de g son todos los números reales x y el de f todos los números reales no negativos. De aquí que el dominio de la composición sea todas las x para las que $g(x) = x + 1$ sea no negativa. Esto es, el dominio son todas las $x \geq -1$, o en forma equivalente, el intervalo $[-1, \infty)$.

b. $(g \circ f)(x)$ es $g(f(x))$. Ahora f toma la raíz cuadrada de x y g suma 1 al resultado. De esta manera g suma 1 a la $\sqrt{x}$ y tenemos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1.$$

El dominio de f son todas las $x \geq 0$ y el dominio de g son todos los reales. Por lo que el dominio de la composición son todas las $x \geq 0$, para las cuales $f(x) = \sqrt{x}$ es real, es decir, toda $x \geq 0$.

Advertencia Por lo general, $f \circ g \neq g \circ f$. En el ejemplo 2,

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x + 1},$$

pero tenemos

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x} + 1.$$

Tampoco confunda $f(g(x))$ con $(fg)(x)$, esta última es el producto $f(x)g(x)$. Aquí

$$f(g(x)) = \sqrt{x+1},$$

pero

$$f(x)g(x) = \sqrt{x}(x+1).$$

EJEMPLO 3 Composición

Si $F(p) = p^2 + 4p - 3$ y $G(p) = 2p + 1$, determinar

a. $F(G(p))$, **b.** $G(F(1))$.

Solución:

a. $F(G(p)) = F(2p+1) = (2p+1)^2 + 4(2p+1) - 3$

$= 4p^2 + 12p + 2.$

b. $G(F(1)) = G(1^2 + 4 \cdot 1 - 3) = G(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$

En cálculo, a veces es necesario pensar en una función en particular como una composición de dos funciones más sencillas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Principios en práctica 2
Cómo expresar una función como una composición

Supóngase que el área de un jardín cuadrado es $g(x) = (x+3)^2$. Exprese g como una composición de dos funciones, y explique qué representa cada función.

EJEMPLO 4 Cómo expresar una función como una composición

Expresar $h(x) = (2x-1)^3$ como una composición.

Solución:
Observamos que $h(x)$ se obtiene al encontrar $2x - 1$ y elevar al cubo el resultado. Suponga que hacemos $g(x) = 2x - 1$ y $f(x) = x^3$. Entonces

$$h(x) = (2x-1)^3 = [g(x)]^3 = f(g(x)) = (f \circ g)(x),$$

que da h como una composición de dos funciones.

Tecnología

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=2X+1
\Y2=X²
\Y3=Y1+Y2
\Y4=Y1(Y2)
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```

FIGURA 3.6 Y_3 y Y_4 son combinaciones de Y_1 y Y_2.

Dos funciones pueden combinarse usando una calculadora gráfica. Considere las funciones

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2,$$

que introducimos como Y_1 y Y_2, según se muestra en la figura 3.6. La suma de f y g está dada por $Y_3 = Y_1 + Y_2$ y la composición de $f \circ g$ por $Y_4 = Y_1(Y_2)$. Por ejemplo, $f(g(3))$ se obtiene evaluando Y_4 en 3.

Ejercicio 3.3

1. Si $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x + 5$, encuentre lo siguiente.

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f + g)(0)$. **c.** $(f - g)(x)$.

d. $(fg)(x)$. **e.** $(fg)(-2)$. **f.** $\frac{f}{g}(x)$.

g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(f \circ g)(3)$. **i.** $(g \circ f)(x)$.

2. Si $f(x) = 2x$ y $g(x) = 6 + x$, encuentre lo siguiente.

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f - g)(x)$. **c.** $(f - g)(4)$.

d. $(fg)(x)$. **e.** $\frac{f}{g}(x)$. **f.** $\frac{f}{g}(2)$.

g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(g \circ f)(x)$. **i.** $(g \circ f)(2)$.

3. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + x$, encuentre lo siguiente.

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f - g)(x)$. **c.** $(f - g)(-\frac{1}{2})$.

d. $(fg)(x)$. **e.** $\frac{f}{g}(x)$. **f.** $\frac{f}{g}(-\frac{1}{2})$.

g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(g \circ f)(x)$. **i.** $(g \circ f)(-3)$.

4. Si $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 4$, encuentre lo siguiente.

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f + g)(\frac{1}{2})$. **c.** $(f - g)(x)$.

d. $(fg)(x)$. **e.** $(fg)(4)$. **f.** $\frac{f}{g}(x)$.

g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(f \circ g)(100)$. **i.** $(g \circ f)(x)$.

5. Si $f(x) = 3x^2 + 6$ y $g(x) = 4 - 2x$, encuentre $f(g(2))$ y $g(f(2))$.

6. Si $f(p) = \frac{4}{p}$ y $g(p) = \frac{p - 2}{3}$, encuentre $(f \circ g)(p)$ y $(g \circ f)(p)$.

7. Si $F(t) = t^2 + 7t + 1$ y $G(t) = \frac{2}{t - 1}$, encuentre $(F \circ G)(t)$ y $(G \circ F)(t)$.

8. Si $F(s) = \sqrt{s}$ y $G(t) = 3t^2 + 4t + 2$, encuentre $(F \circ G)(t)$ y $(G \circ F)(t)$.

9. Si $f(w) = \frac{1}{w^2 + 1}$ y $g(v) = \sqrt{v + 2}$, encuentre $(f \circ g)(v)$ y $(g \circ f)(w)$.

10. Si $f(x) = x^2 + 3$, encuentre $(f \circ f)(x)$.

En los problemas del 11 al 16 determine las funciones f y g tales que h(x) = f(g(x)).

11. $h(x) = (4x - 3)^5$.

12. $h(x) = \sqrt{x^2 - 2}$.

13. $h(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$.

14. $h(x) = (9x^3 - 5x)^3 - (9x^3 - 5x)^2 + 11$.

15. $h(x) = \sqrt[5]{\frac{x + 1}{3}}$.

16. $h(x) = \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + 2}$.

---

17. Utilidad Un expendio de café vende una libra de café por \$9.75. Los gastos mensuales son \$4500 más \$4.25 por cada libra de café vendida.

a. Escriba una función $r(x)$ para el ingreso mensual total como una función del número de libras de café vendidas.

b. Escriba una función $e(x)$ para los gastos mensuales totales como una función del número de libras de café vendidas.

c. Escriba una función $(r - e)(x)$ para la utilidad mensual total como una función del número de libras de café vendidas.

18. Geometría Supóngase que el volumen de un cubo es $v(x) = (4x - 2)^3$. Exprese v como una composición de dos funciones, y explique qué representa cada función.

19. Negocios Un fabricante determina que el número total de unidades de producción por día, q, es una función del número de empleados, m, donde

$$q = f(m) = \frac{(40m - m^2)}{4}.$$

El ingreso total, r, que se recibe por la venta de q unidades, está dado por la función g, donde $r = g(q) = 40q$. Determine $(g \circ f)(m)$. ¿Qué es lo que describe esta función compuesta?

20. Sociología Se han hecho estudios concernientes a la relación estadística entre posición social, educación e ingresos de una persona.[5] Denotemos con S al valor numérico de la posición social con base en el ingreso anual I. Para cierto tipo de población suponga

$$S = f(I) = 0.45(I - 1000)^{0.53}.$$

Además, suponga que el ingreso de una persona I es una función del número de años de educación E, donde

$$I = g(E) = 7202 + 0.29E^{3.68}.$$

Determine $(f \circ g)(E)$. ¿Qué es lo que describe esta función?

[5] R. K. Leik y B. F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975).

En los problemas del 21 al 24, para las funciones f y g dadas, determine los valores funcionales indicados. Redondee las respuestas a dos decimales.

21. $f(x) = (4x - 13)^2, g(x) = 0.2x^2 - 4x + 3$; (a) $(f + g)(4.5)$, (b) $(f \circ g)(-2)$.

22. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x}}, g(x) = 13.4x + 7.31$; (a) $\dfrac{f}{g}(10)$, (b) $(g \circ f)(-6)$.

23. $f(x) = x^{2/3}, g(x) = x^3 - 7$; (a) $(fg)(5)$, (b) $(g \circ f)(2.25)$.

24. $f(x) = \dfrac{5}{x+3}, g(x) = \dfrac{2}{x^2}$; (a) $(f - g)(7.3)$, (b) $(f \circ g)(-4.17)$.

3.4 Gráficas en coordenadas rectangulares

OBJETIVO Graficar ecuaciones y funciones en coordenadas rectangulares, determinar intersecciones, aplicar la prueba de la recta vertical y determinar el dominio y rango de una función a partir de una gráfica.

Un **sistema de coordenadas rectangulares** (o **cartesiano**) nos permite especificar y localizar puntos en un plano. También nos proporciona una manera geométrica para representar ecuaciones de dos variables, así como funciones.

En un plano se trazan dos rectas de números reales, llamadas *ejes de coordenadas*, perpendiculares entre sí, y de modo que sus orígenes coincidan, como en la figura 3.7. Su punto de intersección se llama *origen* del sistema de coordenadas. Por ahora llamaremos a la recta horizontal el *eje x* y a la vertical el *eje y*. La distancia unitaria sobre el eje *x* no necesariamente es la misma que la del eje *y*.

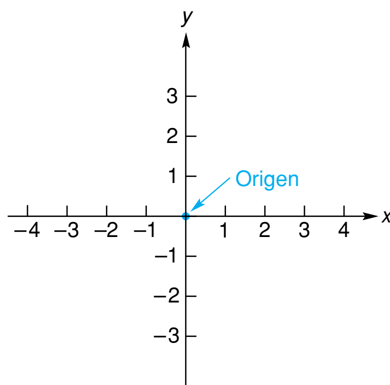


FIGURA 3.7 Ejes de coordenadas.

El plano sobre el cual están los ejes de coordenadas se llama *plano de coordenadas rectangulares* o, simplemente, *plano x, y*. Todo punto en él puede marcarse para indicar su posición. Para marcar el punto *P* en la figura 3.8(a), trazamos líneas perpendiculares al eje *x* y al eje *y* que pasen por el punto *P*. Dichas líneas cruzan los ejes en 4 y 2, respectivamente. Por tanto, determinan dos números, 4 y 2, entonces decimos que las **coordenadas rectangulares** de *P* están dadas por el **par ordenado** (4, 2). La palabra *ordenado* es importante. En la figura 3.8(b) el punto correspondiente a (4, 2) no es el mismo que para (2, 4):

$$(4, 2) \neq (2, 4).$$

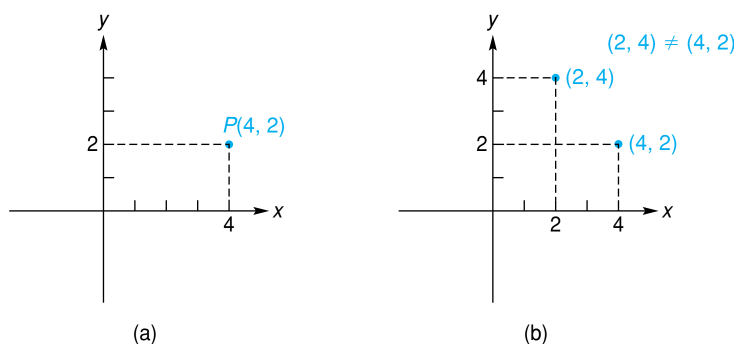


FIGURA 3.8 Coordenadas rectangulares.

En general, si *P* es cualquier punto, entonces sus coordenadas rectangulares estarán dadas por un par ordenado de la forma (x, y). (Véase la fig. 3.9.) Llamamos a *x* la *abscisa* o *coordenada x* de *P*, y a *y* la *ordenada* o *coordenada y* de *P*.

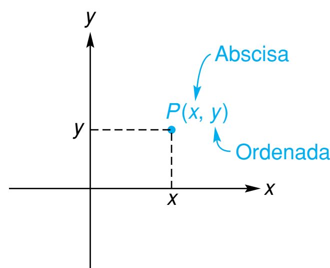


FIGURA 3.9 Coordenadas de *P*.

De este modo, con cada punto en un plano coordenado podemos asociar exactamente un par ordenado (x, y) de números reales. También debe ser claro que con cada par ordenado (x, y) de números reales, podemos asociar exactamente un punto en ese plano. Ya que existe una *correspondencia uno a uno* entre los puntos en el plano y todos los pares ordenados de números reales, nos referimos al punto *P* con abscisa *x* y ordenada *y*, simplemente como el punto (x, y), o como $P(x, y)$. Además, usaremos las palabras *punto* y *par ordenado* en forma indistinta.

En la figura 3.10 están indicadas las coordenadas de varios puntos. Por ejemplo, el punto $(1, -4)$ está localizado una unidad a la derecha del eje y, y cuatro unidades abajo del eje x. El origen es $(0, 0)$. La coordenada x de todo punto en el eje y es 0 y la coordenada y de todo punto sobre el eje x es 0.

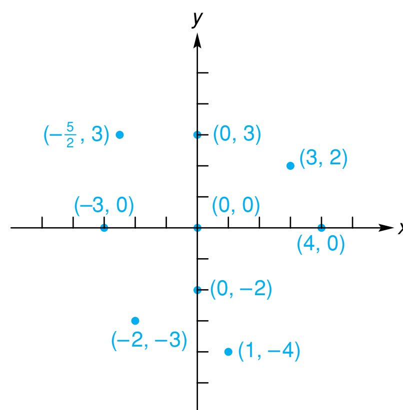


FIGURA 3.10 Coordenadas de puntos.

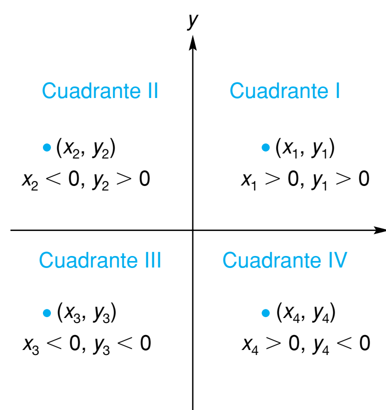


FIGURA 3.11 Cuadrantes.

Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes* (véase la fig. 3.11). Por ejemplo, el cuadrante I consiste en todos los puntos (x_1, y_1) con $x_1 > 0$ y $y_1 > 0$. Los puntos sobre los ejes no están en ningún cuadrante.

Utilizando un sistema de coordenadas rectangulares, podemos representar geométricamente ecuaciones de dos variables. Por ejemplo, considere

$$y = x^2 + 2x - 3. \qquad \textbf{(1)}$$

Una solución de esta ecuación es un valor de x y uno de y que hagan verdadera a la ecuación. Por ejemplo, si $x = 1$, sustituyendo en la ecuación (1) se obtiene

$$y = 1^2 + 2(1) - 3 = 0.$$

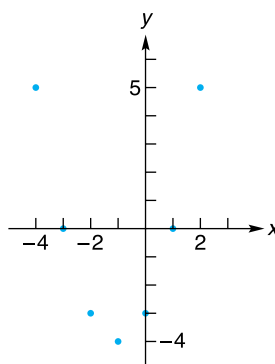
Así, una solución es, $x = 1$, $y = 0$. De manera análoga,

$$\text{si } x = -2, \quad \text{entonces} \quad y = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = -3,$$

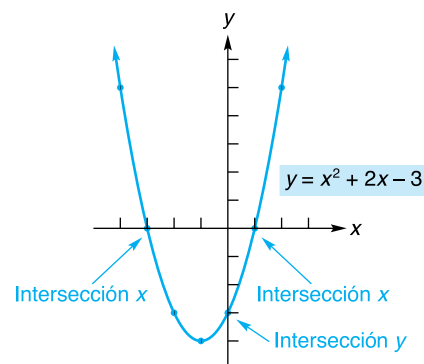
y en esta forma $x = -2$, $y = -3$, también es una solución. Seleccionando otros valores para x podemos obtener más soluciones [véase la fig. 3.12(a)]. Debe quedar claro que existe una infinidad de soluciones para la ecuación (1).

x	y
−4	5
−3	0
−2	−3
−1	−4
0	−3
1	0
2	5

(a)



(b)



(c)

FIGURA 3.12 Graficación de $y = x^2 + 2x - 3$.

Cada solución da origen a un punto (x, y) Por ejemplo, a $x = 1$ y $y = 0$ le corresponde $(1, 0)$. La **gráfica** de $y = x^2 + 2x - 3$ es la representación geométrica de todas sus soluciones. En la figura 3.12(b) hemos graficado los puntos correspondientes a las soluciones dadas en la tabla.

Ya que la ecuación tiene un número infinito de soluciones, parece imposible determinar su gráfica con precisión. Sin embargo, sólo estamos interesados en la forma general de la gráfica. Por esta razón graficamos suficientes puntos de modo que podamos hacernos una idea aproximada acerca de su forma. Entonces unimos esos puntos por medio de una curva suave siempre que las condiciones lo permitan. Al hacer esto, obtenemos la curva de la figura 3.12(c). Por supuesto, entre más puntos marquemos, mejor será nuestra gráfica. Aquí suponemos que la gráfica se extiende de manera indefinida hacia arriba, lo cual se indica con la flechas.

Con frecuencia, sólo decimos que la intersección y es –3 y las intersecciones x son –3 y 1.

El punto $(0, -3)$ en donde la curva interseca al eje y se llama *intersección y*. Los puntos $(-3, 0)$ y $(1, 0)$ en donde la curva interseca al eje x se llaman las *intersecciones x*. En general, tenemos la definición siguiente.

Definición

Una ***intersección x*** de la gráfica de una ecuación en x y y, es el punto donde la gráfica interseca al eje x. Una ***intersección y*** es el punto donde la gráfica interseca al eje y.

Para encontrar las intersecciones x de la gráfica de una ecuación en x y y, primero hacemos $y = 0$, y resolvemos para x la ecuación resultante. Para encontrar las intersecciones y, primero hacemos $x = 0$ y resolvemos para y. Por ejemplo, para la gráfica de $y = x^2 + 2x - 3$, determinemos las intersecciones x. Haciendo $x = 0$ x resolviendo para x obtenemos

$$0 = x^2 + 2x - 3,$$
$$0 = (x + 3)(x - 1),$$
$$x = -3, 1.$$

Así, las intersecciones x son $(-3, 0)$ y $(1, 0)$, como vimos antes. Si $x = 0$, entonces

$$y = 0^2 + 2(0) - 3 = -3.$$

De modo que $(0, -3)$ es la intersección y. Tenga en mente que para una intersección x su coordenada y es igual a cero, mientras que para una intersección y su coordenada x es igual a cero. Las intersecciones son útiles porque indican con precisión en dónde interseca la gráfica a los ejes.

Principios en práctica 1
Intersecciones y gráfica

Raquel ha ahorrado $7250 para gastos del colegio. Ella planea gastar $600 por mes de esta cuenta. Escriba una ecuación que represente la situación e identifique las intersecciones con los ejes.

EJEMPLO 1 Intersecciones y gráfica

Determinar las intersecciones x y y de la gráfica de $y = 2x + 3$ y hacer el bosquejo de su gráfica.

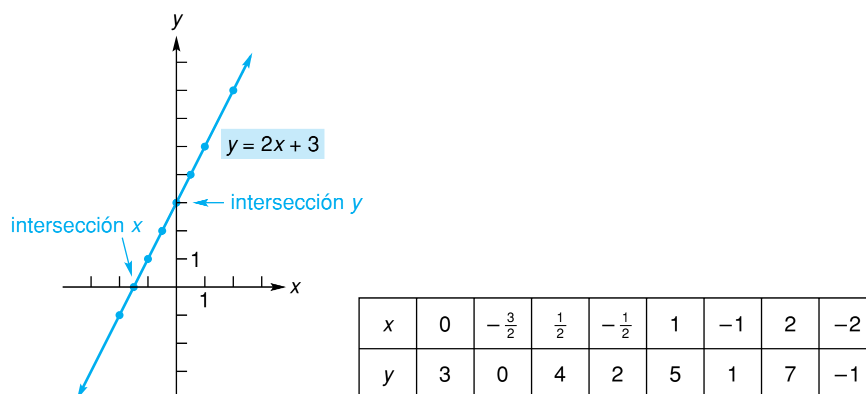
Solución: si $y = 0$, entonces

$$0 = 2x + 3 \qquad \text{o} \qquad x = -\frac{3}{2}.$$

Así, la intersección x es $(-\frac{3}{2}, 0)$. Si $x = 0$, entonces

$$y = 2(0) + 3 = 3.$$

De modo que la intersección y es $(0, 3)$. La figura 3.13 muestra una tabla de otros puntos sobre la gráfica y un bosquejo de ésta.



x	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	−1	2	−2
y	3	0	4	2	5	1	7	−1

FIGURA 3.13 Gráfica de $y = 2x + 3$.

Principios en práctica 2
Intersecciones y gráfica

El precio de admisión a un parque de diversiones es de $24.95. Este pago permite al cliente utilizar todas las atracciones del parque tantas veces como quiera. Escriba una ecuación que represente la relación entre el número de recorridos, x, que el cliente hace, y el costo de admisión, y, para ese cliente. Describa la gráfica de esta ecuación e identifique las intersecciones con los ejes. Suponga que $x > 0$.

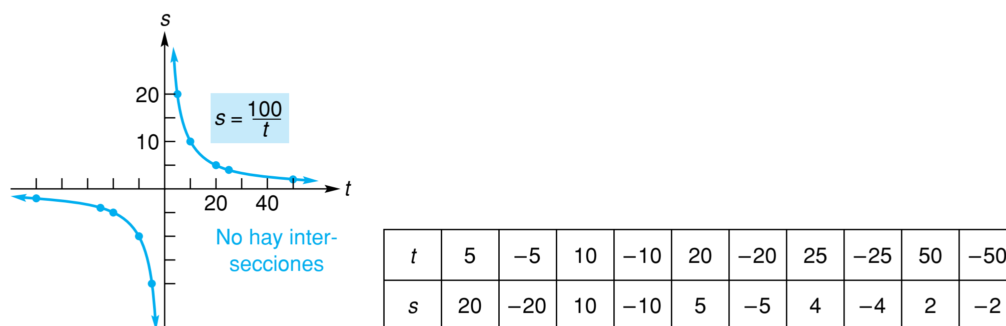
EJEMPLO 2 Intersecciones y gráfica

Determinar las intersecciones, si las hay, de la gráfica de $s = \dfrac{100}{t}$ *y hacer un bosquejo de la gráfica.*

Solución: para la gráfica marcaremos al eje horizontal con t y al eje vertical con s (véase la fig. 3.14). Puesto que t no puede ser igual a cero (la división entre cero no está definida), no existe intersección con el eje s. Así, la gráfica no tiene un punto correspondiente a $t = 0$. Además, no existe intersección con el eje t, ya que si $s = 0$, entonces la ecuación

$$0 = \frac{100}{t}$$

no tiene solución. La figura 3.14 muestra la gráfica. En general, la gráfica de $s = k/t$, en donde k es una constante diferente de cero, se conoce como *hipérbola*.

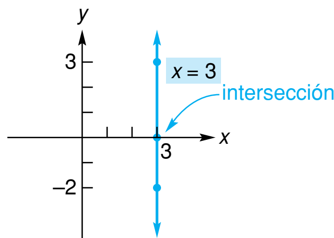


t	5	−5	10	−10	20	−20	25	−25	50	−50
s	20	−20	10	−10	5	−5	4	−4	2	−2

FIGURA 3.14 Gráfica de $s = \dfrac{100}{t}$.

EJEMPLO 3 Intersecciones y gráfica

Determinar las intersecciones de la gráfica de $x = 3$ *y hacer el bosquejo de la gráfica.*

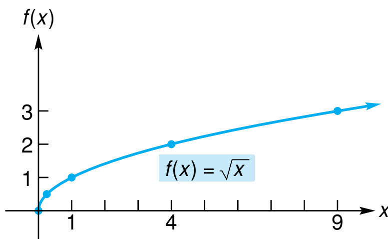


x	3	3	3
y	0	3	−2

FIGURA 3.15 Gráfica de $x = 3$.

Solución: podemos pensar en $x = 3$ como una ecuación en las variables x y y, si la escribimos como $x = 3 + 0y$. Aquí y puede tomar cualquier valor, pero x debe ser igual a 3. Puesto que $x = 3$ cuando $y = 0$, la intersección x es $(3,\ 0)$. No existe intersección y, ya que x no puede ser cero. (Véase la fig. 3.15.) La gráfica es una recta vertical.

Además de representar a las funciones en ecuaciones, también podemos representarlas en un plano coordenado. Si f es una función con variable independiente x y variable dependiente y, entonces la gráfica de f sólo es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Ésta consiste en todos los puntos $(x,\ y)$ o $(x, f(x))$, en donde x está en el dominio de f. El eje vertical puede marcarse como y o como $f(x)$, el cual se denomina **eje de los valores de la función.** *Siempre marcamos al eje horizontal con la variable independiente.*



x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3

FIGURA 3.16 Gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

EJEMPLO 4 Gráfica de la función raíz cuadrada

Hacer la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

Solución: véase la figura 3.16. Marcamos al eje vertical como $f(x)$. Recuerde que $\sqrt{x}$ denota la raíz cuadrada *principal* de x. Así, $f(9) = \sqrt{9} = 3$ no ± 3. Tampoco podemos elegir valores negativos de x, ya que no queremos números imaginarios para $\sqrt{x}$. Esto es, debemos tener $x \geq 0$. Ahora consideramos las intersecciones. Si $f(x) = 0$, entonces $\sqrt{x} = 0$ o $x = 0$. También, si $x = 0$, entonces $f(x) = 0$. Así, las intersecciones x y y son las mismas, es decir, $(0,\ 0)$.

Principios en práctica 3
Gráfica de la función valor absoluto

Brett rentó una bicicleta en un negocio de alquiler de bicicletas, condujo a una velocidad constante de 12 mi/h durante 2.5 horas en una ruta para bicicletas, y después regresó por el mismo camino. Grafique la función valor absoluto para representar la distancia recorrida desde el negocio de alquiler de bicicletas, como una función del tiempo en el dominio apropiado.

EJEMPLO 5 Gráfica de la función valor absoluto

Graficar $p = G(q) = |q|$.

Solución: usamos la variable independiente q para marcar al eje horizontal. El eje de los valores de la función puede marcarse como $G(q)$ *o* p (véase la fig. 3.17). Note que las intersecciones p *y* q son el mismo punto, $(0,\ 0)$.

q	0	1	−1	3	−3	5	−5
p	0	1	1	3	3	5	5

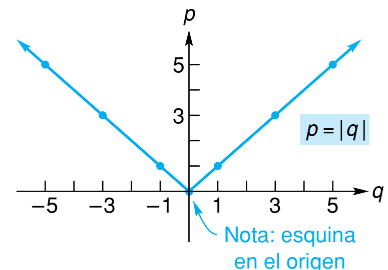


FIGURA 3.17 Gráfica de $p = |q|$.

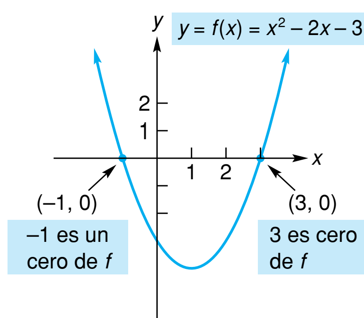


FIGURA 3.18 Ceros de una función.

En general, las soluciones reales para una ecuación $f(x) = 0$ son los ceros reales de f.

La noción de un *cero* es importante en el estudio de las funciones.

Definición

Un ***cero*** de una función f es cualquier valor de x para el cual $f(x) = 0$.

Por ejemplo, un cero de la función $f(x) = 2x - 6$ es 3 porque $f(3) = 2(3) - 6 = 0$. Aquí llamamos a 3 un cero *real,* ya que es un número real. Observamos que los ceros de f pueden encontrarse haciendo $f(x) = 0$ y resolviendo para x. Así, los ceros reales de una función son precisamente las intersecciones x de su gráfica, ya que es en estos puntos en que $f(x) = 0$.

Para mayor ilustración, la figura 3.18 muestra la gráfica de la función de $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$. Las intersecciones x de la gráfica son -1 y 3. Así, -1 y 3 son ceros de f, o lo que es equivalente a decir que -1 y 3 son las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Tecnología

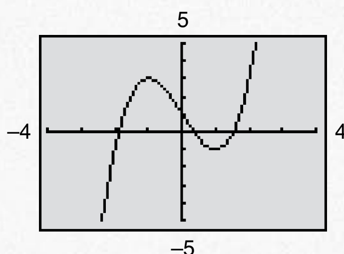


FIGURA 3.19 Las raíces de $x^3 - 3x + 1 = 0$ son aproximadamente -1.88, 0.35, y 1.53.

Para resolver la ecuación $x^3 = 3x - 1$ con una calculadora gráfica, primero expresamos la ecuación en la forma $f(x) = 0$.

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Después graficamos f y luego estimamos las intersecciones x, ya sea utilizando el acercamiento (*zoom*) y rastreo, o por medio de la operación de extracción de raíces (véase la fig. 3.19). Observe que definimos nuestra ventana para $-4 \leq x \leq 4$ y $-5 \leq y \leq 5$.

La figura 3.20 muestra la gráfica de alguna función $y = f(x)$. El punto $(x, f(x))$ implica que, al número de entrada x en el eje horizontal, le corresponde el número de salida $f(x)$ en el eje vertical, como lo indica la flecha. Por ejemplo, a la entrada 4 le corresponde la salida 3, de modo que $f(4) = 3$.

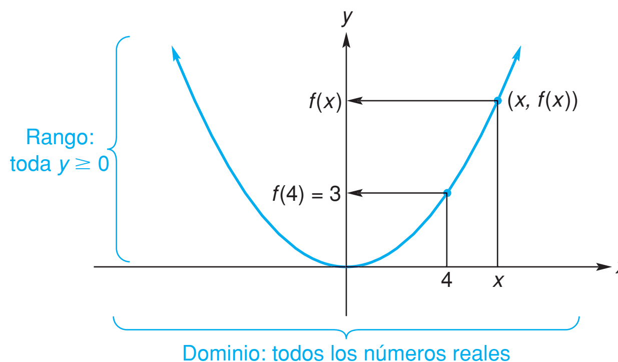


FIGURA 3.20 Dominio, rango y valores funcionales.

De la forma de la gráfica, parece razonable suponer que para cualquier valor de x existe un número de salida, de modo que el dominio de f son todos los números reales. Observe que el conjunto de todas las coordenadas y puntos en la gráfica es el conjunto de todos los números no negativos. Así, el rango de f es toda $y \geq 0$. Esto muestra que podemos hacer una deducción acertada acerca del dominio y rango de una función viendo su gráfica. *En general*, *el dominio consiste en todos los valores x que están incluidos en la gráfica*, *y* el *rango son todos los valores y en esa gráfica*. Por ejemplo, la figura 3.16 implica que el dominio y el rango de $f(x) = \sqrt{x}$ son todos los números no negativos. De la figura 3.17 queda claro que el dominio de $p = G(q) = |q|$ son todos los números reales y que el rango es toda $p \geq 0$.

EJEMPLO 6 Dominio, rango y valores de la función

La figura 3.21 muestra la gráfica de una función F. A la derecha de 4 se supone que la gráfica se repite indefinidamente. Entonces el dominio de F es toda $t \geq 0$. El rango es $-1 \leq s \leq 1$. Algunos valores de la función son

$$F(0) = 0, \qquad F(1) = 1, \qquad F(2) = 0, \qquad F(3) = -1.$$

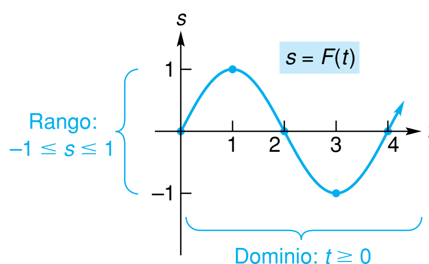


FIGURA 3.21 Dominio, rango y valores funcionales.

Tecnología

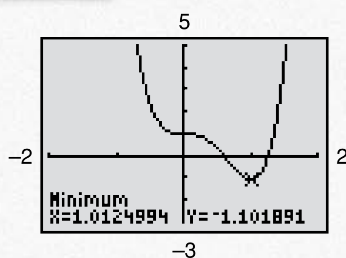


FIGURA 3.22 El rango de $f(x) = 6x^4 - 8.1x^3 + 1$ es aproximadamente $[-1.10, \infty)$.

Utilizando una calculadora gráfica podemos estimar el rango de una función. La gráfica de

$$f(x) = 6x^4 - 8.1x^3 + 1$$

se muestra en la figura 3.22. El punto más bajo en la gráfica corresponde al valor mínimo de $f(x)$, y el rango son todos los números reales mayores o iguales a este mínimo. Podemos estimar el valor mínimo para y utilizando rastreo y acercamiento (*zoom*), o bien seleccionando la operación "mínimo".

EJEMPLO 7 Gráfica de una función definida por partes

Graficar la función definida por partes

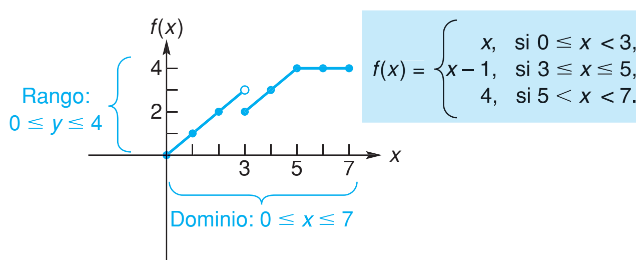
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ x - 1, & \text{si } 3 \leq x \leq 5, \\ 4, & \text{si } 5 < x \leq 7. \end{cases}$$

Principios en práctica 4

Gráfica de una función definida por partes

Para alentar el ahorro, una compañía de gas cobra dos tarifas. Usted paga \$0.53 por termia para un consumo de 0-70 termias, y \$0.74 por cada termia por encima de 70. Haga la gráfica de la función definida por partes, que representa el costo mensual de t termias de gas.

Solución: el dominio de f es $0 \leq x \leq 7$. La gráfica se da en la figura 3.23, donde el *punto hueco* significa que éste *no* está incluido en la gráfica. Observe que el rango de f son todos los números reales y tales que $0 \leq y \leq 4$.



x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	1	2	2	3	4	4	4

FIGURA 3.23 Gráfica de una función definida por partes.

Existe una manera fácil para determinar si una curva es o no la gráfica de una función. En la figura 3.24(a) observe que con la x dada existen asociados *dos* valores de y: y_1 y y_2. Así, la curva *no* es la gráfica de una función de x. Viéndolo de otra manera, tenemos la siguiente regla general llamada **prueba de la recta vertical.** Si una recta *vertical* L puede dibujarse de modo que interseque a una curva en al menos dos puntos, entonces la curva *no* es la gráfica de una función de x. Cuando tal recta vertical no puede dibujarse del mismo modo, la curva *sí es* la gráfica de una función de x. En consecuencia, las curvas de la figura 3.24 no representan funciones de x, pero las de la figura 3.25 sí.

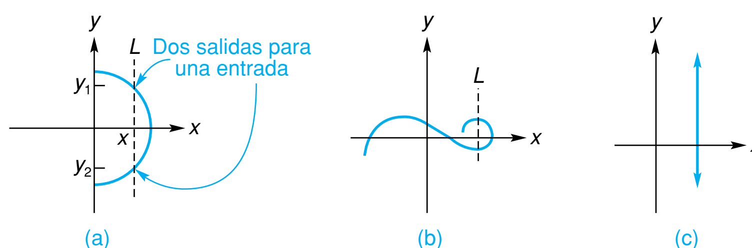


FIGURA 3.24 y no es una función de x.

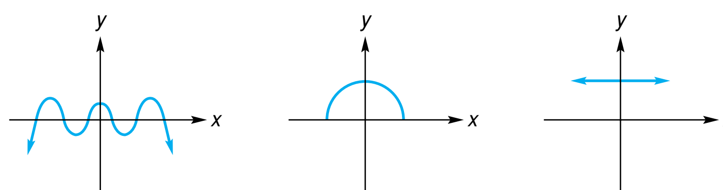
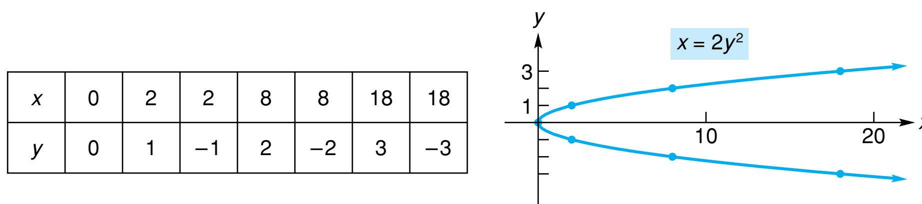


FIGURA 3.25 Funciones de x.

EJEMPLO 8 Una gráfica que no representa una función de x

Graficar $x = 2y^2$.

Solución: aquí es más fácil seleccionar valores de y y después encontrar los correspondientes a x. La figura 3.26 muestra la gráfica. Por medio de la prueba de la recta vertical, la ecuación $x = 2y^2$ no define una función de x.



x	0	2	2	8	8	18	18
y	0	1	−1	2	−2	3	−3

FIGURA 3.26 Gráfica de $x = 2y^2$.

Ejercicio 3.4

En los problemas 1 y 2 localice y marque cada uno de los puntos dados y, si es posible, indique el cuadrante al que pertenece cada punto.

1. $(2, 7), (8, -3), (-\frac{1}{2}, -2), (0, 0)$.

2. $(-4, 5), (3, 0), (1, 1), (0, -6)$.

3. La figura 3.27(a) muestra la gráfica de $y = f(x)$.
- **a.** Estime $f(0), f(2), f(4)$, y $f(2)$.
- **b.** ¿Cuál es el dominio de f?
- **c.** ¿Cuál es el rango de f?
- **d.** ¿Cuál es un cero real de f?

4. La figura 3.27(b) muestra la gráfica de $y = f(x)$.
- **a.** Estime $f(0)$ y $f(2)$.
- **b.** ¿Cuál es el dominio de f?
- **c.** ¿Cuál es el rango de f?
- **d.** ¿Cuál es un cero real de f?

5. La figura 3.28(a) muestra la gráfica de $y = f(x)$.
- **a.** Estime $f(0), f(1)$, y $f(-1)$.
- **b.** ¿Cuál es el dominio de f?
- **c.** ¿Cuál es el rango de f?
- **d.** ¿Cuál es un cero real de f?

6. La figura 3.28(b) muestra la gráfica de $y = f(x)$.
- **a.** Estime $f(0), f(2), f(3)$, y $f(4)$.
- **b.** ¿Cuál es el dominio de f?
- **c.** ¿Cuál es el rango de f?
- **d.** ¿Cuál es un cero real de f?

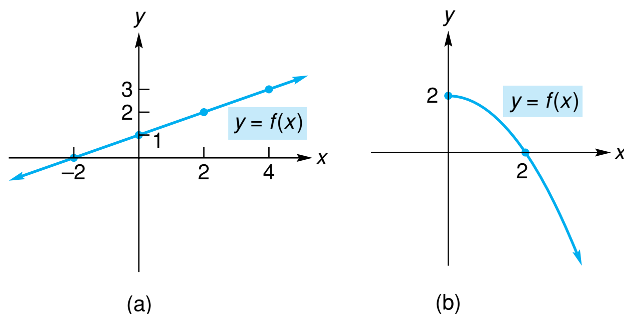


FIGURA 3.27 Diagrama para los problemas 3 y 4.

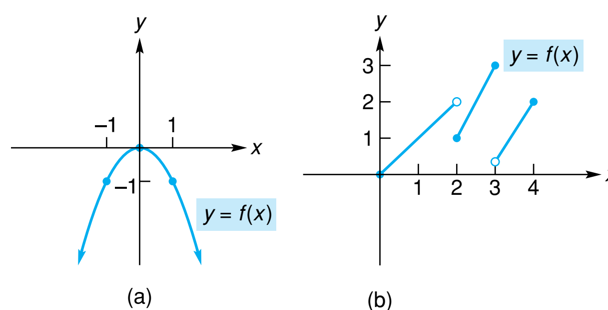


FIGURA 3.28 Diagrama para los problemas 5 y 6.

En los problemas del 7 al 20 determine las intersecciones de la gráfica de cada ecuación y haga el bosquejo de la gráfica. Con base en su gráfica, ¿es y una función de x?, si es así, ¿cuál es su dominio y cuál su rango?

7. $y = 2x$. **8.** $y = x + 1$. **9.** $y = 3x - 5$. **10.** $y = 3 - 2x$.

11. $y = x^2$. **12.** $y = \frac{3}{x}$. **13.** $x = 0$. **14.** $y = 4x^2 - 16$.

15. $y = x^3$. **16.** $x = -4$. **17.** $x = -3y^2$. **18.** $x^2 = y^2$.

19. $2x + y - 2 = 0$. **20.** $x + y = 1$.

En los problemas del 21 al 34 grafique cada función y determine su dominio y rango. También determine las intersecciones.

21. $s = f(t) = 4 - t^2$. **22.** $f(x) = 5 - 2x^2$. **23.** $y = g(x) = 2$. **24.** $G(s) = -8$.

25. $y = h(x) = x^2 - 4x + 1$. **26.** $y = f(x) = x^2 + 2x - 8$.

27. $f(t) = -t^3$. **28.** $p = h(q) = q(3 + q)$. **29.** $s = F(r) = \sqrt{r - 5}$. **30.** $F(r) = -\frac{1}{r}$.

31. $f(x) = |2x - 1|$. **32.** $v = H(u) = |u - 3|$. **33.** $F(t) = \frac{16}{t^2}$. **34.** $y = f(x) = \frac{2}{x - 4}$.

En los problemas del 35 al 38 grafique cada función definida por partes y determine su dominio y rango.

35. $c = g(p) = \begin{cases} p, & \text{si } 0 \leq p < 6, \\ 5, & \text{si } p \geq 6. \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } -1 \leq x < 2, \\ 9 - x^2, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

37. $g(x) = \begin{cases} x + 6, & \text{si } x \geq 3, \\ x^2, & \text{si } x < 3. \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } 0 < x \leq 3, \\ 4, & \text{si } 3 < x \leq 5, \\ x - 1, & \text{si } x > 5. \end{cases}$

39. ¿Cuáles de las gráficas de la figura 3.29 representan funciones de x?

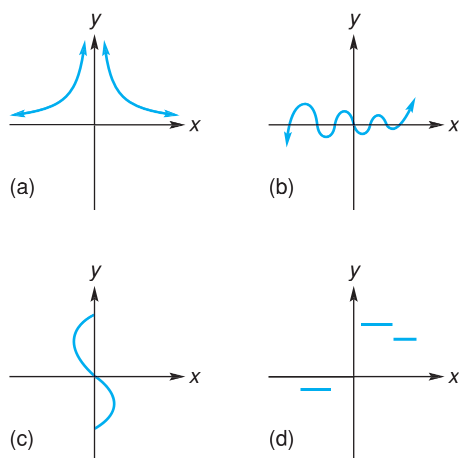


FIGURA 3.29 Diagrama para el problema 39.

40. Pagos de una deuda Janelle tiene cargos por $1800 en sus tarjetas de crédito. Ella planea pagarlas por medio de pagos mensuales de $175. Escriba una ecuación que represente el monto de su deuda, excluyendo los cargos financieros, e identifique las intersecciones con los ejes.

41. Determinación de precios Para alentar un flujo constante de clientes, un restaurante varía el precio de un platillo a lo largo del día. De 6:00 P.M. a 8:00 P.M., los clientes pagan el precio completo. En el almuerzo, de 10:30 A.M. hasta las 2:30 P.M., los clientes pagan la mitad del precio. De 2:30 P.M. hasta las 4:30 P.M., los clientes obtienen un dólar de ahorro del precio del almuerzo. De 4:30 P.M. hasta las 6:00 P.M., los clientes obtienen $5.00 de ahorro con respecto al precio de la cena. De 8:00 P.M. hasta el cierre, a las 10:00 P.M., los clientes obtienen $5.00 de ahorro con respecto al precio de la cena. Grafique la función definida por partes para representar el costo de un platillo a lo largo del día para un precio de cena de $18.

42. Programa de oferta Dado el siguiente programa de oferta (véase el ejemplo 5 de la sec. 3.1), grafique cada pareja cantidad-precio, seleccionando el eje horizontal para las cantidades posibles. Aproxime los puntos entre los datos por medio de una curva suave. El resultado es la *curva de la oferta*. Con base en la gráfica, determine la relación entre el precio y la oferta (esto es, cuando se incrementa el precio, ¿qué le pasa a la cantidad ofrecida?). ¿El precio por unidad es una función de la cantidad de oferta?

Cantidad ofrecida por semana, q	Precio por unidad, p
30	$10
100	20
150	30
190	40
210	50

43. Programa de demanda La tabla siguiente se conoce como *programa de demanda*. Éste indica la cantidad de la marca X que los consumidores demandan (esto es, compran) cada semana a cierto precio (en dólares) por unidad. Trace cada par precio-cantidad seleccionando el eje vertical para los precios posibles y una los puntos con una curva suave. De esta manera , aproximamos los puntos entre los datos dados. El resultado se llama la *curva de demanda*. Con base en la gráfica, determine la relación entre el precio de la marca X y la cantidad que será demandada (esto es, cuando el precio disminuye, ¿qué le pasa a la cantidad demandada?). El precio por unidad, ¿es una función de la cantidad demandada?

Cantidad demandada, q	Precio, por unidad, p
5	\$20
10	10
20	5
25	4

44. Inventario Haga un bosquejo de la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 1000, & \text{si } 0 \leq x < 7, \\ -100x + 1700, & \text{si } 7 \leq x < 14, \\ -100x + 2400, & \text{si } 14 \leq x < 21. \end{cases}$$

Una función como ésta podría describir el inventario y de una compañía en el instante x.

45. Psicología En un experimento psicológico sobre información visual, un sujeto observó brevemente un arreglo de letras, después se le pidió recordar tantas letras del arreglo como le fuese posible. El procedimiento se repitió varias veces. Suponga que y es el número promedio de letras recordadas de arreglos con x letras. La gráfica de los resultados aproximadamente se ajusta a la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 4, \\ \frac{1}{2}x + 2, & \text{si } 4 < x \leq 5, \\ 4.5, & \text{si } 5 < x \leq 12. \end{cases}$$

Grafique esta función.[6]

En los problemas del 46 al 49 utilice una calculadora gráfica para determinar todas las raíces reales de la ecuación dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

46. $7x^3 + 2x = 3.$

47. $x(x^2 - 3) = x^4 + 1.$

48. $(9x + 3.1)^2 = 7.4 - 4x^2.$

49. $(x - 2)^3 = x^2 - 3.$

En los problemas del 50 al 53 utilice una calculadora gráfica para determinar todos los ceros reales de la función dada. Redondee las respuestas a dos decimales.

50. $f(x) = x^3 + 5x + 7.$

51. $f(x) = x^4 - 2.5x^3 - 2.$

52. $g(x) = x^4 - 2.5x^3 + x.$

53. $g(x) = \sqrt{3}x^5 - 4x^2 + 1.$

En los problemas del 54 al 56 utilice una calculadora gráfica para determinar (a) el valor máximo de f(x) y (b) el valor mínimo de f(x) para los valores indicados de x. Redondee las respuestas a dos decimales.

54. $f(x) = x^4 - 4.1x^3 + x^2 + 10, \quad 1 \leq x \leq 4.$

55. $f(x) = x(2.1x^2 - 3)^2 - x^3 + 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$

56. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x - 5}, \quad 3 \leq x \leq 5.$

57. A partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{2}x^3 + 1.1x^2 + 4$ determine (a) el rango y (b) las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

58. Con base en la gráfica de $f(x) = 2 - 3x^3 - x^4$ determine (a) el valor máximo de $f(x)$, (b) el rango de f y (c) los ceros reales de f. Redondee los valores a dos decimales.

59. De la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 + 9.1}{3.8 + \sqrt{x}}$, determine (a) el valor mínimo de $f(x)$, (b) el rango de f, (c) las intersecciones y (d) ¿Tiene f ceros reales? Redondee los valores a dos decimales.

60. Grafique $f(x) = \dfrac{4.1x^3 + \sqrt{2}}{x^2 - 3}$ para $2 \leq x \leq 5.$

Determine (a) el valor máximo de $f(x)$, (b) el valor mínimo de $f(x)$, (c) el rango de f y (d) todas las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

[6]Adaptado de G. R. Loftus y E. F. Loftus, *Human Memory: The Processing of Information* (Nueva York: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley & Sons, Inc., 1976).

OBJETIVO Estudiar la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen, y aplicar la simetría en el trazado de curvas.

3.5 SIMETRÍA

Examinar el comportamiento gráfico de las ecuaciones es parte fundamental de las matemáticas. En esta sección examinaremos ecuaciones para determinar si sus gráficas tienen *simetría*. En un capítulo posterior se verá que el cálculo es de *gran* ayuda en la graficación, con base en él se determina la forma de una gráfica, ya que proporciona técnicas muy útiles para determinar si una curva se une o no de manera "suave" entre los puntos.

Considere la gráfica de $y = x^2$ en la figura 3.30. La parte a la izquierda del eje y es el reflejo (o imagen de espejo) de la parte de la derecha del mismo eje, y viceversa. Con mayor precisión, si (x_0, y_0) es cualquier punto sobre la gráfica, entonces el punto $(-x_0, y_0)$ también debe pertenecer a la gráfica. Decimos que esta gráfica es *simétrica con respecto al eje y*.

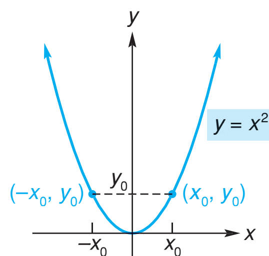


FIGURA 3.30 Simetría con respecto al eje y.

Definición

Una gráfica es ***simétrica con respecto al eje y*** si sólo si $(-x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica cuando (x_0, y_0) está en ella.

EJEMPLO 1 Simetría con respecto al eje *y*

Utilice la definición anterior para demostrar que la gráfica de $y = x^2$ *es simétrica con respecto al eje* y.

Solución: suponga que (x_0, y_0) *es cualquier* punto de la gráfica de $y = x^2$. Entonces

$$y_0 = x_0^2.$$

Debemos mostrar que las coordenadas de $(-x_0, y_0)$ satisfacen $y = x^2$:

$$¿y_0 = (-x_0)^2?$$

$$¿y_0 = x_0^2?$$

Pero, de lo anterior sabemos que $y_0 = x_0^2$. Así, la gráfica *es* simétrica con respecto al eje y.

Cuando demostramos la simetría en el ejemplo 1, (x_0, y_0) pudo haber sido cualquier punto sobre la gráfica. Por conveniencia, de aquí en adelante omitiremos los subíndices. Esto significa que una gráfica es simétrica con respecto al eje y, si al reemplazar x por $-x$ en su ecuación, nos resulta una ecuación equivalente.

Otro tipo de simetría se muestra por medio de la gráfica de $x = y^2$ en la figura 3.31. Aquí la parte de la gráfica debajo del eje x es la reflexión con respecto del eje x, de la parte que se encuentra por arriba de éste, y viceversa. Si el punto (x, y) pertenece a la gráfica, entonces $(x, -y)$ también pertenece a ella. Esta gráfica se dice que es *simétrica con respecto al eje x*.

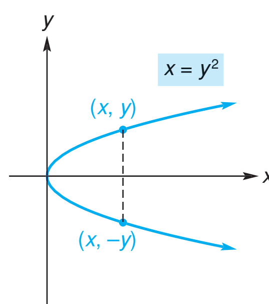


FIGURA 3.31 Simetría con respecto al eje x.

Definición

Una gráfica es ***simétrica con respecto al eje x*** si y sólo si $(x, -y)$ pertenece a la gráfica cuando (x, y) pertenece a ella.

Así, la gráfica de una ecuación en x y y tendrá simetría con respecto al eje x, si al reemplazar y por $-y$ resulta una ecuación equivalente. Por ejemplo, aplicando esta prueba a la gráfica de $x = y^2$ mostrada en la figura 3.31 se obtiene

$$x = (-y)^2,$$

$$x = y^2,$$

la cual es equivalente a la ecuación original. Así podemos afirmar que la gráfica es simétrica con respecto al eje x.

Un tercer tipo de simetría, *simetría con respecto al origen*, se ilustra por la gráfica de $y = x^3$ (véase la fig. 3.32). Siempre que el punto (x, y) pertenezca a la gráfica, $(-x, -y)$ también pertenecerá a ella. Como resultado de esto, el segmento de línea que une a los puntos (x, y) y $(-x, -y)$ está bisecado por el origen.

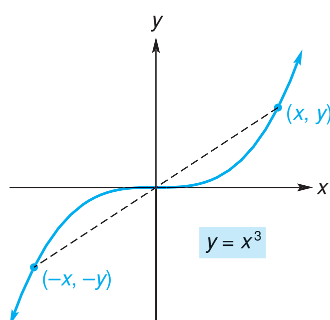


FIGURA 3.32 Simetría con respecto al origen.

Definición

Una gráfica es ***simétrica con respecto al origen*** si y sólo si $(-x, -y)$ pertenece a la gráfica cuando (x, y) pertenece a ella.

Así, la gráfica de una ecuación en x y y tendrá simetría con respecto al origen, si al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$, resulta una ecuación equivalente. Por ejemplo, aplicando esta prueba a la gráfica de $y = x^3$ mostrada en la figura 3.32, se obtiene

$$-y = (-x)^3,$$
$$-y = -x^3,$$
$$y = x^3,$$

que es equivalente a la ecuación original. De acuerdo con esto, la gráfica es simétrica con respecto al origen.

La tabla 3.1 resume las pruebas para la simetría. Cuando sabemos que una gráfica tiene simetría, podemos hacer su bosquejo con menos puntos de los que, de otra manera, serían necesarios.

TABLA 3.1 Pruebas para la simetría

Simetría con respecto al eje x	Reemplace y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al eje y	Reemplace x por $-x$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al origen	Reemplace x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.

EJEMPLO 2 Graficación con intersecciones y simetría

Probar la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen de $y = \frac{1}{x}$. Después determinar las intersecciones y hacer el bosquejo de la gráfica.

Solución:

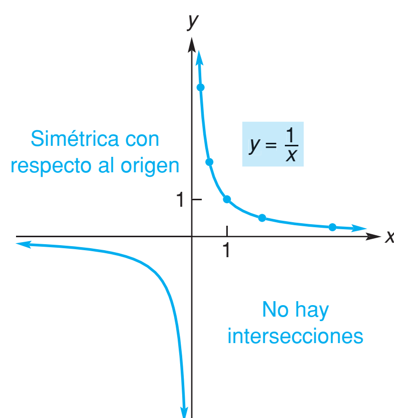
Simetría Con respecto al *eje x:* al reemplazar y por $-y$ en $y = 1/x$ se obtiene

$$-y = \frac{1}{x} \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{x},$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Por tanto, la gráfica *no es* simétrica con respecto al eje x.

Con respecto al *eje y:* al reemplazar x por $-x$ en $y = 1/x$ se obtiene

$$y = \frac{1}{-x} \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{x},$$



x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

FIGURA 3.33 Gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$.

que no es equivalente a la ecuación dada. De este modo la gráfica *no es simétrica* con respecto al eje y.

Con el origen: al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en $y = 1/x$, se obtiene

$$-y = \frac{1}{-x} \quad \text{o} \quad y = \frac{1}{x},$$

que es equivalente a la ecuación dada. Así, podemos afirmar que la gráfica *sí es* simétrica con respecto al origen.

Intersecciones Como x no puede ser cero, la gráfica no tiene intersecciones con el eje y. Si y es 0, entonces $0 = 1/x$, pero esta ecuación no tiene solución. Por tanto, no existen intersecciones con el eje x.

Discusión Puesto que no existen intersecciones, la gráfica no puede intersecar a ninguno de los ejes. Si $x > 0$, sólo obtenemos puntos en el primer cuadrante. La figura 3.33 muestra la parte de la gráfica en el cuadrante I. Por simetría, reflejamos esa parte con respecto al origen para obtener toda la gráfica.

EJEMPLO 3 Graficación con intersecciones y simetría

Probar por la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen para $y = f(x) = 1 - x^4$. Después encontrar las intersecciones y hacer el bosquejo de la gráfica.

Solución:

Simetría *Con el eje x:* al reemplazar y por $-y$ en $y = 1 - x^4$ se obtiene

$$-y = 1 - x^4 \quad \text{o} \quad y = -1 + x^4,$$

que no es equivalente a la ecuación dada. Así, la gráfica *no es* simétrica con respecto al eje x.

Con el eje y: al reemplazar x por $-x$ en $y = 1 - x^4$ se obtiene

$$y = 1 - (-x)^4 \quad \text{o} \quad y = 1 - x^4,$$

que sí es equivalente a la ecuación dada. De este modo afirmamos que la gráfica *sí es* simétrica con respecto al eje y.

Con el origen: al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en $y = 1 - x^4$ se obtiene

$$-y = 1 - (-x)^4, \qquad -y = 1 - x^4, \qquad y = -1 + x^4,$$

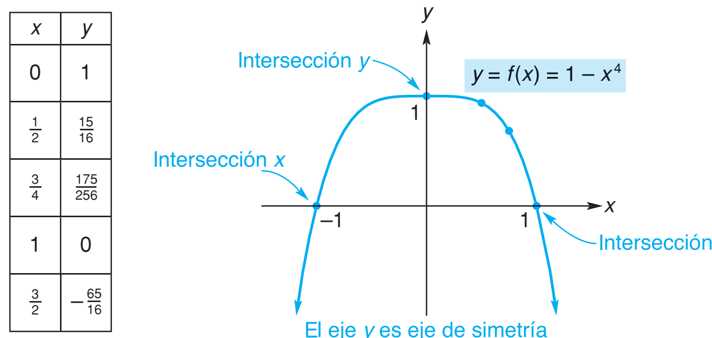
que no es equivalente a la ecuación dada. Así, la gráfica *no es* simétrica con respecto al origen.

Intersecciones Para examinar las intersecciones con el eje x *hacemos* $y = 0$ en $y = 1 - x^4$. Entonces

$$\begin{aligned} 1 - x^4 &= 0, \\ (1 - x^2)(1 + x^2) &= 0, \\ (1 - x)(1 + x)(1 + x^2) &= 0, \\ x = 1 \quad &\text{o} \quad x = -1. \end{aligned}$$

Por tanto, las intersecciones x son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Para examinar las intersecciones y, hacemos $x = 0$. Entonces $y = 1$, de modo que $(0, 1)$ es la única intersección y.

Discusión Si se grafican las intersecciones y algunos puntos (x, y) a la derecha del eje y, podemos hacer el bosquejo de *toda* la gráfica utilizando la simetría con respecto al eje y (véase la fig. 3.34).



x	y
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{16}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{175}{256}$
1	0
$\frac{3}{2}$	$-\frac{65}{16}$

FIGURA 3.34 Gráfica de $y = 1 - x^4$.

En el ejemplo 3 mostramos que la gráfica de $y = f(x) = 1 - x^4$ no tiene simetría respecto al eje x. Con la excepción de la función constante $f(x) = 0$, *la gráfica de cualquier **función** $y = f(x)$ no puede ser simétrica con respecto al eje x,* ya que tal simetría implica dos valores de y para el mismo valor de x, lo cual viola la definición de función.

EJEMPLO 4 Graficación con intersecciones y simetría

Para la gráfica $4x^2 + 9y^2 = 36$, probar *por las intersecciones y simetrías. Hacer el bosquejo de la gráfica.*

Solución:

Intersecciones Si $y = 0$, entonces $4x^2 = 36$, de esta manera $x = \pm 3$. Por tanto, las intersecciones con el eje x son $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Si $x = 0$, entonces $9y^2 = 36$ y de esta manera, $y = \pm 2$. Por tanto, las intersecciones con el eje y son $(0, 2)$ y $(0, -2)$.

Simetría *Con el eje x:* al reemplazar y por $-y$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$ se obtiene

$$4x^2 + 9(-y)^2 = 36, \quad \text{o} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Ya que obtenemos la ecuación original, afirmamos que existe simetría con respecto al eje x.

Con el eje y: al reemplazar x por $-x$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$ se obtiene

$$4(-x)^2 + 9y^2 = 36, \quad \text{o} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Otra vez obtenemos la ecuación original, de modo que también existe simetría con respecto al eje y.

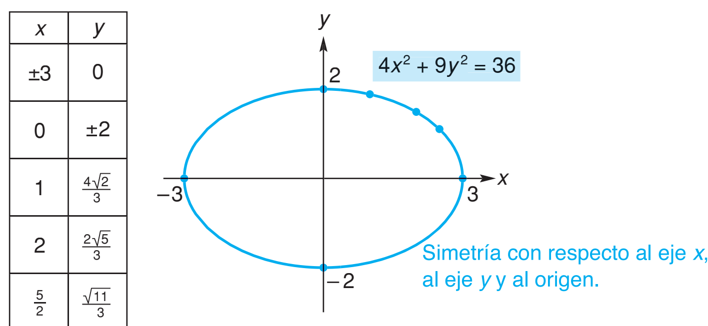
Con el origen: al reemplazar x por x y y por $-y$ en $4x^2 + 9y^2 = 36$ se obtiene

$$4(-x)^2 + 9(-y)^2 = 36, \quad \text{o} \quad 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Ya que ésta es la ecuación original, la gráfica también es simétrica con respecto al origen.

Discusión En la figura 3.35 se grafican las intersecciones y algunos puntos en el primer cuadrante. Después los puntos se unen por medio de una curva suave.

Los puntos del cuarto cuadrante se obtienen por simetría con respecto al eje x. Después, por simetría con respecto al eje y, se determina toda la gráfica. Existen otras formas de graficar la ecuación utilizando la simetría. Por ejemplo, después de graficar las intersecciones y algunos puntos en el primer cuadrante, por simetría con respecto al origen podemos obtener el tercer cuadrante. Por simetría con respecto al eje x (o al eje y) podemos obtener la gráfica completa.



x	y
± 3	0
0	± 2
1	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$
2	$\frac{2\sqrt{5}}{3}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{\sqrt{11}}{3}$

FIGURA 3.35 Gráfica de $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Este conocimiento nos puede ayudar a ahorrar tiempo al verificar las simetrías.

En el ejemplo 4 la gráfica es simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen. Con base en ella puede mostrarse que **para cualquier gráfica, si existen dos de los tres tipos de simetría, entonces el tipo restante también debe existir.**

Ejercicio 3.5

En los problemas del 1 al 16 determine las intersecciones con el eje x y con el eje y de las gráficas de las ecuaciones. También, pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. No haga el bosquejo de las gráficas.

1. $y = 5x$.
2. $y = f(x) = x^2 - 4$.
3. $2x^2 + y^2x^4 = 8 - y$.
4. $x = y^3$.
5. $9x^2 - 4y^2 = 36$.
6. $y = 7$.
7. $x = -2$.
8. $y = |2x| - 2$.
9. $x = -y^{-4}$.
10. $y = \sqrt{x^2 - 25}$.
11. $x - 4y - y^2 + 21 = 0$.
12. $x^3 + xy + y^2 = 0$.
13. $y = f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 5}$.
14. $x^2 + xy + y^2 = 0$.
15. $y = \dfrac{3}{x^3 + 8}$.
16. $y = \dfrac{x^4}{x + y}$.

En los problemas del 17 al 24 determine las intersecciones con el eje x y con el eje y de las gráficas de las ecuaciones. También, pruebe la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. Después haga el bosquejo de las gráficas.

17. $2x + y^2 = 4$.
18. $x = y^4$.
19. $y = f(x) = x^3 - 4x$.
20. $3y = 5x - x^3$.
21. $|x| - |y| = 0$.
22. $x^2 + y^2 = 16$.
23. $4x^2 + y^2 = 16$.
24. $x^2 - y^2 = 1$.

25. Pruebe que la gráfica de $y = f(x) = 2 - 0.03x^2 - x^4$ es simétrica con respecto al eje y y después grafique la función. (a) Haga uso de la simetría en donde sea posible para encontrar todas las intersecciones. Determine (b) el valor máximo de $f(x)$, y (c) el rango de f. Redondee todos los valores a dos decimales.

26. Pruebe que la gráfica de $y = f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 5$ es simétrica con respecto al eje y y después grafique la función. Determine todos los ceros reales de f. Redondee sus respuestas a dos decimales.

OBJETIVO Familiarizarse con las formas de las gráficas de seis funciones básicas, y considerar la traslación, la reflexión y el alargamiento y contracción verticales de la gráfica de una función.

3.6 Traslaciones y reflexiones

Hasta ahora nuestro enfoque para graficar se ha basado en la graficación de puntos y en el uso de cualquier simetría que exista. Pero esta técnica no es necesariamente la preferida. Más adelante analizaremos gráficas utilizando otras técnicas. Sin embargo, como algunas funciones y sus gráficas asociadas aparecen con mucha frecuencia, para propósitos ilustrativos, encontramos útil memorizarlas. La figura 3.36 muestra seis de tales funciones.

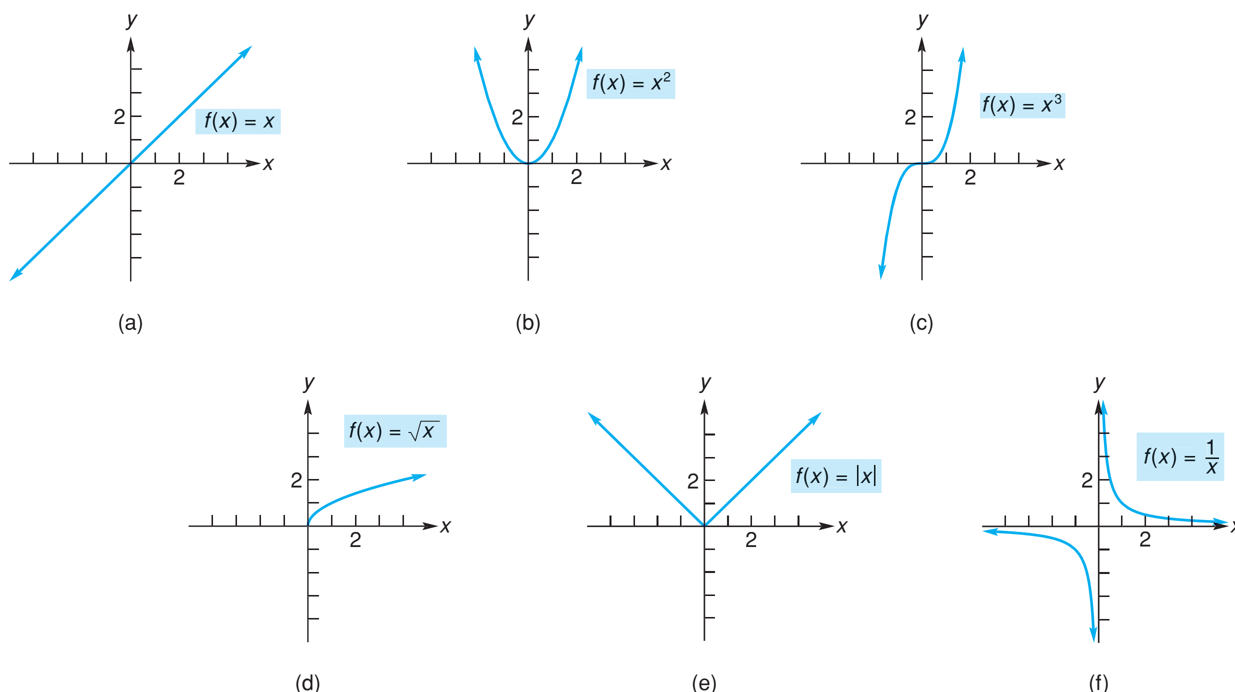


FIGURA 3.36 Funciones utilizadas con frecuencia.

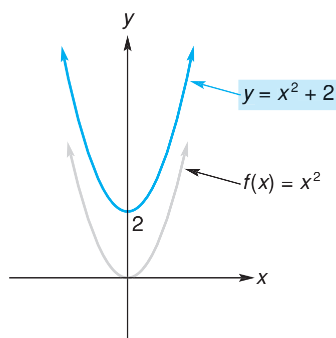


FIGURA 3.37 Gráfica de $y = x^2 + 2$.

A veces, al modificar una función mediante una manipulación *algebraica*, la gráfica de la nueva función puede obtenerse a partir de la gráfica de la función original realizando una manipulación *geométrica*. Por ejemplo, podemos utilizar la gráfica de $f(x) = x^2$ para graficar $y = x^2 + 2$. Observe que $y = f(x) + 2$. Por tanto, para cada x, la ordenada correspondiente para la gráfica de $y = x^2 + 2$, es 2 unidades mayor que la ordenada para la gráfica de $f(x) = x^2$. Esto significa que la gráfica de $y = x^2 + 2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada o *trasladada*, 2 unidades hacia arriba (véase la fig. 3.37). Decimos que la gráfica de $y = x^2 + 2$ es una *transformación* de la gráfica de $f(x) = x^2$. La tabla 3.2 presenta una lista de los tipos básicos de transformaciones.

EJEMPLO 1 Traslación horizontal

Hacer el bosquejo de la gráfica de $y = (x - 1)^3$.

Solución: observamos que $(x - 1)^3$ es x^3 *con* x reemplazada por $x - 1$. Por tanto, si $f(x) = x^3$, entonces $y = (x - 1)^3 = f(x - 1)$, que tiene la forma $f(x - c)$, donde $c = 1$. De la tabla 3.2, la gráfica de $y = (x - 1)^3$ es la gráfica de $f(x) = x^3$ desplazada una unidad a la derecha (véase la fig. 3.38).

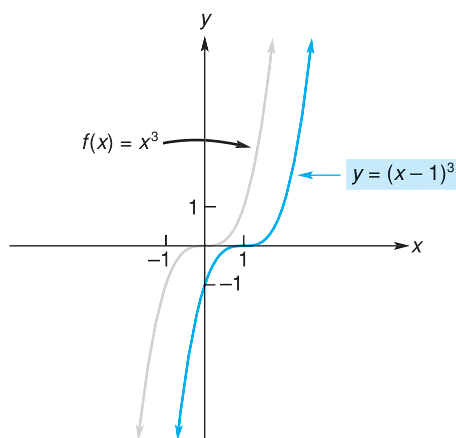


FIGURA 3.38 Gráfica de $y = (x - 1)^3$.

TABLA 3.2 Transformaciones, $c > 0$

Ecuación	Cómo transformar la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de la ecuación
1. $y = f(x) + c$	Desplazar c unidades hacia arriba
2. $y = f(x) - c$	Desplazar c unidades hacia abajo
3. $y = f(x - c)$	Desplazar c unidades hacia la derecha
4. $y = f(x + c)$	Desplazar c unidades hacia la izquierda
5. $y = -f(x)$	Reflejar con respecto al eje x
6. $y = f(-x)$	Reflejar con respecto al eje y
7. $y = cf(x), c > 1$	Alargar verticalmente alejándose del eje x por un factor de c
8. $y = cf(x), c < 1$	Contraer verticalmente hacia el eje x por un factor de c

EJEMPLO 2 Contracción y reflexión

Hacer el bosquejo de la gráfica de $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Solución: podemos resolver este problema en dos pasos. Primero, observe que $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ es $\sqrt{x}$ multiplicada por $\frac{1}{2}$. Así, si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $\frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2}f(x)$, que tiene la forma $cf(x)$, con $c = \frac{1}{2}$. De modo que la gráfica de $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ es la gráfica de f comprimida verticalmente hacia el eje x por un factor de $\frac{1}{2}$ (transformación 8, tabla 3.2; véase la fig. 3.39). Segundo, el signo menos en $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ provoca una reflexión en la gráfica de $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ con respecto al eje x (transformación 5, tabla 3.2; véase la fig. 3.39).

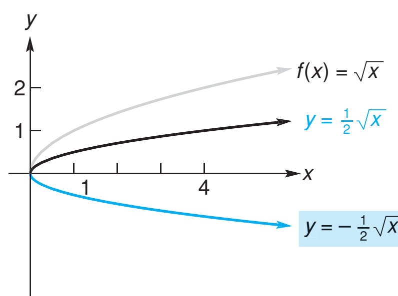


FIGURA 3.39 Para graficar $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$, comprima $y = \sqrt{x}$ y refleje el resultado con respecto al eje x.

Ejercicio 3.6

En los problemas del 1 al 12 utilice las gráficas de las funciones de la figura 3.36 y las técnicas de transformación, para graficar las funciones dadas.

1. $y = x^2 - 2.$ **2.** $y = -x^2.$ **3.** $y = \frac{1}{x-2}.$ **4.** $y = \sqrt{x+2}.$

5. $y = \frac{2}{3x}.$ **6.** $y = |x| + 1.$ **7.** $y = |x+1| - 2.$ **8.** $y = -\frac{1}{2}x^3.$

9. $y = 1 - (x-1)^2.$ **10.** $y = (x-1)^2 + 1.$ **11.** $y = \sqrt{-x}.$ **12.** $y = \frac{5}{2-x}.$

En los problemas del 13 al 16 describa qué debe hacerse a la gráfica de $y = f(x)$ para obtener la gráfica de la ecuación dada.

13. $y = f(x-4) + 3.$ **14.** $y = f(x+3) - 4.$ **15.** $y = f(-x) - 5.$ **16.** $y = -f(x+3).$

17. Grafique la función $y = \sqrt[3]{x} + k$ para $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$ y -3. Observe las traslaciones verticales comparadas con la primera gráfica.

18. Grafique la función $y = \sqrt[3]{x+k}$ para $k = 0, 1, 2, 3, -1, -2$ y -3. Observe las traslaciones horizontales comparadas con la primera gráfica.

19. Grafique la función $y = k\sqrt[3]{x}$ para $= 1, 2, \frac{1}{2}$ y 3. Observe el alargamiento y la contracción verticales comparadas con la primera gráfica. Grafique la función para $k = -2$. Observe que la gráfica es la misma que la obtenida por medio de un alargamiento, en un factor de 2, de la reflexión de $y = \sqrt[3]{x}$ con respecto al eje x.

3.7 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 3.1 función dominio rango variable independiente variable dependiente $f(x)$ valor funcional cociente de diferencia, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ función de demanda función de oferta

Sección 3.2 función constante función polinomial función lineal función cuadrática función definida por partes valor absoluto $|x|$ factorial $r!$ función racional

Sección 3.3 $f + g$ $f - g$ fg f/g $f \circ g$ composición de funciones

Sección 3.4 sistema de coordenadas rectangulares ejes de coordenadas origen plano x,y par ordenado (x, y) coordenadas de un punto coordenada x coordenada y abscisa ordenada cuadrante gráfica de una ecuación intersección x intersección y gráfica de una función eje de valores de la función ceros de una función prueba de la recta vertical

Sección 3.5 simetría con respecto al eje x simetría con respecto al eje y simetría con respecto al origen

Resumen

Una función f es una regla de correspondencia que asigna exactamente un número de salida $f(x)$ a cada número de entrada x. Por lo regular, una función se especifica por medio de una ecuación que indica lo que debe hacerse a una entrada x para obtener $f(x)$. Para obtener un valor particular $f(a)$ de la función, reemplazamos cada x en la ecuación por a.

El dominio de una función consiste en todos los números de entrada, y el rango consiste en todos los números de salida. A menos que se diga lo contrario, el dominio de f consiste en todos los números reales x para los cuales $f(x)$ también es un número real.

Algunos tipos especiales de funciones son: funciones constantes, funciones polinomiales y funciones racionales. Una función que está definida por medio de más de una expresión se denomina función definida por partes.

En economía, las funciones de oferta y las funciones de demanda dan una correspondencia entre el precio p de un producto y el número de unidades q del producto, que los productores (o consumidores) ofrecerán (o comprarán) a ese precio.

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar una suma, diferencia, producto, cociente o composición como sigue:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Un sistema de coordenadas rectangulares nos permite representar de manera geométrica ecuaciones en dos variables, así como funciones. La gráfica de una ecuación en x y y consiste en todos los puntos (x, y) que corresponden a las soluciones de la ecuación. Para obtenerla trazamos un número suficiente de puntos y los conectamos (en donde sea apropiado), de modo que la forma básica de la gráfica sea visible. Los puntos en donde la gráfica interseca al eje x y al eje y se denominan intersección x e intersección y, respectivamente. Una intersección x se encuentra al hacer y igual a cero y resolver para x; una intersección y se encuentra al hacer x igual a cero y resolver para y.

La gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ y consiste en todos los puntos $(x, f(x))$ tales que x está en el dominio de f. Los ceros de f son los valores de x para los cuales $f(x) = 0$. Con base en la gráfica de una función, es fácil determinar el dominio y el rango.

Para verificar que una gráfica representa a una función utilizamos la prueba de la recta vertical. Una recta vertical no puede cortar a la gráfica de una función en más de un punto.

Cuando la gráfica de una ecuación tiene simetría, el efecto *de imagen de espejo* nos permite bosquejar la gráfica con menos puntos que de otra forma serían necesarios. Las pruebas para simetría son las siguientes:

Simetría con respecto al eje x	Reemplace y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al eje y	Reemplace x por $-x$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.
Simetría con respecto al origen	Reemplace x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación dada. Es simétrica si se obtiene una ecuación equivalente.

Algunas veces la gráfica de una función puede obtenerse a partir de una función conocida, por medio de un desplazamiento vertical hacia arriba o hacia abajo, un desplazamiento horizontal hacia la derecha o hacia la izquierda, una reflexión con respecto al eje x o al eje y, o bien un alargamiento o una contracción vertical en dirección del eje x. Tales transformaciones están indicadas en la tabla 3.2 de la sección 3.6.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color se sugiere utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 6 proporcione el dominio de cada función.

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$.

2. $g(x) = x^2 - 6|x|$.

3. $F(t) = 7t + 4t^2$.

4. $G(x) = 18$.

5. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

6. $H(s) = \dfrac{\sqrt{s-5}}{4}$.

En los problemas del 7 al 14 determine los valores funcionales para la función dada.

7. $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$; $f(0), f(-3), f(5), f(t)$.

8. $g(x) = 4$; $g(4), g(\frac{1}{100}), g(-156), g(x+4)$.

9. $G(x) = \sqrt{x-1}$; $G(1), G(5), G(t+1), G(x^3)$.

10. $F(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$; $F(-1), F(0), F(5), F(x+3)$.

11. $h(u) = \dfrac{\sqrt{u+4}}{u}$; $h(5), h(-4), h(x), h(u-4)$.

12. $H(s) = \dfrac{(s-4)^2}{3}$; $H(-2), H(7), H(\frac{1}{2}), H(x^2)$.

13. $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x < 2 \\ 8 - x^2, & \text{si } x > 2; \end{cases}$

$f(4), f(-2), f(0), f(10)$.

14. $h(q) = \begin{cases} q, & \text{si } -1 \le q < 0 \\ 3 - q, & \text{si } 0 \le q < 3; \\ 2q^2, & \text{si } 3 \le q \le 5 \end{cases}$

$h(0), h(4), h(-\frac{1}{2}), h(\frac{1}{2})$.

En los problemas del 15 al 18 determine (a) $f(x+h)$ y (b) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$; simplifique sus respuestas.

15. $f(x) = 3 - 7x$.

16. $f(x) = 11x^2 + 4$.

17. $f(x) = 4x^2 + 2x - 5$.

18. $f(x) = \dfrac{7}{x+1}$.

19. Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 2x + 3$, determine lo siguiente:

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f + g)(4)$. **c.** $(f - g)(x)$.

d. $(fg)(x)$. **e.** $(fg)(1)$. **f.** $\frac{f}{g}(x)$.

g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(f \circ g)(5)$. **i.** $(g \circ f)(x)$.

20. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 1$, determine lo siguiente:

a. $(f + g)(x)$. **b.** $(f - g)(x)$. **c.** $(f - g)(-3)$.

d. $(fg)(x)$. **e.** $\frac{f}{g}(x)$. **f.** $\frac{f}{g}(2)$.

g. $(f \circ g)(x)$. **h.** $(g \circ f)(x)$. **i.** $(g \circ f)(-4)$.

En los problemas del 21 al 24 determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

21. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x - 1$.

22. $f(x) = \frac{x + 1}{4}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

23. $f(x) = \sqrt{x + 2}$, $g(x) = x^3$.

24. $f(x) = 2$, $g(x) = 3$.

En los problemas 25 y 26 encuentre las intersecciones de la gráfica de cada ecuación, y examine la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. No haga un bosquejo de las gráficas.

25. $y = 2x - 3x^3$.

26. $\frac{xy^2}{x^2 + 1} = 4$.

En los problemas 27 y 28 encuentre las intersecciones con el eje x y con el eje y de la gráfica de cada ecuación. También examine la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen. Después haga un bosquejo de las gráficas.

27. $y = 9 - x^2$.

28. $y = 3x - 7$.

En los problemas del 29 al 32 haga la gráfica de cada función y proporcione su dominio y rango. También determine las intersecciones.

29. $G(u) = \sqrt{u + 4}$.

30. $f(x) = |x| + 1$.

31. $y = g(t) = \frac{2}{|t - 4|}$.

32. $g(t) = \sqrt{4t}$

---

33. Grafique la siguiente función definida por partes y dé su dominio y rango:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x \leq 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

34. Utilice la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ para hacer un bosquejo de la gráfica de $y = \sqrt{x - 2} - 1$.

35. Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para hacer un bosquejo de la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

36. Ecuación de tendencia Las ventas anuales proyectadas (en dólares) de un producto nuevo están dadas por la ecuación $S = 150{,}000 + 3000t$, en donde t es el tiempo en años, contados a partir de 2001. Tal ecuación se denomina *ecuación de tendencia*. Determine las ventas anuales proyectadas para 2006. ¿Es S una función de t?

37. En la figura 3.40, ¿cuáles gráficas representan funciones de x?

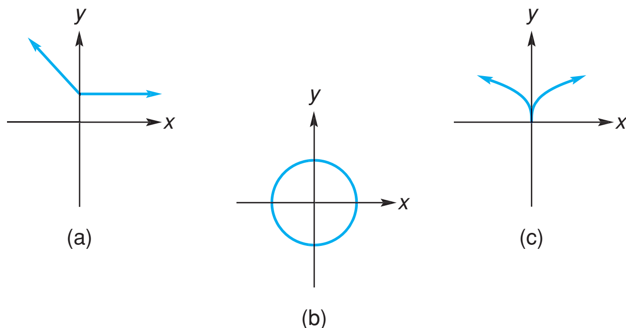


FIGURA 3.40 Diagrama para el problema 37.

38. Si $f(x) = (4x^{2.3} - 3x^3 + 7)^5$, determine (a) $f(2)$ y (b) $f(2.3)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

39. Encuentre todas las raíces reales de la ecuación

$$5x^3 - 7x^2 = 4x - 2.$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

40. Encuentre todas las raíces reales de la ecuación

$$x^4 - 4x^3 = (2x - 1)^2.$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

41. Determine todos los ceros reales de

$$f(x) = x(2.1x^2 - 3)^2 - x^3 + 1.$$

Redondee sus respuestas a dos decimales.

42. Determine el rango de

$$f(x) = \begin{cases} -2.5x - 4, & \text{si } x < 0, \\ 6 + 4.1x - x^2, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

43. Con base en la gráfica de $f(x) = -x^3 + 0.04x + 7$, encuentre (a) el rango y (b) las intersecciones. Redondee los valores a dos decimales.

44. Con base en la gráfica de $f(x) = \sqrt{x + 3}(x^2 - 1)$, encuentre (a) el valor mínimo de $f(x)$, (b) el rango de f y (c) todos los ceros reales de f. Redondee los valores a dos decimales.

45. Grafique $y = f(x) = x^3 + x^k$, para $k = 0, 1, 2, 3$ y 4. ¿Para cuáles valores de k la gráfica tiene (a) simetría con respecto al eje y, (b) simetría con respecto al origen?

Aplicación práctica

Una experiencia con los impuestos



Quizá haya escuchado el viejo dicho: "Sólo existen dos cosas seguras en la vida, la muerte y los impuestos". Aquí veremos cómo podemos aplicar las funciones a una de estas "verdades", a saber, los impuestos.

Se utilizará la tasa de impuesto federal de 2000 de Estados Unidos, para una pareja casada que presenta una declaración conjunta. Suponga que usted quiere determinar una fórmula para la función f, tal que $f(x)$ es el impuesto en dólares sobre un ingreso gravable de x dólares. El impuesto está basado en varios rangos de ingreso gravable. De acuerdo con la tabla Y-1 del Servicio Interno de Recaudación (IRS, por sus siglas en inglés; véase la fig. 3.41):

- Si x es \$0 o menor, el impuesto es \$0.
- Si x es mayor a \$0, pero no mayor a \$43,850, el impuesto es 15% de x.
- Si x es mayor a \$43,850, pero no mayor a \$105,950, el impuesto es \$6,577.50 más 28% del monto superior a \$43,850.
- Si x es mayor a \$105,950, pero no mayor a \$161,450, el impuesto es \$23,965.50 más 31% del monto superior a \$105,950.
- Si x es mayor a \$161,450, pero no mayor a \$288,350, el impuesto es \$41,170.50 más 36% del monto superior a \$161,450.
- Si x es mayor a \$288,350, el impuesto es \$86,854.50 más 39.6% del monto superior a \$288,350.

Forma Y-1 — Utilice si su estado civil es **Casado por bienes mancomunados** o **viudo(a)**

Si el monto de la forma 1040, línea 38, es *mayor a–*	*Pero no mayor a–*	Ingrese en la forma 1040, línea 39		*del monto que exceda a–*
\$0	\$43,850	-----------	**15%**	**\$0**
43,850	105,950	**\$6,577.50 +**	**28%**	**43,850**
105,950	161,450	**23,695.50 +**	**31%**	**105,950**
161,450	288,350	**41,170.50 +**	**36%**	**161,450**
288,350	-----------	**86,854.50 +**	**39.6%**	**288,350**

FIGURA 3.41 Servicio Interno de Recaudación 2000 Forma Y-1.

Es claro que si $x \leq 0$, entonces

$$f(x) = 0.$$

Si $0 < x \leq 43{,}850$, entonces

$$f(x) = 0.15x.$$

Obsérvese que el impuesto sobre el ingreso gravable de \$43,850 es

$$f(43{,}850) = 0.15(43{,}850) = 6{,}577.50.$$

Si $43{,}850 < x \leq 105{,}950$, entonces el monto por encima de 43,850 es $x - 43{,}850$, de modo que

$$f(x) = 6{,}577.50 + 0.28(x - 43{,}850).$$

Como 6,577.50 es 15% de 43,850, para un ingreso gravable entre \$43,850 y \$105,950, en esencia, usted paga impuesto a la tasa de 15% por los primeros \$43,850 de ingreso y a la tasa de 28% por el ingreso restante. Obsérvese que el impuesto sobre \$105,950 es

$$\begin{aligned} f(105{,}950) &= 6{,}577.50 + 0.28(105{,}950 - 43{,}850) \\ &= 6{,}577.50 + 0.28(62{,}100) \\ &= 6{,}577.50 + 17{,}388 = 23{,}965.50. \end{aligned}$$

Si $105{,}950 < x \leq 161{,}450$, entonces la cantidad que excede a 105,950 es $x - 105{,}950$, de modo que

$$f(x) = 23{,}965.50 + 0.31(x - 105{,}950).$$

Ya que \$23,965.50 es el impuesto sobre \$105,950, para un ingreso gravable entre \$105,950 y \$161,450, usted está pagando impuestos a la tasa de 15% por los primeros \$43,850 de ingreso, a la tasa de 28% por los siguientes \$62,100 de ingreso $(105{,}950 - 43{,}850 = 62{,}100)$, y a la tasa de 31% por el ingreso restante. Nótese que el impuesto sobre \$161,450 es

$$\begin{aligned} f(161{,}450) &= 23{,}965.50 + 0.31(161{,}450 - 105{,}950) \\ &= 23{,}965.50 + 0.31(55{,}500) \\ &= 23{,}965.50 + 17{,}205 \\ &= 41{,}170.50. \end{aligned}$$

Si $161{,}450 < x \le 288{,}350$, entonces el monto que excede a 161,450 es $x - 161{,}450$, de modo que

$$f(x) = 41{,}170.50 + 0.36(x - 161{,}450).$$

Ya que $41,170.50 es el impuesto sobre $161,450, para un ingreso gravable entre $161,450 y $288,350, usted está pagando impuestos a una tasa de 15% por los primeros $43,850 de ingreso, a la tasa de 28% por los siguientes $62,100 de ingreso, a la tasa de 31% por los siguientes $55,500 de ingreso ($161{,}450 - 105{,}950 = 55{,}500$) y a la tasa de 36% por el ingreso restante. Obsérvese que el impuesto sobre $288,350 es

$$\begin{aligned} f(288{,}350) &= 41{,}170.50 + 0.36(288{,}350 - 161{,}450) \\ &= 41{,}170.50 + 0.36(126{,}900) \\ &= 41{,}170.50 + 45{,}684 = 86{,}854.50. \end{aligned}$$

Si $x > 288{,}350$, entonces el monto sobre 288,350 es $x - 288{,}350$, de modo que

$$f(x) = 86{,}854.50 + 0.396(x - 288{,}350).$$

Como $86,854.50 es el impuesto sobre $288,350, para un ingreso gravable superior a $288,350, usted está pagando impuesto a una tasa de 15% por los primeros $43,850 de ingreso, a la tasa de 28% por los siguientes $62,100 de ingreso, a la tasa de 31% por los siguientes $55,500 de ingreso, a la tasa de 36% por los siguientes $126,900 de ingreso y a la tasa de 39.6% por el ingreso restante.

Al resumir todos estos resultados obtenemos la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \le 0, \\ 0.15x, & \text{si } 0 < x \le 43{,}850, \\ 6{,}577.50 + 0.28(x - 43{,}850), & \text{si } 43{,}850 < x \le 105{,}950, \\ 23{,}965.50 + 0.31(x - 105{,}950), & \text{si } 105{,}950 < x \le 161{,}450, \\ 41{,}170.50 + 0.36(x - 161{,}450), & \text{si } 161{,}450 < x \le 288{,}350, \\ 86{,}854.50 + 0.396(x - 288{,}350), & \text{si } x > 288{,}350. \end{cases}$$

Con estas fórmulas, usted puede representar geométricamente la función de impuesto al ingreso, como en la figura 3.42.

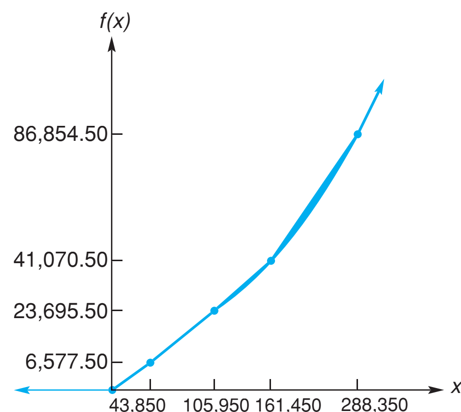


FIGURA 3.42 Función de impuesto al ingreso.

Ejercicios

Utilice la función de impuesto al ingreso f anterior, para determinar el impuesto sobre el ingreso gravable en el año 2000.

1. $120,000. **2.** $35,350. **3.** $290,000. **4.** $162,700.

5. Busque la forma Y-1 más reciente en `www.irs.gov` (Inst 1040 Tax Tables) y repita los problemas 1 a 4 utilizando esa información.

6. ¿Por qué fue significativo que $f(105{,}950) = \$23{,}965.50$, $f(161{,}450) = \$41{,}170.50$, etcétera?

CAPÍTULO 4

Rectas, parábolas y sistemas de ecuaciones

Para el problema de la contaminación industrial, algunas personas recomiendan una solución basada en el mercado: dejar que los fabricantes contaminen, pero hacer que ellos paguen por ese privilegio. Entre mayor contaminación mayor pago, o gravamen. La idea es dar a los fabricantes un incentivo para no contaminar más de lo necesario.

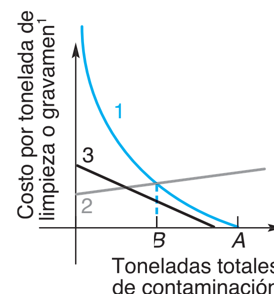
¿Funciona este enfoque? En la figura de abajo, la línea 1 representa el costo por tonelada de reducción de contaminación. Una compañía que contamina de manera indiscriminada puede casi siempre reducir en alguna forma su contaminación a un costo mínimo. Sin embargo, conforme la cantidad de contaminación se reduce, el costo por tonelada se eleva y eventualmente se dispara. Esto se ilustra por medio de la línea que se eleva indefinidamente conforme las toneladas totales de contaminación producidas se aproximan a cero.

La línea 2 es un esquema de gravamen que es menos estricto con operaciones que se efectúan con limpieza, pero que cobra una cuota creciente por tonelada conforme la cantidad de contaminación total crece.

En contraste, la línea 3 es un esquema en el que los fabricantes que contaminan poco pagan un gravamen alto por tonelada, mientras que los grandes contaminadores pagan menos por tonelada (pero más de manera global). Surgen preguntas de equidad, ¿qué tan bien funcionará cada esquema como una medida de control de contaminación?

Al enfrentarse con un impuesto por contaminar, una compañía tiende a disminuir la contaminación *mientras ahorre más en costos de impuestos que en costos por reducción de contaminación*. Los esfuerzos por reducción continúan hasta que el ahorro de impuestos y los costos por reducción empiezan a equilibrarse.

La segunda mitad de este capítulo estudia los sistemas de ecuaciones. Aquí, las líneas 1 y 2 representan un sistema de ecuaciones, y las líneas 1 y 3 representan un sistema alterno. Una vez que haya aprendido cómo resolver sistemas de ecuaciones, puede regresar a esta página y verificar que el esquema de la línea 2 conduce a una reducción de contaminación de una cantidad A a una cantidad B, mientras que el esquema de la línea 3 no funciona como una medida de control de contaminación, ya que deja el nivel de contaminación en el nivel A.



[1]Técnicamente, este es el costo *marginal* por tonelada (véase la sec. 10.3).

OBJETIVO Desarrollar la noción de pendiente y formas diferentes de las ecuaciones de rectas.

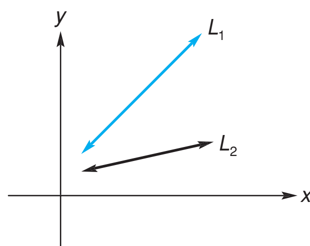


FIGURA 4.1 La recta L_1 está "más inclinada" que la recta L_2.

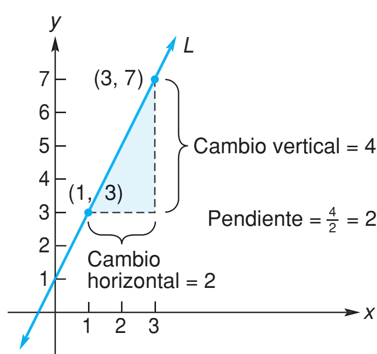


FIGURA 4.2 Pendiente de una recta.

No tener pendiente no significa tener una pendiente igual a cero.

4.1 Rectas

Pendiente de una recta

Muchas relaciones entre cantidades pueden representarse de manera adecuada por medio de rectas. Una característica de una recta es su "inclinación". Por ejemplo, en la figura 4.1 la recta L_1, crece más rápido que la recta L_2 cuando va de izquierda a derecha. En este sentido L_1 está más inclinada con respecto a la horizontal.

Para medir la inclinación de una recta usamos la noción de *pendiente*. En la figura 4.2, conforme nos movemos a lo largo de la recta L, de (1,3) a (3,7), la coordenada x aumenta de 1 a 3 y la coordenada y aumenta de 3 a 7. La tasa promedio de cambio de y con respecto a x es la razón

$$\frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{7-3}{3-1} = \frac{4}{2} = 2.$$

La razón de 2 significa que por cada unidad de aumento en x hay un *aumento* de 2 unidades en y. Debido a este aumento, la recta *se eleva* de izquierda a derecha. Puede demostrarse que sin importar cuáles puntos de L se elijan para calcular el cambio en y al cambio en x, el resultado siempre es 2, al cual llamamos *pendiente* de la recta.

Definición

Sean (x_1,y_1) y (x_2,y_2) dos puntos diferentes sobre una recta no vertical. La pendiente de la recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \left(= \frac{\textit{cambio vertical}}{\textit{cambio horizontal}} \right). \qquad \textbf{(1)}$$

Una recta vertical no tiene pendiente, porque cualesquiera dos puntos sobre ella deben tener $x_1 = x_2$ [véase la fig. 4.3 (a)], lo que da un denominador de cero en la ecuación (1). Para una recta horizontal, cualesquiera dos puntos deben tener $y_1 = y_2$ [véase la fig. 4.3 (b)]. Esto da un numerador de cero en la ecuación (1) y, por tanto, la pendiente de la recta es cero.

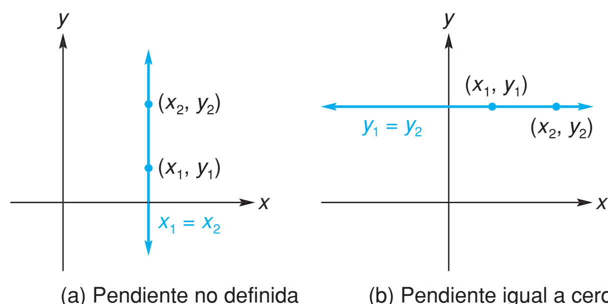


FIGURA 4.3 Rectas vertical y horizontal.

Este ejemplo muestra cómo puede interpretarse la pendiente.

EJEMPLO 1 **Relación precio-cantidad**

La recta de la figura 4.4 muestra la relación entre el precio p de un artículo (en dólares) y la cantidad q de artículos (en miles), que los consumidores comprarán a ese precio. Determinar e interpretar la pendiente.

Principios en práctica 1
Relación precio-tiempo

Un doctor compró un automóvil nuevo en 1991 por $32,000. En 1994, él lo vendió a un amigo en $26,000. Dibuje una recta que muestre la relación entre el precio de venta del automóvil y el año en el que se vendió. Determine e interprete la pendiente.

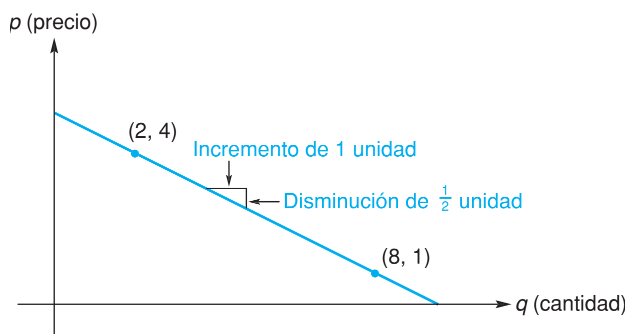


FIGURA 4.4 Recta precio-cantidad.

Solución: en la fórmula de la pendiente (1), remplazamos x por q y y por p. En la figura 4.4, podemos seleccionar cualquier punto como (q_1, p_1). Haciendo $(2, 4) = (q_1, p_1)$ y $(8, 1) = (q_2, p_2)$, tenemos

$$m = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1} = \frac{1 - 4}{8 - 2} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

La pendiente es negativa, $-\frac{1}{2}$. Esto significa que por cada unidad que aumente la cantidad (un millar de artículos), corresponde una **disminución** de $\frac{1}{2}$ dólar en el precio de cada artículo. Debido a esta disminución, la recta **desciende** de izquierda a derecha.

En resumen, podemos caracterizar la orientación de una recta por su pendiente:

Pendiente cero:	recta horizontal.
Pendiente indefinida:	recta vertical.
Pendiente positiva:	recta que sube de izquierda a derecha.
Pendiente negativa:	recta que desciende de izquierda a derecha.

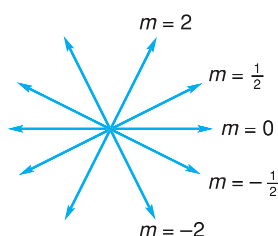


FIGURA 4.5 Pendientes de rectas.

En la figura 4.5 se muestran rectas con diferentes pendientes. Observe que *entre más cercana a cero es la pendiente, está más cerca de ser horizontal. Entre mayor valor absoluto tenga la pendiente, la recta estará más cercana a ser vertical*. Notamos que dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o son verticales.

Ecuaciones de rectas

Si conocemos un punto y la pendiente de una recta, podemos encontrar una ecuación cuya gráfica sea esa recta. Suponga que la recta L tiene pendiente m y pasa a través del punto (x_1, y_1). Si (x, y) es *cualquier* otro punto sobre L (véase la fig. 4.6), podemos encontrar una relación algebraica entre x y y. Utilizando la fórmula de la pendiente con los puntos (x_1, y_1) y (x, y), se obtiene

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m,$$

$$y - y_1 = m(x - x_1). \quad (2)$$

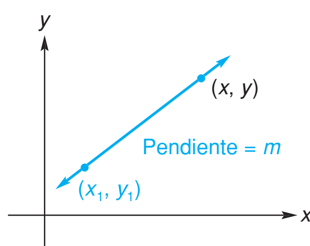


FIGURA 4.6 Recta que pasa por (x_1, y_1) con pendiente m.

Todo punto de L satisface la ecuación (2). También es cierto que todo punto que satisfaga la ecuación (2) debe pertenecer a L. Por tanto, la ecuación (2) es una ecuación para L, y se le da un nombre especial:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

es la ***forma punto-pendiente*** *de una ecuación de la recta que pasa por* (x_1, y_1) *y tiene pendiente m.*

Principios en práctica 2
Forma punto-pendiente

Un nuevo programa de matemáticas aplicadas en una universidad ha aumentado su matrícula en 14 estudiantes por año, durante los últimos cinco años. Si el programa tenía matriculados 50 estudiantes en su tercer año, ¿cuál es una ecuación para el número de estudiantes S en el programa como una función del número de años T desde su inicio?

EJEMPLO 2 Forma punto-pendiente

Determinar una ecuación de la recta que tiene pendiente 2 *y pasa por el punto* $(1, -3)$.

Solución: al utilizar una forma punto-pendiente con $m = 2$ y $(x_1, y_1) = (1, -3)$ se obtiene

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$
$$y - (-3) = 2(x - 1),$$
$$y + 3 = 2x - 2,$$

que puede reescribirse como

$$2x - y - 5 = 0.$$

Una ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados se puede encontrar con facilidad, como lo muestra el ejemplo 3.

Principios en práctica 3
Determinación de una recta a partir de dos puntos

Determine una ecuación de la recta que pasa por los puntos dados. Una temperatura de 41°F es equivalente a 5°C y una temperatura de 77°F es equivalente a 25°C.

EJEMPLO 3 Determinación de una recta a partir de dos puntos

Encontrar una ecuación de la recta que pasa por $(-3, 8)$ *y* $(4, -2)$.

Solución:

Estrategia: primero determinamos la pendiente de la recta a partir de los puntos dados. Después sustituimos la pendiente y uno de los puntos en la forma punto-pendiente.

La recta tiene pendiente

$$m = \frac{-2 - 8}{4 - (-3)} = -\frac{10}{7}.$$

Utilizando una forma punto-pendiente con $(-3, 8)$ como (x_1, y_1) se obtiene

$$y - 8 = -\tfrac{10}{7}[x - (-3)],$$
$$y - 8 = -\tfrac{10}{7}(x + 3),$$
$$7y - 56 = -10x - 30,$$

o

$$10x + 7y - 26 = 0.$$

Seleccionar $(4, -2)$ como (x_1, y_1) daría un resultado equivalente.

Recuerde que un punto $(0, b)$ donde una gráfica interseca al eje y es llamado una intersección y (véase la fig. 4.7). Si se conocen la pendiente m y la intersección y, b, de una recta, una ecuación para la recta es [utilizando una forma punto-pendiente con $(x_1, y_1) = (0, b)$]

$$y - b = m(x - 0).$$

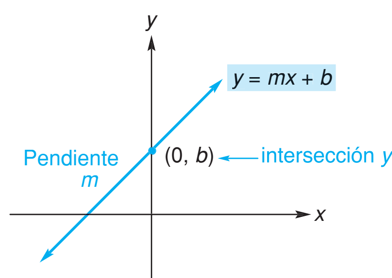


FIGURA 4.7 Recta con pendiente m e intersección y igual a b.

Principios en práctica 4

Determinación de la pendiente e intersección con el eje y de una recta

Una fórmula para la dosis recomendada (en miligramos) de medicamento para un niño de t años de edad es $y = \frac{1}{24}(t + 1)a$, en donde a es la dosis para un adulto. Un medicamento para aliviar el dolor que se puede comprar sin prescripción médica tiene $a = 1000$. Determine la pendiente y la intersección con el eje y de esta ecuación.

Al resolver para y se obtiene $y = mx + b$, llamada la *forma pendiente-ordenada al origen* de una ecuación de la recta:

$$y = mx + b$$

*es la **forma pendiente-ordenada al origen** de una ecuación de la recta con pendiente m e intersección b con el eje y.*

EJEMPLO 4 Forma pendiente-ordenada al origen

Encontrar una ecuación de la recta con pendiente 3 *e intersección y igual a* –4.

Solución: al utilizar la forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$ con $m = 3$ y $b = -4$, se obtiene

$$y = 3x + (-4),$$
$$y = 3x - 4.$$

EJEMPLO 5 Determinación de la pendiente e intersección con el eje y de una recta

Hallar la pendiente y la intersección y de la recta con ecuación $y = 5(3 - 2x)$.

Solución:

Estrategia: reescribiremos la ecuación de modo que tenga la forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$. Así, la pendiente es el coeficiente de x y la intersección y es el término constante.

Tenemos

$$y = 5(3 - 2x),$$
$$y = 15 - 10x,$$
$$y = -10x + 15.$$

Por tanto, $m = -10$ y $b = 15$, de modo que la pendiente es -10 y la intersección y es 15.

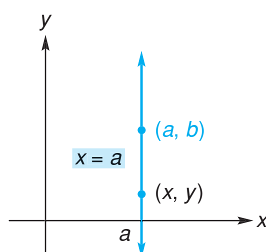


FIGURA 4.8 Recta vertical que pasa por (a, b).

Si una recta *vertical* pasa por (a, b) (véase la fig. 4.8), entonces cualquier otro punto (x, y) pertenece a la recta si y sólo si $x = a$. La coordenada y puede tener cualquier valor. De aquí que una ecuación de la recta es $x = a$. En forma análoga, una ecuación de la recta *horizontal* que pasa por (a, b) es $y = b$ (véase la fig. 4.9). Aquí la coordenada x puede tener cualquier valor.

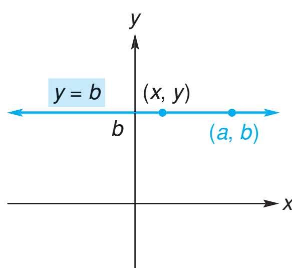


FIGURA 4.9 Recta horizontal que pasa por (a, b).

EJEMPLO 6 Ecuaciones de rectas horizontales y verticales

a. Una ecuación de la recta vertical que pasa por $(-2, 3)$ es $x = -2$. Una ecuación de la recta horizontal que pasa por $(-2, 3)$ es $y = 3$.

b. Los ejes x y y son rectas horizontal y vertical, respectivamente. Puesto que $(0, 0)$ pertenece a ambos ejes, una ecuación del eje x es $y = 0$ y una del eje y es $x = 0$.

De nuestro análisis podemos demostrar que toda línea recta es la gráfica de una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son constantes, y A y B no son ambas cero. Llamamos a ésta la *ecuación lineal general* (o *ecuación de primer grado*) **en las variables x y y,** y se dice que x y y están **relacionadas linealmente.** Por ejemplo, una ecuación lineal general para $y = 7x - 2$ es $(-7)x + (1)y + (2) = 0$. Recíprocamente, la gráfica de una ecuación lineal general es una recta.

La tabla 4.1 proporciona un buen resumen para usted.

No confunda las formas de las ecuaciones de las rectas horizontales y verticales. Recuerde cuál tiene la forma x = constante y cuál de ellas tiene la forma y = constante.

TABLA 4.1 Formas de ecuaciones de líneas rectas

Forma punto pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Forma pendiente ordenada al origen	$y = mx + b$
Forma lineal general	$Ax + By + C = 0$
Recta vertical	$x = a$
Recta horizontal	$y = b$

▪ *Principios en práctica 5*
Conversión entre formas de ecuaciones de rectas

Determine una forma lineal general de la ecuación de conversión Fahrenheit-Celsius cuya forma punto pendiente es $F = \frac{9}{5}C + 32$.

EJEMPLO 7 Conversión entre formas de ecuaciones de rectas

a. *Hallar una forma lineal general de la recta cuya forma pendiente-ordenada al origen es*

$$y = -\tfrac{2}{3}x + 4.$$

Solución: al dejar un miembro que sea igual a cero, tenemos

$$\frac{2}{3}x + y - 4 = 0,$$

que es la forma lineal general con $A = \frac{2}{3}$, $B = 1$ y $C = -4$. Una forma lineal general alterna puede obtenerse quitando fracciones:

$$2x + 3y - 12 = 0.$$

Esto ilustra que una forma lineal general de una recta no es única.

b. *Hallar la forma pendiente-ordenada al origen de la recta que tiene una forma lineal general* $3x + 4y - 2 = 0$.

Solución: queremos la forma $y = mx + b$, de modo que resolvemos la ecuación dada para y. Tenemos

$$3x + 4y - 2 = 0,$$
$$4y = -3x + 2,$$
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2},$$

que es la forma pendiente-ordenada al origen. Notamos que la recta tiene pendiente de $-\frac{3}{4}$ e intersección con el eje y igual a $\frac{1}{2}$.

▪ *Principios en práctica 6*
Gráfica de una ecuación lineal general

Haga un bosquejo de la gráfica de la ecuación de conversión Fahrenheit-Celsius que encontró en el principio en práctica 5. ¿Cómo puede utilizar esta gráfica para convertir una temperatura Celsius a Fahrenheit?

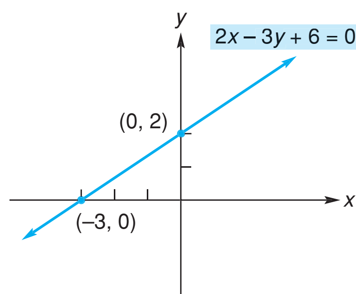


FIGURA 4.10 Gráfica de $2x - 3y + 6 = 0$.

EJEMPLO 8 Graficación de una ecuación lineal general

Hacer el bosquejo de la gráfica $2x - 3y + 6 = 0$.

Solución:

Estrategia: ya que ésta es una ecuación lineal general, su gráfica es una línea recta. Por tanto, sólo necesitamos determinar dos puntos diferentes a fin de hacer el bosquejo. Encontraremos las intersecciones.

Si $x = 0$, entonces $-3y + 6 = 0$, de modo que la intersección y es 2. Si $y = 0$, entonces $2x + 6 = 0$, de modo que la intersección x es -3. Ahora podemos dibujar la recta que pasa por $(0, 2)$ y $(-3, 0)$. (Véase la fig. 4.10.)

Tecnología

Para graficar la ecuación del ejemplo 8 con una calculadora gráfica, primero expresamos a y en términos de x:

$$2x - 3y + 6 = 0,$$
$$3y = 2x + 6,$$
$$y = \tfrac{1}{3}(2x + 6).$$

En esencia, y se expresa como una función de x; la gráfica se muestra en la figura 4.11.

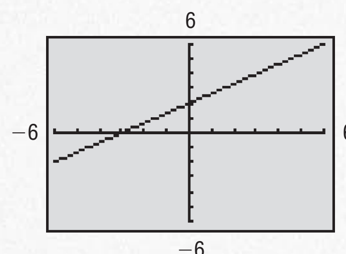


FIGURA 4.11 Gráfica de $2x - 3y + 6 = 0$. a partir de una calculadora.

Rectas paralelas y perpendiculares

Como se estableció previamente, existe una regla para rectas paralelas:

Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o si ambas son verticales.

También existe una regla para rectas perpendiculares. Vea otra vez la figura 4.5 y observe que la recta con pendiente $-\frac{1}{2}$ es perpendicular a la recta con pendiente 2. El hecho de que la pendiente de cada una de estas rectas sea el recíproco negativo de la pendiente de la otra recta, no es coincidencia, como lo establece la siguiente regla.

Rectas perpendiculares

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares entre sí, si y sólo si,

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

Además, una recta horizontal y una vertical son perpendiculares entre sí.

Principios en práctica 7

Rectas paralelas y perpendiculares

Muestre que un triángulo con vértices en $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ y $C(7, 7)$ no es un triángulo rectángulo.

EJEMPLO 9 Rectas paralelas y perpendiculares

La figura 4.12 *muestra dos rectas que pasan por* $(3, -2)$. *Una es paralela a la recta* $y = 3x + 1$, *y la otra es perpendicular a ella. Determinar las ecuaciones de estas rectas.*

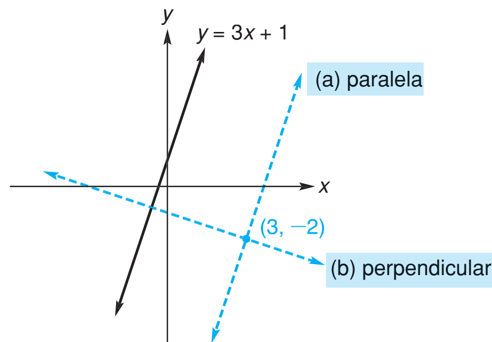


FIGURA 4.12 Rectas paralela y perpendicular a $y = 3x + 1$ (ejemplo 9).

Solución: la pendiente de $y = 3x + 1$ es 3. Por tanto, la recta que pasa por $(3, -2)$, que es *paralela* a $y = 3x + 1$, también tiene pendiente 3. Utilizando la forma punto-pendiente, obtenemos

$$y - (-2) = 3(x - 3),$$
$$y + 2 = 3x - 9,$$
$$y = 3x - 11.$$

La pendiente de la recta *perpendicular* a $y = 3x + 1$ debe ser $-\frac{1}{3}$ (el recíproco negativo de 3). Utilizando la forma punto-pendiente, obtenemos

$$y - (-2) = -\tfrac{1}{3}(x - 3),$$
$$y + 2 = -\tfrac{1}{3}x + 1,$$
$$y = -\tfrac{1}{3}x - 1.$$

Ejercicio 4.1

En los problemas del 1 al 8 halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

1. $(4, 1)$, $(7, 10)$.
2. $(-3, 11)$, $(2, 1)$.
3. $(4, -2)$, $(-6, 3)$.
4. $(2, -4)$, $(3, -4)$.
5. $(5, 3)$, $(5, -8)$.
6. $(0, -6)$, $(3, 0)$.
7. $(5, -2)$, $(4, -2)$.
8. $(1, -7)$, $(9, 0)$.

En los problemas del 9 al 24 determine una ecuación lineal general $(Ax + By + C = 0)$ *de la recta que tiene las propiedades indicadas, y haga el bosquejo de cada recta.*

9. Pasa por $(2, 8)$ y tiene pendiente 6.
10. Pasa por el origen y tiene pendiente -5.
11. Pasa por $(-2, 5)$ y tiene pendiente $-\frac{1}{4}$.
12. Pasa por $(-\frac{5}{2}, 5)$ y tiene pendiente $\frac{1}{3}$.
13. Pasa por $(-6, 1)$ y $(1, 4)$.
14. Pasa por $(7, 1)$ y $(7, -5)$.
15. Pasa por $(3, -1)$ y $(-2, -9)$.
16. Pasa por $(0, 0)$ y $(2, 3)$.
17. Tiene pendiente 2 y su intersección con el eje y es 4.
18. Tiene pendiente 5 y su intersección con el eje y es -7.
19. Tiene pendiente de $-\frac{1}{2}$ y su intersección con el eje y es -3.
20. Tiene pendiente 0 y su intersección con el eje y es $-\frac{1}{2}$.

21. Es horizontal y pasa por $(-3, -2)$.

22. Es vertical y pasa por $(-1, 4)$.

23. Pasa por $(2, -3)$ y es vertical.

24. Pasa por el origen y es horizontal.

En los problemas del 25 al 34 encuentre, si es posible, la pendiente y la intersección con el eje y de la recta determinada por la ecuación, y haga el bosquejo de la gráfica.

25. $y = 4x - 6$.

26. $x - 1 = 5$.

27. $x + 2y - 3 = 0$.

28. $y + 4 = 7$.

29. $x = -5$.

30. $x - 9 = 5y + 3$.

31. $y = 3x$.

32. $y - 7 = 3(x - 4)$.

33. $y = 1$.

34. $2y - 3 = 0$.

En los problemas del 35 al 40 determine una forma lineal general y la forma pendiente-ordenada al origen de cada ecuación.

35. $2x = 5 - 3y$.

36. $3x + 2y = 6$.

37. $4x + 9y - 5 = 0$.

38. $2(x - 3) - 4(y + 2) = 8$.

39. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -4$.

40. $y = \frac{1}{300}x + 8$.

En los problemas del 41 al 50 determine si las rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

41. $y = 7x + 2, \quad y = 7x - 3$.

42. $y = 4x + 3, \quad y = 5 + 4x$.

43. $y = 5x + 2, \quad -5x + y - 3 = 0$.

44. $y = x, \quad y = -x$.

45. $x + 2y + 1 = 0, \quad y = -2x$.

46. $x + 2y = 0, \quad x + y - 4 = 0$.

47. $y = 3, \quad x = -\frac{1}{3}$.

48. $x = 3, \quad x = -3$.

49. $3x + y = 4, \quad x - 3y + 1 = 0$.

50. $x - 1 = 0, \quad y = 0$.

En los problemas del 51 al 60 determine una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas. Si es posible, dé la respuesta en la forma pendiente-ordenada al origen.

51. Pasa por $(-3, 2)$ y es paralela a $y = 4x - 5$.

52. Pasa por $(2, -8)$ y es paralela a $x = -4$.

53. Pasa por $(2, 1)$ y es paralela a $y = 2$.

54. Pasa por $(3, -4)$ y es paralela a $y = 3 + 2x$.

55. Es perpendicular a $y = 3x - 5$ y pasa por $(3, 4)$.

56. Es perpendicular a $y = -4$ y pasa por $(1, 1)$.

57. Pasa por $(7, 4)$ y es perpendicular a $y = -4$.

58. Pasa por $(-5, 4)$ y es perpendicular a la recta $2y = -x + 1$.

59. Pasa por $(-7, -5)$ y es paralela a la recta $2x + 3y + 6 = 0$.

60. Pasa por $(-4, 10)$ y es paralela al eje y.

---

61. Una recta pasa por $(1, 2)$ y por $(-3, 8)$. Determine el punto en la recta que tiene una abscisa (coordenada x) igual a 5.

62. Una línea recta tiene pendiente 2 e interseca al eje y en $(0, 1)$. ¿El punto $(-1, -1)$ pertenece a la recta?

63. **Acciones** En 1988, las acciones de una compañía de biotecnología se cotizaron en \$30 por acción. En 1998, la compañía empezó a tener problemas y el precio de las acciones cayó a \$10 por acción. Dibuje una recta que muestre la relación entre el precio por acción y el año en que se comerció, con años en el eje x y el precio en el eje y. Encuentre una interpretación para la pendiente.

64. **Velocidad del sonido** Una gráfica de la velocidad del sonido, S (en metros por segundo), al nivel del mar, contra la temperatura T del aire (en grados Celsius), tiene una pendiente de 0.61. La ecuación que describe la relación entre la velocidad del sonido y la temperatura del aire es $S = 0.61T + b$. Cuando la temperatura es 15°C, un investigador mide la velocidad del sonido como 340.55 metros por segundo. Determine b para completar la ecuación.

En los problemas 65 *y* 66 *determine una ecuación de la recta que describe la información siguiente*.

65. **Cuadrangulares** En una temporada, un jugador de las ligas mayores de béisbol dio 14 cuadrangulares al final del tercer mes y 20 cuadrangulares al final del quinto mes.

66. **Negocios** La propietaria de una tienda de embutidos inicia su negocio con una deuda de \$100,000. Después de operarla durante cinco años, ella acumula una utilidad de \$40,000.

67. **Fecha de parto** La longitud, L, de un feto humano de más de 12 semanas puede estimarse por medio de la fórmula $L = 1.53t - 6.7$, en donde L está en centímetros y t está en semanas desde la concepción. Un tocólogo utiliza la longitud del feto, medido por medio de ultrasonido, para determinar la edad aproximada del feto y establecer una fecha de parto para la madre. La fórmula debe reescribirse para tener como resultado una edad, t, dada la longitud fetal L. Determine la pendiente y la intersección con el eje L de la ecuación.

68. **Lanzamiento de disco** Un modelo matemático puede aproximar la distancia con que se ganó en el lanzamiento

de disco en los Juegos Olímpicos mediante la fórmula $d = 184 + t$, en donde d está en pies y $t = 0$ corresponde al año 1984. Determine una forma lineal general de esta ecuación.

69. Mapa del campus Un mapa coordenado de un campus universitario da las coordenadas (x, y) de tres edificios principales como sigue: centro de cómputo, $(3.5, -1)$; laboratorio de ingeniería, $(0.5, 0)$; biblioteca $(-1, -4.5)$. Determine las ecuaciones (en la forma pendiente-ordenada al origen) de las trayectorias en línea recta que conectan (a) el laboratorio de ingeniería con el centro de cómputo, y (b) el laboratorio de ingeniería con la biblioteca. Demuestre que estas dos trayectorias son perpendiculares.

70. Geometría Muestre que los puntos $A(0, 0)$, $B(0, 4)$, $C(2, 3)$ y $D(2, 7)$ son los vértices de un paralelogramo (los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos).

71. Ángulo de aproximación Un pequeño aeroplano está aterrizando en un aeropuerto con un ángulo de aproximación de 45 grados, o pendiente de -1. El aeroplano inicia su descenso cuando tiene una elevación de 3300 pies. Determine la ecuación que describe la relación entre la altitud de la aeronave y la distancia recorrida, suponiendo que el ángulo de aproximación inicia en la distancia cero. Haga una gráfica de su ecuación en una calculadora gráfica. Si el aeropuerto está a 4000 pies desde donde el aeroplano inicia su aterrizaje, ¿qué le dice la gráfica acerca de la aproximación?

72. Ecuación de costo El costo diario promedio, C, para una cuarto en un hospital de la ciudad se elevó \$59.82 por año durante los años 1990 a 2000. Si el costo promedio en 1996 fue \$1128.50, ¿cuál es una ecuación que describe el costo promedio durante esta década, como una función del número de años, T, desde 1990?

73. Ecuación de ingreso Un pequeño negocio pronostica que su ingreso crecerá de acuerdo con el método de la línea recta con una pendiente de \$50,000 por año. En su quinto año, el negocio tuvo ingresos por \$330,000. Determine una ecuación que describa la relación entre los ingresos, R, y el número de años, T, desde la apertura del negocio.

74. Grafique $y = 1.3x + 7$ y verifique que la intersección y sea 7.

75. Grafique las rectas cuyas ecuaciones son

$$y = 1.5x + 1,$$
$$y = 1.5x - 1,$$

y

$$y = 1.5x + 2.5.$$

¿Qué observa acerca de las orientaciones de estas líneas? ¿Por qué esperaría este resultado, a partir de las ecuaciones de las líneas?

76. Grafique la recta $y = 3.4x - 2.3$. Determine las coordenadas de cualesquiera dos puntos de la recta y utilícelos para estimar la pendiente. ¿Cuál es la pendiente real de la recta?

77. Utilizando una ventana estándar y el mismo rectángulo de visualización, haga la gráfica de las rectas con ecuaciones

$$0.1875x - 0.3y + 0.94 = 0$$

y

$$0.32x + 0.2y + 1.01 = 0$$

Ahora, cambie la ventana a una ventana cuadrada (por ejemplo, en la calculadora TI-83, utilice ZOOM, Zsquare). Observe que las rectas aparentan ser perpendiculares entre sí. Pruebe que esto es cierto.

OBJETIVO Desarrollar la noción de curvas de demanda y oferta, e introducir funciones lineales.

4.2 APLICACIONES Y FUNCIONES LINEALES

Muchas situaciones de la economía pueden describirse utilizando rectas, como lo muestra el ejemplo 1.

Principios en práctica 1
Niveles de producción

Un fabricante de bienes deportivos asigna 1000 unidades de tiempo por día para fabricar esquís y botas para esquís. Si toma 8 unidades de tiempo fabricar un esquí y 14 unidades de tiempo producir una bota, determine una ecuación que describa todos los posibles niveles de producción de los dos productos.

EJEMPLO 1 Niveles de producción

Suponga que un fabricante utiliza 100 libras de material para hacer los productos A y B, que requieren de 4 y 2 libras de material por unidad, respectivamente. Si x y y denotan el número de unidades producidas de A y B, respectivamente, entonces todos los niveles de producción están dados por las combinaciones de x y y que satisfacen la ecuación

$$4x + 2y = 100, \qquad \text{donde } x, y \geq 0.$$

Por tanto, los niveles de producción de A y B están relacionados linealmente. Al resolver para y se obtiene

$$y = -2x + 50 \qquad \text{(forma pendiente-ordenada al origen),}$$

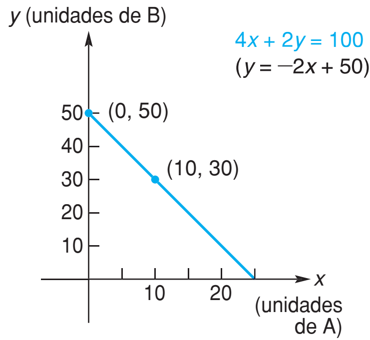


FIGURA 4.13 Niveles de producción relacionados linealmente.

de modo que la pendiente es -2. La pendiente refleja la tasa de cambio del nivel de producción de B con respecto al de A. Por ejemplo, si se produce una unidad adicional de A, se requerirán 4 libras más de material, de lo que resultan $\frac{4}{2} = 2$ unidades *menos* de B. Por tanto, cuando x aumenta en una unidad, el valor correspondiente de y disminuye en 2 unidades. Para hacer el bosquejo de la gráfica de $y = -2x + 50$, podemos utilizar la intersección con el eje y (0, 50), y el hecho de que cuando $x = 10$, $y = 30$ (véase la fig. 4.13).

Curvas de demanda y de oferta

Para cada nivel de precio de un producto existe una cantidad correspondiente de ese producto, que los consumidores demandarán (esto es, comprarán) durante algún periodo. Por lo general, a mayor precio la cantidad demandada es menor; cuando el precio baja la cantidad demandada aumenta. Si el precio por unidad del producto está dado por p, y la cantidad correspondiente (en unidades) está dada por q, entonces una ecuación que relaciona p y q se llama **ecuación de demanda.** Su gráfica es la **curva de demanda.** La figura 4.14(a) muestra una curva de demanda. De acuerdo con la práctica de la mayoría de los economistas, el eje horizontal es el eje q y el vertical es el eje p. Supondremos que el precio por unidad está dado en dólares y el periodo es una semana. Así, el punto (a, b) en la figura 4.14(a) indica que a un precio de b dólares por unidad, los consumidores demandarán a unidades por semana. Como los precios o cantidades negativas no tienen sentido, a y b deben ser no negativos. Para la mayoría de los productos, un incremento en la cantidad demandada corresponde a una disminución en el precio. Así que, por lo general, una curva de demanda desciende de izquierda a derecha, como en la figura 4.14(a).

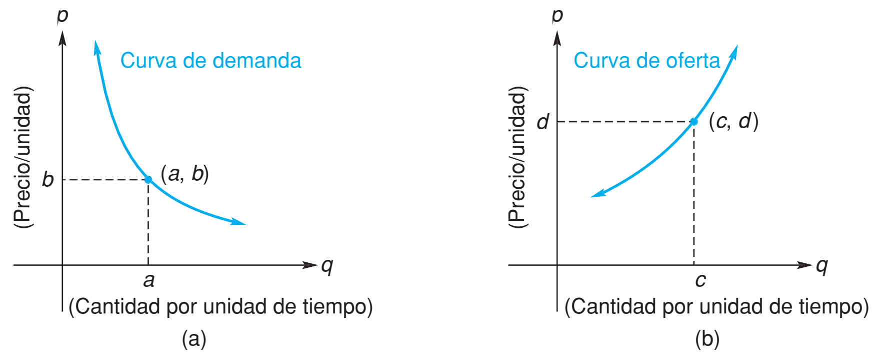


FIGURA 4.14 Curvas de demanda y de oferta.

Por lo general, una curva de demanda desciende de izquierda a derecha y una curva de oferta asciende de izquierda a derecha. Sin embargo, existen excepciones. Por ejemplo, la demanda de insulina podría representarse por medio de una recta vertical, ya que esta demanda permanece constante sin importar el precio.

Como respuesta a los diferentes precios, existe una cantidad correspondiente de productos que los *productores* están dispuestos a proveer al mercado durante algún periodo. Por lo general, a mayor precio por unidad es mayor la cantidad que los productores están dispuestos a proveer; cuando el precio disminuye también lo hace la cantidad suministrada. Si p denota el precio por unidad y q la cantidad correspondiente, entonces una ecuación que relaciona p y q se llama **ecuación de oferta,** y su gráfica es una **curva de oferta.** La figura 4.14(b) muestra una curva de oferta. Si p está en dólares y el periodo es una semana, entonces el punto (c, d) indica que a un precio de d dólares cada una, los productores proveerán c unidades por semana. Al igual que antes, c y d son no negativos. Una curva de oferta casi siempre asciende de izquierda a derecha, como en la figura 4.14(b). Esto indica que un fabricante suministrará más de un producto a precios mayores.

Ahora centraremos la atención en las curvas de oferta y de demanda que son líneas rectas (véase la fig. 4.15); se les denomina curvas de oferta *lineal* y de demanda *lineal*. Tales curvas tienen ecuaciones en las que p y q están relacionadas de manera lineal. Puesto que una curva de demanda por lo general desciende de izquierda a derecha, una curva de demanda lineal tiene pendiente negativa [véase la fig. 4.15(a)]. Sin embargo, la pendiente de una curva de oferta lineal es positiva, ya que la curva asciende de izquierda a derecha [véase la fig. 4.15(b)].

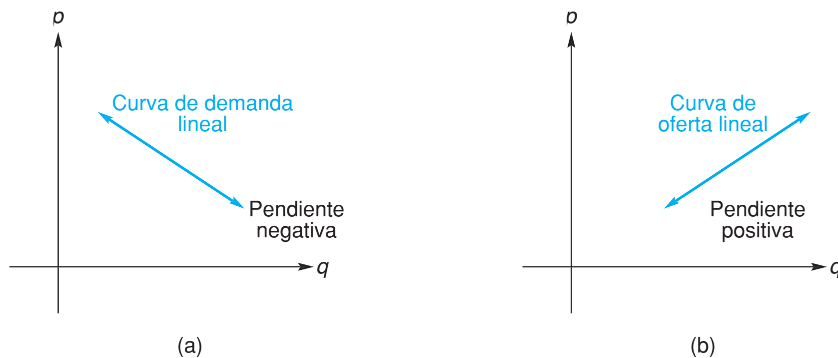


FIGURA 4.15 Curvas de demanda y oferta lineales.

Principios en práctica 2

Determinación de una ecuación de demanda

La demanda semanal de televisores de 26 pulgadas es 1200 unidades cuando el precio es de \$575 cada uno, y 800 unidades cuando el precio es de \$725 cada uno. Determine la ecuación de demanda para los televisores, suponiendo un comportamiento lineal.

EJEMPLO 2 Determinación de una ecuación de demanda

Suponga que la demanda por semana de un producto es de 100 *unidades, cuando el precio es de* \$58 *por unidad, y de* 200 *unidades a un precio de* \$51 *cada una. Determinar la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.*

Solución:

Estrategia: ya que la ecuación de demanda es lineal, la curva de demanda debe ser una línea recta. Tenemos que la cantidad q y el precio p están relacionados linealmente de tal modo que $p = 58$ cuando $q = 100$ y $p = 51$ cuando $q = 200$. Por lo que los datos dados pueden representarse en un plano de coordenadas q, p [véase la fig. 4.15 (a)] por los puntos (100, 58) y (200, 51). Con estos puntos podemos encontrar una ecuación de la recta, esto es, la ecuación de demanda.

La pendiente de la recta que pasa por (100, 58) y (200, 51) es

$$m = \frac{51 - 58}{200 - 100} = -\frac{7}{100}.$$

Una ecuación de la recta (forma punto-pendiente) es

$$p - p_1 = m(q - q_1),$$

$$p - 58 = -\frac{7}{100}(q - 100).$$

Al simplificar, se obtiene la ecuación de demanda

$$p = -\frac{7}{100}q + 65. \qquad (1)$$

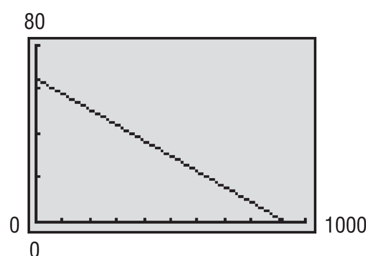


FIGURA 4.16 Gráfica de la función de demanda $p = -\frac{7}{100}q + 65$.

Por costumbre, una ecuación de demanda (así como una ecuación de oferta) expresa p en términos de q, lo que en realidad define una función de q. Por ejemplo, la ecuación (1) define p como una función de q y por ello se le llama la *función de demanda* para el producto (véase la fig. 4.16).

Funciones lineales

En la sección 3.2 se describió una *función lineal*. A continuación se presenta una definición formal.

Definición

Una función f es una ***función lineal*** si y sólo si $f(x)$ puede escribirse en la forma $f(x) = ax + b$, en donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Suponga que $f(x) = ax + b$ es una función lineal y que $y = f(x)$. Entonces $y = ax + b$, la cual es la ecuación de una recta con pendiente a e intersección con el eje y b. Así, **la gráfica de una función lineal es una recta.** Decimos que la función $f(x) = ax + b$ tiene pendiente a.

Principios en práctica 3
Gráficas de funciones lineales

Una compañía que repara computadoras, cobra por un servicio una cantidad fija más una tarifa por hora. Si x es el número de horas necesarias para un servicio, el costo total se describe por medio de la función $f(x) = 40x + 60$. Haga una gráfica de la función determinando y graficando dos puntos.

EJEMPLO 3 Graficación de funciones lineales

a. *Graficar* $f(x) = 2x - 1$.

Solución: aquí f es una función lineal (con pendiente 2), de modo que su gráfica es una recta. Como dos puntos determinan una recta, sólo necesitamos graficar dos puntos y después dibujar una recta que pase por ellos [véase la fig. 4.17(a)]. Observe que uno de los puntos graficados es la intersección con el eje vertical, -1, que ocurre cuando $x = 0$.

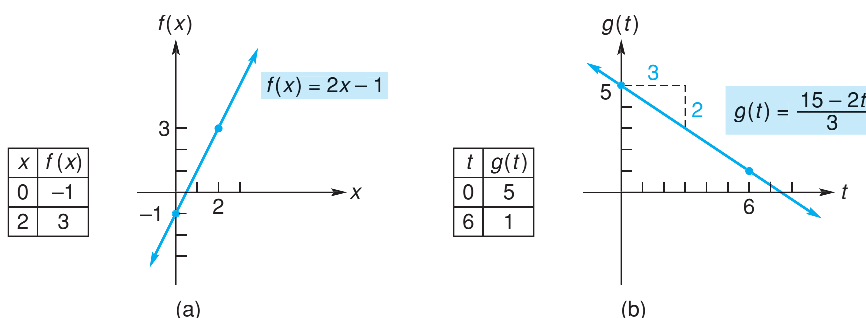


FIGURA 4.17 Gráficas de funciones lineales.

b. *Grafique* $g(t) = \dfrac{15 - 2t}{3}$.

Solución: observe que g es una función lineal porque podemos expresarla en la forma $g(t) = at + b$.

$$g(t) = \frac{15 - 2t}{3} = \frac{15}{3} - \frac{2t}{3} = -\frac{2}{3}t + 5.$$

La gráfica de g se muestra en la figura 4.17(b). Ya que la pendiente es $-\frac{2}{3}$, observe que cuando t aumenta en 3 unidades, $g(t)$ *disminuye* en 2.

EJEMPLO 4 Determinación de una función lineal

Suponer que f es una función lineal con pendiente 2 y $f(4) = 8$. *Hallar* $f(x)$.

Solución: ya que f es lineal, tiene la forma $f(x) = ax + b$. La pendiente es 2, de modo que $a = 2$ y tenemos

$$f(x) = 2x + b. \qquad (2)$$

Ahora determinamos b. Como $f(4) = 8$, en la ecuación (2) reemplazamos x por 4 y resolvemos para b.

$$\begin{aligned} f(4) &= 2(4) + b, \\ 8 &= 8 + b, \\ 0 &= b. \end{aligned}$$

De aquí que, $f(x) = 2x$.

Principios en práctica 4

Determinación de una función lineal

La altura de niños entre las edades de 6 a 10 años puede modelarse por medio de una función lineal de la edad t, en años. La altura de una niña cambia 2.3 pulgadas por año; ella mide 50.6 pulgadas de altura a la edad de 8 años. Determine una función que describa la altura de esta niña a la edad de t años.

EJEMPLO 5 Determinación de una función lineal

Si $y = f(x)$ *es una función lineal tal que* $f(-2) = 6$ *y* $f(1) = -3$, *encontrar* $f(x)$.

Solución:

Estrategia: los valores de la función corresponden a puntos sobre la gráfica de f. Con estos puntos podemos determinar una ecuación de la recta y, por tanto, de la función lineal.

La condición $f(-2) = 6$ significa que cuando $x = -2$, entonces $y = 6$. Por tanto, $(-2, 6)$ pertenece a la gráfica de f, que es una recta. De manera similar, $f(1) = -3$ implica que $(1, -3)$ también pertenece a la recta. Si hacemos $(x_1, y_1) = (-2, 6)$ y $(x_2, y_2) = (1, -3)$, la pendiente de la recta está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 6}{1 - (-2)} = \frac{-9}{3} = -3.$$

Podemos encontrar una ecuación de la recta por medio de la forma punto-pendiente:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1), \\ y - 6 &= -3[x - (-2)], \\ y - 6 &= -3x - 6, \\ y &= -3x. \end{aligned}$$

Puesto que $y = f(x)$, $f(x) = -3x$. Por supuesto, se obtiene el mismo resultado si hacemos $(x_1, y_1) = (1, -3)$.

Principios en práctica 5

Determinación de una función lineal

Un collar antiguo se espera que tenga un valor de \$360 después de 3 años y de \$640 al cabo de 7 años. Determine una función que describa el valor del collar después de x años.

En muchos estudios los datos se reúnen y grafican en un sistema de coordenadas. Un análisis de los resultados puede indicar que hay una relación funcional entre las variables involucradas. Por ejemplo, los datos pueden ser aproximados por puntos en una recta. Esto indicaría una relación funcional lineal, tal como en el ejemplo 6 que sigue.

EJEMPLO 6 Dieta para gallinas

En pruebas hechas en una dieta experimental para gallinas, se determinó que el peso promedio w (en gramos) de una gallina fue, según las estadísticas, una función lineal del número de días d después de que se inició la dieta, donde $0 \leq d \leq 50$. *Suponer que el peso promedio de una gallina al inicio la dieta fue de 40 gramos, y 25 días después fue de 675 gramos.*

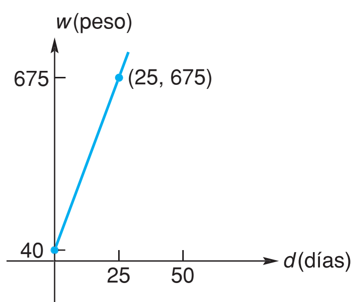


FIGURA 4.18 Función lineal que describe la dieta para gallinas.

a. *Determinar w como una función lineal de d.*

Solución: como w es una función lineal de d, su gráfica es una línea recta. Cuando $d = 0$ (al inicio de la dieta), $w = 40$. Por tanto, (0, 40) pertenece a la gráfica (véase la fig. 4.18). De manera similar, (25, 675) pertenece a la gráfica. Si hacemos $(d_1, w_1) = (0, 40)$ y $(d_2, w_2) = (25, 675)$, la pendiente de la recta es

$$m = \frac{w_2 - w_1}{d_2 - d_1} = \frac{675 - 40}{25 - 0} = \frac{635}{25} = \frac{127}{5}.$$

Utilizando la forma punto-pendiente, tenemos

$$w - w_1 = m(d - d_1),$$

$$w - 40 = \frac{127}{5}(d - 0),$$

$$w - 40 = \frac{127}{5}d,$$

$$w = \frac{127}{5}d + 40,$$

que expresa w como una función lineal de d.

b. *Determinar el peso promedio de una gallina cuando* $d = 10$.

Solución: cuando $d = 10$, tenemos $w = \frac{127}{5}(10) + 40 = 254 + 40 = 294$. Así, el peso promedio de una gallina 10 días después del inicio de la dieta es de 294 gramos.

Ejercicio 4.2

En los problemas del 1 al 6 determine la pendiente y la intersección con el eje vertical de la función lineal; haga un bosquejo de la gráfica.

1. $y = f(x) = -4x$.

2. $y = f(x) = x + 1$.

3. $g(t) = 2t - 4$.

4. $g(t) = 2(4 - t)$.

5. $h(q) = \dfrac{2 - q}{7}$.

6. $h(q) = 0.5q + 0.25$.

En los problemas del 7 al 14 determine f(x), si f es una función lineal que tiene las propiedades dadas.

7. Pendiente $= 4$, $f(2) = 8$.

8. $f(0) = 3$, $f(4) = -5$.

9. $f(1) = 2$, $f(-2) = 8$.

10. Pendiente $= -4$, $f(\frac{1}{3}) = -2$.

11. Pendiente $= -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = 4$.

12. $f(1) = 1$, $f(2) = 2$.

13. $f(-2) = -1$, $f(-4) = -3$.

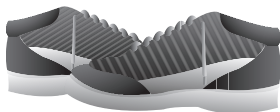
14. Pendiente $= 0.01$, $f(0.1) = 0.01$.

15. **Ecuación de demanda** Suponga que los clientes demandarán 40 unidades de un producto cuando el precio es de $12 por unidad, y 25 unidades cuando el precio es de $18 cada una. Halle la ecuación de la demanda, suponiendo que es lineal. Determine el precio por unidad cuando se requieren 30 unidades.

16. **Ecuación de demanda** La demanda semanal para un libro que se vende mucho es de 26,000 ejemplares cuando el precio es $16 cada uno, y de 10,000 libros cuando el precio es de $24 cada uno. Determine una ecuación de demanda para el libro, suponiendo que aquélla es lineal.

17. **Ecuación de oferta** Un fabricante de refrigeradores produce 3000 unidades cuando el precio es de $940 y 2200 unidades cuando el precio es $740. Suponga que el precio, p, y la cantidad, q, producidas están relacionadas de manera lineal. Determine la ecuación de oferta.

18. **Ecuación de oferta** Suponga que un fabricante de zapatos colocará en el mercado 50 mil pares cuando el precio es 35 (dólares por par) y 35 mil pares de zapatos cuando el precio es 30 dólares. Determine la ecuación de oferta, suponiendo que el precio p y la cantidad q están relacionadas de manera lineal.



19. **Ecuación de costo** Suponga que el costo para producir 10 unidades de un producto es $40 y el costo para 20 unidades es $70. Si el costo, c, está relacionado de manera lineal con la producción, q, determine el costo de producir 35 unidades.

20. **Ecuación de costo** Un anunciante va con un impresor y éste le cobra $79 por 100 copias de un volante y $88 por 400 copias de otro volante. Este impresor cobra un costo fijo, más una tarifa por cada copia de volantes de una sola página. Determine una función que describa el costo de un trabajo de impresión, si x es el número de copias que se hacen.

21. **Tarifas de electricidad** Una compañía de electricidad cobra a clientes residenciales 12.5 centavos por kilowatt-hora más un cargo base mensual. La factura mensual de un cliente viene con $51.65 por 380 kilowatt-hora. Determine una función lineal que describa el monto total por concepto de electricidad, si x es el número de kilowatt-hora utilizados en un mes.

22. **Terapia por medio de radiación** Un paciente con cáncer recibirá terapias mediante fármacos y radiación. Cada centímetro cúbico de la droga que será utilizada contiene 200 unidades curativas, y cada minuto de exposición a la radiación proporciona 300 unidades curativas. El paciente requiere 2400 unidades curativas. Si se administran d centímetros cúbicos y r minutos de radiación, determine una ecuación que relacione d y r. Haga la gráfica de la ecuación para $d \geq 0$ y $r \geq 0$; marque el eje horizontal como d.

23. **Depreciación** Suponga que el valor de una pieza de maquinaria disminuye cada año en 10% de su valor original. Si el valor original es $8000, determine una ecuación que exprese el valor v de la maquinaria t años después de su compra, en donde $0 \leq t \leq 10$. Haga un bosquejo de la ecuación, seleccione t como el eje horizontal y v como el eje vertical. ¿Cuál es la pendiente de la recta resultante? Este método de considerar el valor del equipo se denomina *depreciación lineal*.

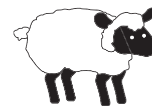
24. **Depreciación** Un televisor nuevo se deprecia $120 por año, y tiene un valor de $340 después de 4 años. Determine una función que describa el valor de este televisor, si x es la edad, en años, de la televisión.

25. **Apreciación** Un nuevo edificio de apartamentos se vendió por $960,000 cinco años después de que se compró. Los propietarios originales calcularon que el edificio se apreciaba $45,000 por año, mientras ellos fuesen los propietarios. Determine una función lineal que describa la apreciación del edificio, si x es el número de años desde la compra original.

26. **Apreciación** Una casa comprada en $198,000 se espera que duplique su valor en 18 años. Determine una ecuación lineal que describa el valor de la casa después de x años.

27. **Precios por reparación** Una compañía que repara copiadoras comerciales, cobra por un servicio una cantidad fija más una tarifa por hora. Si un cliente tiene una factura de $150 por un servicio de una hora y $280 por un servicio de tres horas, determine una función lineal que describa el precio de un servicio, en donde x es el número de horas del servicio.

28. **Longitud de lana de ovejas** Para regular su temperatura en relación con el calor ambiental, las ovejas aumentan su ritmo respiratorio, r (por minuto), cuando la longitud de la lana, l (en centímetros) disminuye.[2] Suponga que una oveja con una longitud de lana de 2 cm tiene un ritmo (promedio) respiratorio de 160, y aquéllas con una longitud de lana de 4 cm tienen un ritmo respiratorio de 125. Suponga que r y l están relacionadas linealmente. (a) Determine una ecuación que proporcione r en términos de l. (b) Determine el ritmo respiratorio de una oveja que tiene una longitud de lana de 1 cm.



29. **Línea de isocostos** En análisis de producción, una *línea de isocosto* es una línea cuyos puntos representan todas las combinaciones de dos factores de producción que pueden comprarse por la misma cantidad. Suponga que un granjero tiene asignados $20,000 para la compra de x toneladas de fertilizante (con un costo de $200 por tonelada) y y acres de tierra (con un costo de $2000 por acre). Determine una ecuación de la línea de isocosto que describa las distintas combinaciones que pueden comprarse con $20,000. Observe que ni x ni y pueden ser negativas.

---

[2]Adaptado de G. E. Folk, Jr., *Textbook of Environmental Physiology*. 2a. ed. (Philadelphia: Lea & Febiger, 1974.)

30. Línea de isoutilidad Un fabricante produce los productos X y Y para los cuales las ganancias por unidad son de \$4 y \$6, respectivamente. Si se venden x unidades de X y y unidades de Y, entonces la ganancia total P está dada por $P = 4x + 6y$, donde $x, y \geq 0$. (a) Haga el bosquejo de la gráfica de esta ecuación para $P = 240$. El resultado se conoce como *línea de isoutilidad*, y sus puntos representan todas las combinaciones de ventas que producen una utilidad de \$240. (b) Determine la pendiente para $P = 240$. (c) Si $P = 600$, determine la pendiente. (d) ¿Las rectas de isoutilidad para los productos X y Y son paralelas?

31. Escala de calificaciones Por razones de comparación, un profesor quiere cambiar la escala de las calificaciones de un conjunto de exámenes escritos, de modo que la calificación máxima siga siendo 100, pero la media (promedio) sea 80 en lugar de 56. (a) Determine una ecuación lineal que prediga esto. [*Sugerencia*: quiere que 56 se convierta en 80 y 100 permanezca como 100. Considere los puntos (56, 80) y (100, 100), y de manera más general, (x, y), donde x es la calificación anterior y y la nueva. Encuentre la pendiente y utilice la forma punto-pendiente. Exprese y en términos de x.] (b) Si en la nueva escala 60 es la calificación más baja para acreditar, ¿cuál fue la calificación más baja para acreditar en la escala original?

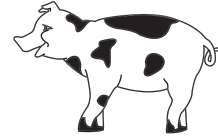
32. Psicología El resultado del experimento psicológico de Sternberg[3] sobre la recuperación de información, es que el tiempo de reacción, R, de una persona, en milisegundos, de acuerdo con las estadísticas es una función lineal del tamaño del conjunto de memoria N como sigue:

$$R = 38N + 397.$$

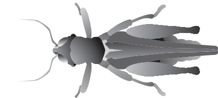
Haga el bosquejo de la gráfica para $1 \leq N \leq 5$. ¿Cuál es la pendiente?

33. Psicología En cierto experimento de aprendizaje que involucra repetición y memoria,[4] se estimó que la proporción p de elementos recordados se relacionaba linealmente con un tiempo de estudio efectivo t (en segundos), donde t está entre 5 y 9. Para un tiempo de estudio efectivo de 5 segundos, la proporción de elementos recordados fue de 0.32. Por cada segundo más en el tiempo de estudio, la proporción recordada aumentaba en 0.059. (a) Determine una ecuación que proporcione p en términos de t. (b) ¿Qué proporción de elementos se recordaron con 9 segundos de tiempo efectivo de estudio?

34. Dieta para cerdos En pruebas realizadas en una dieta experimental para cerdos, se determinó que el peso (promedio) w (en kilogramos) de un cerdo, estadísticamente era una función lineal del número de días, d, después de iniciada la dieta, donde $0 \leq d \leq 100$. Si el peso de un cerdo al inicio de la dieta fue de 20 kg, y a partir de ahí ganó 6.6 kg cada 10 días, determine w como una función de d; calcule el peso de un cerdo para 50 días después que inició la dieta.



35. Chirrido de grillos Los biólogos han encontrado que el número de chirridos por minuto hechos por los grillos de cierta especie están relacionados con la temperatura. La relación es casi lineal. A diferencia de los grillos que se mencionaron al inicio del capítulo 1, estos grillos chirrían todo el verano. A 68°F, los chirridos de los grillos son casi 124 por minuto. A 80°F son alrededor de 172 por minuto. (a) Determine una ecuación que dé la temperatura Fahrenheit, t, en términos del número de chirridos, c, por minuto. (b) Si usted cuenta los chirridos sólo durante 15 segundos, ¿cómo puede estimar rápidamente la temperatura?



36. Circuitos eléctricos En un circuito eléctrico el voltaje, V (en volts), y la corriente, i (en amperes), están relacionados linealmente. Cuando $i = 4$, $V = 2$; cuando $i = 12$, $V = 6$.

a. Determine V como una función de i.
b. Encuentre el voltaje cuando la corriente es de 10.

37. Física La presión, P, de un volumen constante de gas, en centímetros de mercurio, está relacionada linealmente con la temperatura, T, en grados Celsius. En un experimento con aire seco, se encontró que $P = 90$ cuando $T = 40$, y que $P = 100$ cuando $T = 80$. Exprese P como una función de T.

38. Teoría eléctrica Cuando una gráfica de la diferencia de potencial, V, en volts, de una celda de Daniell se grafica como una función de la corriente, i, en amperes, que se envía a un resistor externo, se obtiene una línea recta. La pendiente de esta recta es el negativo del valor de la resistencia interna de la celda. Para una celda particular con resistencia interna de 0.06 ohms, se encontró que $V = 0.6$ volts cuando $i = 0.12$ amperes. Exprese V como una función de i.

39. Hidráulica Una fórmula utilizada en hidráulica es

$$Q = 3.340b^3 + 1.8704b^2x,$$

donde b es una constante.

a. ¿La gráfica de esta ecuación es una línea recta?
b. De ser así, ¿cuál es la pendiente cuando $b = 1$?

---

[3]G. R. Loftus y E. E. Loftus, *Human Memory: The Processing of Information* (Nueva York: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley & Sons, Inc., 1976).
[4]D. L. Hintzman, "Repetition and Learning", en *The Psychology of Learning*, vol. 10, ed. G. H. Brower (Nueva York: Academic Press, Inc., 1976, p. 77).

OBJETIVO Hacer el bosquejo de las parábolas que surgen de funciones cuadráticas.

4.3 FUNCIONES CUADRÁTICAS

En la sección 3.2 se describió a una *función cuadrática* como una función polinomial de grado 2. A continuación se presenta una definición formal.

Definición

Una función f es una ***función cuadrática*** *si y sólo si* $f(x)$ puede escribirse en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, *donde* a, b *y* c son constantes *y* $a \neq 0$.

Por ejemplo, las funciones $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y $F(t) = -3t^2$ son cuadráticas. Sin embargo, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ *no* es cuadrática, ya que no puede escribirse en la forma $g(x) = ax^2 + bx + c$.

La gráfica de la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ *se* llama **parábola** y tiene una forma parecida a las curvas de la figura 4.19. Si $a > 0$, la gráfica se extiende hacia arriba de manera indefinida y decimos que la parábola *abre hacia arriba* [véase la fig. 4.19(a)]. Si $a < 0$, entonces la parábola *abre hacia abajo* [véase la fig. 4.19(b)].

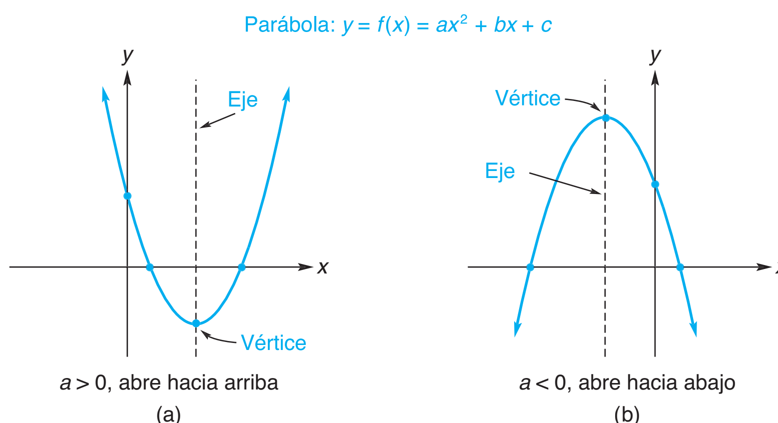


FIGURA 4.19 Parábolas.

Cada parábola en la figura 4.19 es *simétrica* con respecto a una recta vertical, llamada el **eje de simetría** de la parábola. Esto es, si la página fuera doblada en una de estas rectas, entonces las dos mitades de la parábola correspondiente coincidirían. El eje (de simetría) *no* es parte de la parábola, pero es una ayuda útil para hacer su bosquejo.

La figura 4.19 también muestra puntos marcados como **vértice,** donde el eje corta a la parábola. Si $a > 0$, el vértice es el punto "más bajo" de la parábola. Esto significa que $f(x)$ tiene un valor mínimo en ese punto. Si hacemos manipulaciones algebraicas sobre $ax^2 + bx + c$ (lo que se conoce como *completar el cuadrado*), podemos determinar no sólo este valor mínimo, sino también en dónde ocurre. Tenemos

$$f(x) = ax^2 + bx + c = (ax^2 + bx) + c.$$

Sumando y restando $\frac{b^2}{4a}$ se obtiene

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a},$$

de modo que

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Puesto que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ y $a > 0$, se sigue que $f(x)$ tiene un valor mínimo cuando $x + \frac{b}{2a} = 0$, esto es, cuando $x = -\frac{b}{2a}$. La coordenada y correspondiente a este valor de x es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Así, el vértice está dado por

$$\text{vértice} = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

Éste también es el vértice de la parábola que abre hacia abajo ($a < 0$), pero en este caso $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ es el valor máximo de $f(x)$. [véase la fig. 4.19(b).]

El punto en donde la parábola $y = ax^2 + bx + c$ interseca al eje y (esto es, la intersección y) se da cuando $x = 0$. La coordenada y de este punto es c, de modo que la intersección con el eje y es $(0, c)$ o, simplemente, c. En resumen, tenemos lo siguiente.

Gráfica de una función cuadrática

La gráfica de la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola.

1. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba. Si $a < 0$, abre hacia abajo.
2. El vértice es $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
3. La intersección y es c.

Podemos hacer un rápido bosquejo de la gráfica de una función cuadrática localizando primero el vértice, la intersección y y unos cuantos puntos más, aquéllos en donde la parábola interseca al eje x. Las *intersecciones* x se encuentran al hacer $y = 0$ y resolver para x. Una vez que las intersecciones y el vértice se encuentran, es relativamente fácil trazar la parábola apropiada a través de estos puntos. En el caso de que las intersecciones con el eje x estén muy cercanas al vértice o que no existan intersecciones con el eje x, determinamos un punto en cada lado del vértice, de modo que podamos hacer un bosquejo razonable de la parábola. Tenga en cuenta que una recta vertical (con línea punteada) a través del vértice da el eje de simetría. Si graficamos puntos a un lado del eje, podemos obtener por simetría los correspondientes del otro lado.

Principios en práctica 1

Gráfica de una función cuadrática

La utilidad diaria de un concesionario de automóviles por la venta de un tipo de minivan está dada por $P(x) = -x^2 + 2x + 399$, en donde x es el número de minivans vendidas. Determine el vértice de la función y sus intersecciones con los ejes, y haga una gráfica de la función.

EJEMPLO 1 Graficación de una función cuadrática

Graficar la función cuadrática $y = f(x) = -x^2 - 4x + 12$.

Solución: aquí $a = -1$, $b = -4$ y $c = 12$. Como $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y, por tanto, tiene un punto más alto. La coordenada x del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(-1)} = -2.$$

La coordenada y es $f(-2) = -(-2)^2 - 4(-2) + 12 = 16$. Así, el vértice es $(-2, 16)$, de modo que el valor máximo de $f(x)$ es 16. Ya que $c = 12$, la intersección y es 12. Para encontrar las intersecciones x, hacemos y igual a 0 en $y = -x^2 - 4x + 12$ y resolvemos para x:

$$0 = -x^2 - 4x + 12,$$
$$0 = -(x^2 + 4x - 12),$$
$$0 = -(x + 6)(x - 2).$$

Así $x = -6$ o $x = 2$, de modo que las intersecciones x son -6 y 2. Ahora trazamos el vértice, el eje de simetría y las intersecciones [véase la fig. 4.20(a)]. Como (0, 12) está a *dos* unidades a la *derecha* del eje, existe un punto correspondiente *dos* unidades a la *izquierda* del eje con la misma coordenada y. Por tanto, obtenemos el punto $(-4, 12)$. Al unir todos los puntos, trazamos una parábola que abre hacia abajo [véase la fig. 4.20(b)].

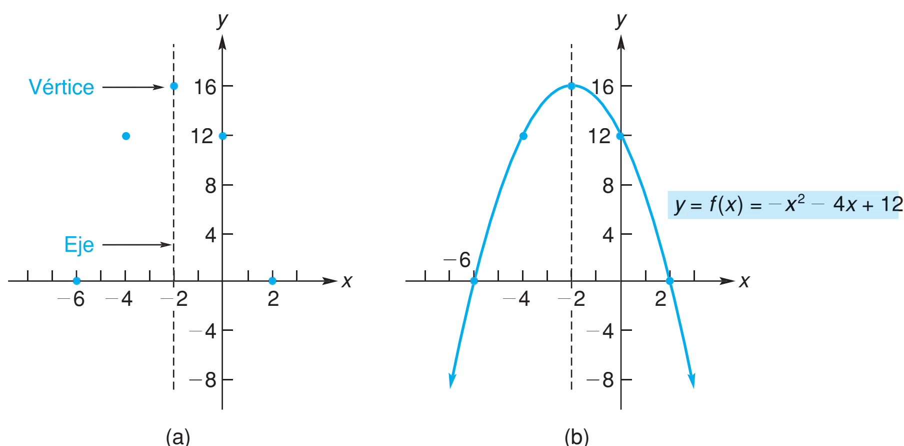


FIGURA 4.20 Gráfica de la parábola $y = f(x) = -x^2 - 4x + 12$.

EJEMPLO 2 Graficación de una función cuadrática

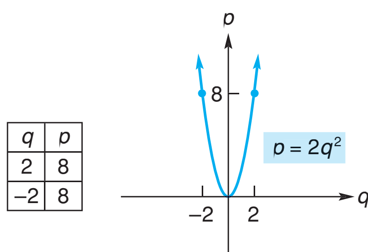
Graficar $p = 2q^2$.

Solución: aquí p es una función cuadrática de q, donde $a = 2$, $b = 0$ y $c = 0$. Como $a > 0$, la parábola abre hacia arriba y, por tanto, tiene un punto más bajo. La coordenada q del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(2)} = 0,$$

y la coordenada p es $2(0)^2 = 0$. En consecuencia, el valor *mínimo* de p es 0 y el vértice es (0, 0). En este caso, el eje p es el eje de simetría. Una parábola que

abre hacia arriba con vértice en (0, 0) no puede tener ninguna otra intersección. De aquí que para hacer un buen bosquejo de esta parábola, graficamos un punto a cada lado del vértice. Si $q = 2$, entonces $p = 8$. Esto da el punto (2, 8), y por simetría el punto (−2, 8) (véase la fig.4.21).



q	p
2	8
−2	8

FIGURA 4.21 Gráfica de la parábola $p = 2q^2$.

El ejemplo 3 ilustra que la determinación de las intersecciones puede requerir el uso de la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 3 Graficación de una función cuadrática

Graficar $g(x) = x^2 - 6x + 7$.

Solución: aquí g es una función cuadrática, donde $a = 1$, $b = -6$ y $c = 7$. La parábola abre hacia arriba, ya que $a > 0$. La coordenada x del vértice (el punto más bajo) es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3,$$

y $g(3) = 3^2 - 6(3) + 7 = -2$, que es el valor mínimo de $g(x)$. Por tanto, el vértice es $(3, -2)$. Ya que $c = 7$, la intersección con el eje vertical es 7. Para encontrar las intersecciones x, hacemos $g(x) = 0$.

$$0 = x^2 - 6x + 7.$$

El lado derecho no se puede factorizar con facilidad, de modo que usaremos la fórmula cuadrática para hallar los valores de x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(7)}}{2(1)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{6}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Por tanto, las intersecciones x son $3 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{2}$. Después de graficar el vértice, las intersecciones y (por simetría) el punto (6, 7), dibujamos la parábola que se abre hacia arriba como se muestra en la figura 4.22.

Principios en práctica 2
Gráfica de una función cuadrática

Un hombre que está parado en el montículo del lanzador lanza una bola recta con una velocidad inicial de 32 pies por segundo. La altura de la bola, en pies, t segundos después de que fue lanzada se describe por medio de la función $h(t) = -16t^2 + 32t + 8$, para $t \geq 0$. Determine el vértice y las intersecciones con los ejes de la función, y haga una gráfica de la función.

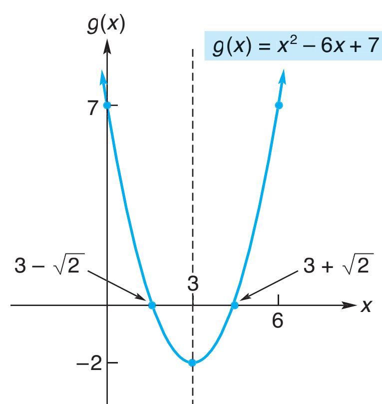


FIGURA 4.22 Gráfica de la parábola $g(x) = x^2 - 6x + 7$.

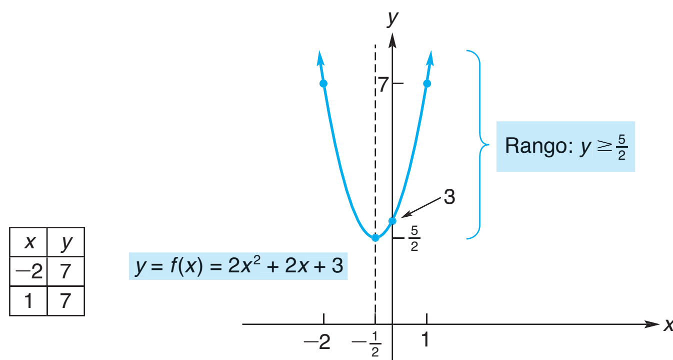
EJEMPLO 4 Graficación de una función cuadrática

Graficar $y = f(x) = 2x^2 + 2x + 3$ *y determinar el rango de f.*

Solución: esta función es cuadrática con $a = 2$, $b = 2$ y $c = 3$. Como $a > 0$ la gráfica es una parábola que se abre hacia arriba. La coordenada x del vértice es

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(2)} = -\frac{1}{2}$$

y la coordenada y es $2(-\frac{1}{2})^2 + 2(-\frac{1}{2}) + 3 = \frac{5}{2}$. Así, el vértice es $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$. Como $c = 3$, la intersección y es 3. Una parábola que abre hacia arriba con su vértice arriba del eje x no tiene intersecciones x. En la figura 4.23 graficamos



x	y
−2	7
1	7

FIGURA 4.23 Gráfica de $y = f(x) = 2x^2 + 2x + 3$.

la intersección y, el vértice y un punto adicional $(-2, 7)$ a la izquierda del vértice. Por simetría, también obtenemos el punto $(1, 7)$. Trazando una parábola a través de estos puntos se obtiene la gráfica deseada. Con base en la figura, vemos que el rango de f es toda $y \geq \frac{5}{2}$, esto es, el intervalo $[\frac{5}{2}, \infty)$.

EJEMPLO 5 Ingreso máximo

La función de demanda para un producto es $p = 1000 - 2q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando q unidades son demandadas (por semana) por los consumidores. Encontrar el nivel de producción que maximice el ingreso total del productor, y determinar ese ingreso.

Solución:

La fórmula para el ingreso total debe sumarse a su repertorio de relaciones para negocios y economía.

Estrategia: para maximizar el ingreso, debemos determinar la función de ingreso, $r = f(q)$. Utilizando la relación

$$\textbf{ingreso total} = (\textbf{precio})(\textbf{cantidad}),$$

tenemos

$$r = pq.$$

Por medio de la ecuación de demanda, podemos expresar p en términos de q, de modo que r sea estrictamente una función de q.

Tenemos

$$\begin{aligned} r &= pq \\ &= (1000 - 2q)q. \\ r &= 1000q - 2q^2. \end{aligned}$$

Observe que r es una función cuadrática de q, con $a = -2$, $b = 1000$ y $c = 0$. Ya que $a < 0$ (la parábola abre hacia abajo), r es máximo en el vértice (q, r), donde

$$q = -\frac{b}{2a} = -\frac{1000}{2(-2)} = 250.$$

El valor máximo de r está dado por

$$\begin{aligned} r &= 1000(250) - 2(250)^2 \\ &= 250{,}000 - 125{,}000 = 125{,}000. \end{aligned}$$

Así, el ingreso máximo que el fabricante puede recibir es de $125,000, que ocurre en un nivel de producción de 250 unidades. La figura 4.24(a) muestra la gráfica de la función de ingreso. Sólo la parte para la que $q \geq 0$ y $r \geq 0$ se dibuja, ya que la cantidad y el ingreso no pueden ser negativos.

Principios en práctica 3
Ingreso máximo

La función de demanda para la línea de libros de cocina de un editor es $p = 6 - 0.003q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (por día). Determine el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

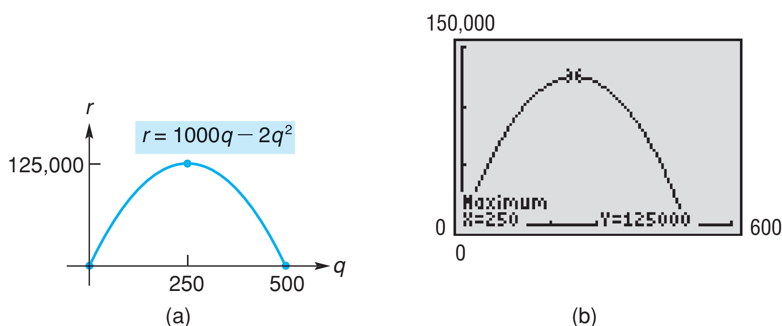


FIGURA 4.24 Gráfica de la función de ingreso.

Tecnología

El valor máximo (o mínimo) de una función puede encontrarse con una calculadora gráfica, utilizando las características de trazado y acercamiento, o bien con la operación de "máximo" (o "mínimo"). La figura 4.24(b) muestra la pantalla para la función de ingreso del ejemplo 5, esto es, la gráfica de $y = 1000x - 2x^2$. Observe que remplazamos r por y y q por x.

Ejercicio 4.3

En los problemas del 1 al 8 establezca si la función es cuadrática o no.

1. $f(x) = 5x^2$.

2. $g(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 4}$.

3. $g(x) = 7 - 6x$.

4. $h(s) = 2s^2(s^2 + 1)$.

5. $h(q) = (q + 4)^2$.

6. $f(t) = 2t(3 - t) + 4t$.

7. $f(s) = \dfrac{s^2 - 9}{2}$.

8. $g(t) = (t^2 - 1)^2$.

En los problemas del 9 al 12 no haga una gráfica.

9. (a) Para la parábola $y = f(x) = -4x^2 + 8x + 7$, encuentre el vértice. (b) ¿El vértice corresponde al punto más bajo o al más alto de la gráfica?

10. Repita el problema 9, si $y = f(x) = 8x^2 + 4x - 1$.

11. Para la parábola $y = f(x) = x^2 + 2x - 8$, encuentre (a) la intersección y, (b) las intersecciones x, y (c) el vértice.

12. Repita el problema 11, si $y = f(x) = 3 + x - 2x^2$.

En los problemas del 13 al 22 grafique cada función. Obtenga el vértice y las intersecciones, y determine el rango.

13. $y = f(x) = x^2 - 6x + 5.$

14. $y = f(x) = -4x^2.$

15. $y = g(x) = -2x^2 - 6x.$

16. $y = f(x) = x^2 - 1.$

17. $s = h(t) = t^2 + 2t + 1.$

18. $s = h(t) = 2t^2 + 3t - 2.$

19. $y = f(x) = -9 + 8x - 2x^2.$

20. $y = H(x) = 1 - x - x^2.$

21. $t = f(s) = s^2 - 8s + 14.$

22. $t = f(s) = s^2 + 6s + 11.$

En los problemas del 23 al 26 establezca si $f(x)$ tiene un valor máximo o mínimo y encuentre ese valor.

23. $f(x) = 100x^2 - 20x + 25.$

24. $f(x) = -2x^2 - 16x + 3.$

25. $f(x) = 4x - 50 - 0.1x^2.$

26. $f(x) = x(x + 3) - 12.$

---

27. Ingreso La función de demanda para el fabricante de un producto es $p = f(q) = 1200 - 3q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando se demandan q unidades (por semana). Encuentre el nivel de producción que maximiza el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

28. Ingreso La función de demanda para una línea de reglas de plástico de una compañía de artículos de oficina es $p = 0.9 - 0.0004q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (diarias). Determine el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

29. Ingreso La función de demanda para la línea de laptops de una compañía de electrónica es $p = 2400 - 6q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (semanales). Determine el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.

30. Mercadeo Una compañía de investigación de mercados estima que n meses después de la introducción de un nuevo producto, $f(n)$ miles de familias lo usarán, en donde

$$f(n) = \tfrac{10}{9}n(12 - n), \qquad 0 \leq n \leq 12.$$

Estime el número máximo de familias que usarán el producto.

31. Utilidad La utilidad diaria de la venta de árboles para el departamento de jardinería de un almacén está dada por $P(x) = -x^2 + 18x + 144$, en donde x es el número de árboles vendidos. Determine el vértice y las intersecciones con los ejes de la función, y haga la gráfica de la función.

32. Psicología Una predicción hecha por la psicología, relaciona la magnitud de un estímulo, x, con la magnitud de la respuesta, y, lo cual se expresa por la ecuación $y = kx^2$, en donde k es una constante del experimento. En un experimento sobre reconocimiento de patrones, $k = 2$. Determine el vértice de la función y haga la gráfica de su ecuación (suponga que no hay restricción sobre x).

33. Biología Unos biólogos estudiaron los efectos nutricionales sobre ratas que fueron alimentadas con una dieta que contenía un 10% de proteína.[5] La proteína consistía en levadura y harina de maíz. Al variar el porcentaje P de levadura en la mezcla de proteína, el grupo de biólogos estimaron que el peso promedio ganado (en gramos) por una rata en un periodo fue

$$f(P) = -\tfrac{1}{50}P^2 + 2P + 20, \quad 0 \leq P \leq 100.$$

Encuentre el peso máximo ganado.

34. Altura de una pelota Suponga que la altura, s, de una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde el piso está dada por

$$s = -4.9t^2 + 58.8t,$$

donde s está en metros y t es el tiempo transcurrido en segundos (véase la fig. 4.25). ¿Al cabo de cuántos segundos la pelota alcanza su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

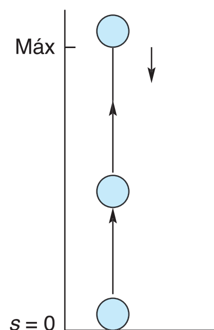


FIGURA 4.25 Pelota lanzada verticalmente hacia arriba (problema 34).

[5] Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods", en *Single-Cell Protein*, ed. R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

35. Arquería Un muchacho que está parado en una colina, dispara una flecha directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La altura, h, de la flecha en pies, t segundos después de que se soltó, se describe por la función $h(t) = -16t^2 + 80t + 32$. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la flecha? ¿Cuántos segundos después de que se suelta, alcanza esta altura?

36. Lanzamiento de muñeca Una niña de 6 años de edad que está parada sobre una caja de juguetes lanza una muñeca directamente hacia arriba, con una velocidad inicial de 16 pies por segundo. La altura h de la muñeca en pies, t segundos después de que se soltó se describe por medio de la función $h(t) = -16t^2 + 16t + 4$. ¿Cuánto tiempo le toma a la muñeca alcanzar su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

37. Lanzamiento de un cohete Un cohete de juguete se lanza verticalmente hacia arriba desde el techo de una cochera con una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La altura, h, del cohete en pies, t segundos después que fue lanzado, se describe por medio de la función $h(t) = -16t^2 + 80t + 16$. Determine el vértice y las intersecciones con los ejes de la gráfica, y haga la gráfica de la función.

38. Cable en suspensión La forma del cable principal de un puente colgante puede describirse por medio de la función

$$y = f(x) = \frac{1}{500}x^2 + \frac{1}{250}x + 10, \quad -100 \leq x \leq 100,$$

en donde $f(x)$ es la altura del cable (en pies) por arriba del terraplén, y x es la distancia horizontal (en pies) medida desde el centro del puente. Haga la gráfica de la función y determine su rango.

39. Física El desplazamiento de un objeto desde un punto de referencia en el tiempo t está dado por

$$s = 3.2t^2 - 16t + 28.7,$$

donde s está en metros y t en segundos.

a. ¿Para qué valor de t ocurre el desplazamiento mínimo?
b. ¿Cuál es el desplazamiento mínimo del objeto, medido a partir del punto de referencia?

40. Fuerza Durante una colisión, la fuerza, F (en newtons), que actúa sobre un objeto varía con el tiempo t, de acuerdo con la ecuación $F = 87t - 21t^2$, donde t está en segundos.

a. ¿Para qué valor de t es máxima la fuerza?
b. ¿Cuál es el valor máximo de la fuerza?

41. Viga con carga Cuando una viga horizontal de longitud l es cargada uniformemente, la ecuación del momento es

$$M = \frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2},$$

donde w está relacionada con la carga, y x es la medida desde el extremo izquierdo de la viga.

a. ¿Para qué valor de x es M un máximo? (Suponga $w > 0$.)
b. ¿Cuál es el valor máximo de M?
c. ¿Para qué valores de x se tiene $M = 0$?

42. Área Exprese el área del rectángulo mostrado en la figura 4.26 como una función cuadrática de x. ¿Para qué valor de x el área será máxima?

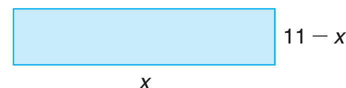


FIGURA 4.26 Diagrama para el problema 42.

43. Terreno cercado Un constructor de edificios quiere cercar un terreno rectangular adyacente a un río recto, utilizando la orilla del río como un lado del área encerrada (véase la fig. 4.27). Si el constructor tiene 200 pies de cerca, encuentre las dimensiones del área máxima que se puede encerrar.

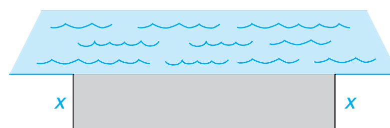


FIGURA 4.27 Diagrama para el problema 43.

44. Encuentre dos números cuya suma es 40 y su producto es un máximo.

45. A partir de la gráfica de $y = 1.4x^2 - 3.1x + 4.6$, determine las coordenadas del vértice. Redondee los valores a dos decimales. Verifique su respuesta utilizando la fórmula para el vértice.

46. Encuentre los ceros de $f(x) = -\sqrt{2}x^2 + 3x + 8.5$ por inspección de su gráfica. Redondee los valores a dos decimales.

47. Determine el número de ceros reales de cada una de las siguientes funciones cuadráticas:

a. $f(x) = 4.2x^2 - 8.1x + 10.4$.
b. $f(x) = 5x^2 - 2\sqrt{35}x + 7$.
c. $f(x) = \dfrac{5.1 - 7.2x - x^2}{4.8}$.

48. Encuentre el valor máximo (redondeado a dos decimales) de la función $f(x) = 5.4 + 12x - 4.1x^2$ a partir de su gráfica.

49. Encuentre el valor mínimo (redondeado a dos decimales) de la función $f(x) = 20x^2 - 13x + 7$ a partir de su gráfica.

OBJETIVO Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres variables por medio de la técnica de eliminación por adición o por sustitución (en el capítulo 6 se mostrarán otros métodos).

4.4 Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas con dos variables

Cuando una situación debe describirse matemáticamente, no es raro que surja un *conjunto* de ecuaciones. Por ejemplo, suponga que el administrador de una fábrica establece un plan de producción para dos modelos de un producto nuevo. El modelo A requiere de 4 piezas del tipo I y 9 piezas del tipo II. El modelo B requiere de 5 piezas del tipo I y 14 piezas del tipo II. De sus proveedores, la fábrica obtiene 335 piezas del tipo I y 850 piezas del tipo II cada día. ¿Cuántos productos de cada modelo debe producir cada día, de modo que todas las piezas del tipo I y piezas del tipo II sean utilizadas?

Es buena idea construir una tabla que resuma la información importante. La tabla 4.2 muestra el número de piezas del tipo I y piezas del tipo II requeridas para cada modelo, así como el número total disponible.

TABLA 4.2

	Modelo A	Modelo B	Total disponible
Piezas tipo I	4	5	335
Piezas tipo II	9	14	850

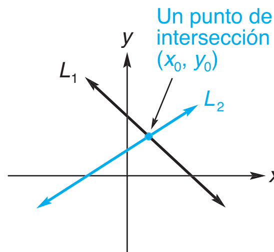


FIGURA 4.28 Sistema lineal (una solución).

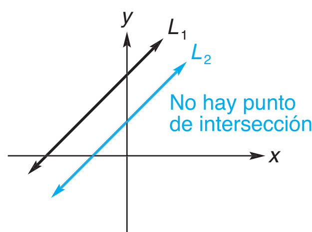


FIGURA 4.29 Sistema lineal (no hay solución).

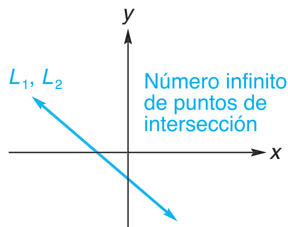


FIGURA 4.30 Sistema lineal (un número infinito de soluciones).

Suponga que hacemos x igual al número de artículos del modelo A fabricados cada día, y y igual al número de artículos del modelo B. Entonces éstos requieren de $4x + 5y$ piezas del tipo I y $9x + 14y$ piezas del tipo II. Como están disponibles 335 y 850 piezas del tipo I y II, respectivamente, tenemos

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335, & \textbf{(1)} \\ 9x + 14y = 850. & \textbf{(2)} \end{cases}$$

A este conjunto de ecuaciones le llamamos **sistema** de dos ecuaciones lineales en las variables (o incógnitas) x y y. El problema es encontrar valores de x y y para los cuales *ambas* ecuaciones sean verdaderas de manera *simultánea*. Estos valores se llaman *soluciones* del sistema.

Como las ecuaciones (1) y (2) son lineales, sus gráficas son líneas rectas; llamémoslas L_1 y L_2. Ahora, las coordenadas de cualquier punto sobre una línea satisfacen la ecuación de esa línea; esto es, hacen a la ecuación verdadera. Por tanto, las coordenadas de cualquier punto de intersección de L_1 y L_2 satisfacen ambas ecuaciones. Esto significa que un punto de intersección da una solución del sistema.

Si L_1 y L_2 se dibujan en el mismo plano, existen tres posibles situaciones:

1. L_1 y L_2 pueden intersecarse en exactamente un punto, digamos (x_0, y_0). (Véase la fig. 4.28). Por tanto, el sistema tiene la solución $x = x_0$ y $y = y_0$.
2. L_1 y L_2 pueden ser paralelas y no tener puntos en común (véase la fig. 4.29). En este caso no existe solución.
3. L_1 y L_2 pueden ser la misma recta (véase la fig. 4.30). Por tanto, las coordenadas de cualquier punto sobre la recta son una solución del sistema. En consecuencia, existe un número infinito de soluciones.

Nuestro objetivo principal aquí es estudiar los métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones lineales. En esencia, remplazamos de manera

sucesiva un sistema por otro que tenga la misma solución (esto es, remplazamos el sistema original por *sistemas equivalentes*), *pero cuyas ecuaciones tengan una forma progresivamente más adecuada para determinar la solución. En términos más precisos, buscamos un sistema equivalente que contenga una ecuación en la que una de las variables no aparezca* (*esto es, eliminar una de las variables*). Ilustraremos este procedimiento para el sistema propuesto originalmente:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 335, & (3) \\ 9x + 14y = 850. & (4) \end{cases}$$

Para empezar, obtendremos un sistema equivalente en el que x no aparezca en una ecuación. Primero encontramos un sistema equivalente en el que los coeficientes de los términos en x en cada ecuación sean iguales excepto por el signo. Multiplicando la ecuación (3) por 9 [esto es, multiplicando ambos miembros de la ecuación (3) por 9] y multiplicando la ecuación (4) por -4 se obtiene

$$\begin{cases} 36x + 45y = 3015, & (5) \\ -36x - 56y = -3400. & (6) \end{cases}$$

Los miembros izquierdo y derecho de la ecuación (6) son iguales, de modo que cada miembro puede *sumarse* al correspondiente de la ecuación (5). Esto tiene como resultado

$$-11y = -385,$$

que sólo tiene una variable, como se planeó. Resolviéndola se obtiene

$$y = 35,$$

así obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = 35, & (7) \\ -36x - 56y = -3400. & (8) \end{cases}$$

Al remplazar y en la ecuación (8) por 35, obtenemos

$$\begin{aligned} -36x - 56(35) &= -3400, \\ -36x - 1960 &= -3400, \\ -36x &= -1440, \\ x &= 40. \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} y = 35, \\ x = 40. \end{cases}$$

Podemos verificar nuestra respuesta sustituyendo $x = 40$ y $y = 35$ en *ambas* ecuaciones originales. En la ecuación (3) obtenemos $4(40 + 5(35) = 335$, o $335 = 335$. En la ecuación (4) obtenemos $9(40) + 14(35) = 850$, o bien, $850 = 850$. Por tanto, la solución es

$$x = 40 \quad \text{y} \quad y = 35.$$

Cada día el administrador debe planear la fabricación de 40 productos del modelo A y 35 del modelo B. El procedimiento efectuado se conoce como **eliminación por adición.** Aunque elegimos eliminar primero x, pudimos haber hecho lo mismo para y, mediante un procedimiento similar.

Principios en práctica 1

Método de eliminación por adición

Un especialista en computadoras tiene invertidos $200,000 para su retiro, parte al 9% y parte al 8%. Si el ingreso anual total por las inversiones es de $17,200, ¿cuánto está invertido en cada tasa?

EJEMPLO 1 Método de eliminación por adición

Utilizar eliminación por adición para resolver el sistema.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, \\ 3y + 2x = 3. \end{cases}$$

Solución: por conveniencia alineamos los términos en x y en y para obtener

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, & (9) \\ 2x + 3y = 3. & (10) \end{cases}$$

Para eliminar y, multiplicamos la ecuación (9) por 3 y la ecuación (10) por 4:

$$\begin{cases} 9x - 12y = 39, & (11) \\ 8x + 12y = 12. & (12) \end{cases}$$

Sumando la ecuación (11) a la (12) se obtiene $17x = 51$, de la cual $x = 3$. Tenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} 9x - 12y = 39, & (13) \\ x = 3. & (14) \end{cases}$$

Al remplazar x por 3 en la ecuación (13) se obtiene

$$9(3) - 12y = 39,$$
$$-12y = 12,$$
$$y = -1,$$

de modo que el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} y = -1, \\ x = 3. \end{cases}$$

La solución es $x = 3$ y $y = -1$. La figura 4.31 muestra una gráfica del sistema.

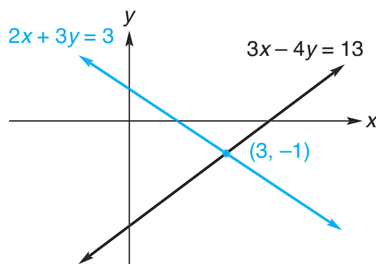


FIGURA 4.31 Sistema lineal del ejemplo 1; una solución.

El sistema del ejemplo 1,

$$\begin{cases} 3x - 4y = 13, & (15) \\ 2x + 3y = 3, & (16) \end{cases}$$

puede resolverse de otra manera. Primero elegimos una de las ecuaciones, por ejemplo, la ecuación (15), y despejamos una de las incógnitas en términos de la otra, digamos x en términos de y. Así la ecuación (15) es equivalente a $3x = 4y + 13$, o

$$x = \frac{4}{3}y + \frac{13}{3},$$

y obtenemos

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3}y + \frac{13}{3}, & (17) \\ 2x + 3y = 3. & (18) \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x de la ecuación (17) en la ecuación (18) se obtiene

$$2\left(\frac{4}{3}y + \frac{13}{3}\right) + 3y = 3. \quad (19)$$

De este modo ya eliminamos x. Resolviendo la ecuación (19), tenemos

$$\frac{8}{3}y + \frac{26}{3} + 3y = 3,$$

$$8y + 26 + 9y = 9 \qquad \text{(eliminando fracciones),}$$

$$17y = -17,$$

$$y = -1.$$

Al remplazar y en la ecuación (17) por -1, se obtiene $x = 3$, y el sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = -1, \end{cases}$$

como vimos antes, este método se llama **eliminación por sustitución.**

Principios en práctica 2

Método de eliminación por sustitución

A dos especies de ciervos, A y B, que viven en un refugio de vida salvaje se les da alimento extra en invierno. Cada semana reciben 2 toneladas de alimento en forma de croqueta y 4.75 toneladas de heno. Cada ciervo de la especie A requiere 4 libras de croquetas y 5 libras de heno. Cada ciervo de la especie B requiere 2 libras de las croquetas y 7 libras de heno. ¿Cuántos ciervos de cada especie se podrán sustentar con el alimento, de modo que todo el alimento se consuma cada semana?

EJEMPLO 2 Método de eliminación por sustitución

Utilizar eliminación por sustitución para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0, \\ 2x + 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

Solución: es fácil resolver la primera ecuación para x. Esto da el sistema equivalente

$$\begin{cases} x = -2y + 8, & (20) \\ 2x + 4y + 4 = 0. & (21) \end{cases}$$

Al sustituir $-2y + 8$ por x en la ecuación (21) se obtiene

$$2(-2y + 8) + 4y + 4 = 0,$$

$$-4y + 16 + 4y + 4 = 0.$$

Esta última ecuación se simplifica a $20 = 0$. Por tanto, tenemos el sistema

$$\begin{cases} x = -2y + 8, & (22) \\ 20 = 0. & (23) \end{cases}$$

Ya que le ecuación (23) *nunca* es verdadera, **no existe solución** para el sistema original. La razón es clara si observamos que las ecuaciones originales pueden escribirse en la forma pendiente-ordenada al origen como

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

y

$$y = -\frac{1}{2}x - 1.$$

Estas ecuaciones representan líneas rectas que tienen pendientes de $-\frac{1}{2}$, pero diferentes intersecciones y, 4 y -1. Esto es, especifican rectas paralelas diferentes (véase la fig. 4.32).

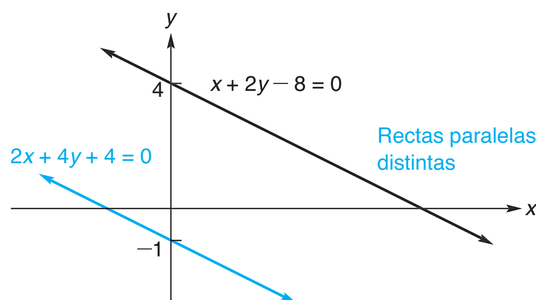


FIGURA 4.32 Sistema lineal del ejemplo 2; no hay solución.

> ***Principios en práctica 3***
> **Un sistema lineal con un número infinito de soluciones**
>
> Dos especies de peces, A y B, están criándose en una granja piscícola, en donde se les alimenta con dos suplementos vitamínicos. Todos los días reciben 100 gramos del primer suplemento y 200 gramos del segundo suplemento. Cada pez de la especie A requiere 15 mg del primer suplemento y 30 mg del segundo suplemento. Cada pez de la especie B requiere 20 mg del primer suplemento y 40 mg del segundo suplemento. ¿Cuántos peces de cada especie puede sustentar la granja de modo que todos los suplementos se consuman cada día?

EJEMPLO 3 Un sistema lineal con un número infinito de soluciones

Resolver

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & \textbf{(24)} \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y = 1. & \textbf{(25)} \end{cases}$$

Solución: empezamos eliminando x de la segunda ecuación. Multiplicando la ecuación (25) por -2, tenemos

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & \textbf{(26)} \\ -x - 5y = -2. & \textbf{(27)} \end{cases}$$

Sumando la ecuación (26) a la (27) se obtiene

$$\begin{cases} x + 5y = 2, & \textbf{(28)} \\ 0 = 0. & \textbf{(29)} \end{cases}$$

Puesto que la ecuación (29) *siempre* es cierta, cualquier solución de la ecuación (28) es una solución del sistema. Ahora veamos cómo podemos expresar nuestra respuesta. De la ecuación (28) tenemos $x = 2 - 5y$, donde y puede ser cualquier número real, digamos r. Por tanto, podemos escribir $x = 2 - 5r$. La solución completa es

$$x = 2 - 5r,$$
$$y = r,$$

donde r es cualquier número real. En esta situación, r se denomina un **parámetro,** y decimos que tenemos una familia de soluciones con un parámetro. Cada valor de r determina una solución particular. Por ejemplo, si $r = 0$, entonces $x = 2$ y $y = 0$, es una solución; si $r = 5$, entonces $x = -23$ y $y = 5$ es otra solución. Es claro que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Es útil notar que al escribir las ecuaciones (24) y (25) en sus formas pendientes-intersección al origen, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}, \\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}, \end{cases}$$

en el que ambas ecuaciones representan a la misma recta. De aquí que las rectas coincidan (véase la fig. 4.33) y las ecuaciones (24) y (25) sean equivalentes. La solución al sistema consiste en las parejas de coordenadas de todos los

puntos sobre la recta $x + 5y = 2$, puntos que están dados por nuestra solución paramétrica.

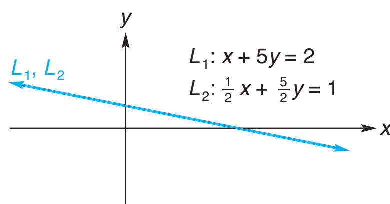


FIGURA 4.33 Sistema lineal del ejemplo 3; un número infinito de soluciones.

Tecnología

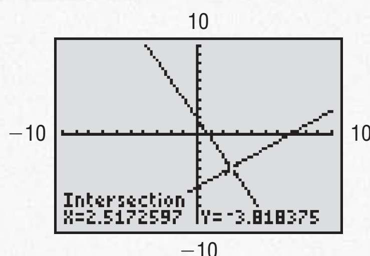


FIGURA 4.34 Solución gráfica del sistema.

Resolver de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} 9x + 4.1y = 7, \\ 2.6x - 3y = 18. \end{cases}$$

Solución: primero resolvemos cada ecuación para y de modo que cada ecuación tenga la forma $y = f(x)$.

$$y = \frac{1}{4.1}(7 - 9x),$$

$$y = -\frac{1}{3}(18 - 2.6x).$$

Ahora introducimos estas funciones como Y_1 y Y_2, y las desplegamos sobre el mismo rectángulo de visualización (véase la fig. 4.34). Por último, ya sea utilizando la característica de trazado y acercamiento, o bien, la de intersección, estimamos la solución como $x = 2.52$ $y = -3.82$.

EJEMPLO 4 Mezcla

Un fabricante de productos químicos debe surtir una orden de 500 litros de solución de ácido al 25% (25% del volumen es ácido). Si en existencia hay disponibles soluciones al 30% y al 18%, ¿cuántos litros de cada una debe mezclar para surtir el pedido?

Solución: sean x y y, respectivamente, el número de litros de las soluciones al 30% y 18% que deben mezclarse. Entonces

$$x + y = 500.$$

Para ayudar a visualizar la situación, dibujamos el diagrama en la figura 4.35. En 500 litros de una solución al 25%, habrá $0.25(500) = 125$ litros de ácido. Este ácido proviene de dos fuentes: $0.30x$ litros de la solución al 30% y $0.18y$ litros provienen de la solución al 18%. De aquí que,

$$0.30x + 0.18y = 125.$$

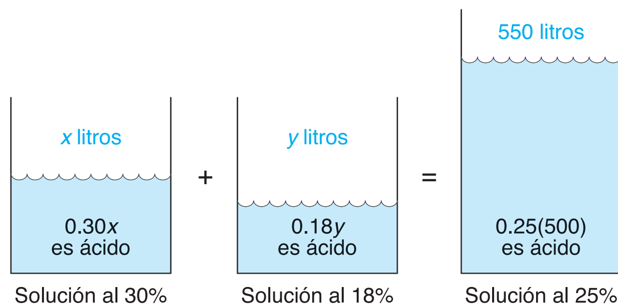


FIGURA 4.35 Problema de la mezcla.

Estas dos ecuaciones forman un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Si resolvemos la primera para x obtenemos $x = 500 - y$. Sustituyendo en la segunda se obtiene

$$0.30(500 - y) + 0.18y = 125.$$

Resolviendo ésta para y, encontramos que $y = 208\frac{1}{3}$ litros. Así $x = 500 - 208\frac{1}{3} = 291\frac{2}{3}$ litros (véase la fig. 4.36).

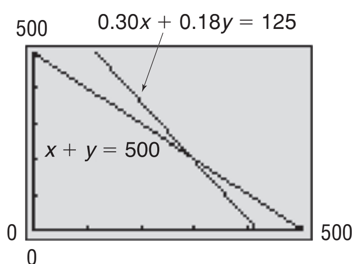


FIGURA 4.36 Gráfica para el ejemplo 4.

Sistemas con tres variables

Los métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos variables también pueden utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres variables. Una **ecuación lineal general con tres variables x, y y z** es una ecuación que tiene la forma

$$Ax + By + Cz = D,$$

donde A, B, C y D son constantes y A, B y C no son todas cero. Por ejemplo, $2x - 4y + z = 2$ es una de tales ecuaciones. Una ecuación lineal general con tres variables representa geométricamente un *plano* en el espacio, y una solución al sistema de tales ecuaciones es la intersección de los planos. El ejemplo 5 muestra cómo resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables.

Principios en práctica 4

Resolución de un sistema lineal de tres variables

Una cafetería se especializa en mezclas de café. Con base en café de tipo A, tipo B y tipo C, el dueño quiere preparar una mezcla que venderá en \$8.50 por una bolsa de una libra. El costo por libra de estos cafés es de \$12, \$9 y \$7, respectivamente. La cantidad del tipo B debe ser el doble de la cantidad del tipo A. ¿Cuánto café de cada tipo estará en la mezcla final?

EJEMPLO 5 Resolución de un sistema lineal con tres variables

Resolver

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3, & (30) \\ -x + 2y + 2z = 1, & (31) \\ x - y - 3z = -6. & (32) \end{cases}$$

Solución: este sistema está constituido por tres ecuaciones lineales con tres variables. De la ecuación (32), $x = y + 3z - 6$. Sustituyendo este valor para x en las ecuaciones (30) y (31), obtenemos

$$\begin{cases} 2(y + 3z - 6) + y + z = 3, \\ -(y + 3z - 6) + 2y + 2z = 1, \\ x = y + 3z - 6. \end{cases}$$

Simplificando, se obtiene

$$\begin{cases} 3y + 7z = 15, & (33) \\ y - z = -5, & (34) \\ x = y + 3z - 6. & (35) \end{cases}$$

Observe que x no aparece en las ecuaciones (33) y (34). Puesto que cualquier solución del sistema original debe satisfacer las ecuaciones (33) y (34), primero debemos considerar su solución:

$$\begin{cases} 3y + 7z = 15, & (33) \\ y - z = -5. & (34) \end{cases}$$

De la ecuación (34), $y = z - 5$. Esto significa que podemos remplazar la ecuación (33) por

$$3(z - 5) + 7z = 15, \quad \text{o} \quad z = 3.$$

Como z es 3, podemos remplazar la ecuación (34) por $y = -2$. De aquí que el sistema anterior sea equivalente a

$$\begin{cases} z = 3, \\ y = -2. \end{cases}$$

El sistema original se transforma en

$$\begin{cases} z = 3, \\ y = -2, \\ x = y + 3z - 6, \end{cases}$$

de lo cual $x = 1$. La solución es $x = 1$, $y = -2$, y $z = 3$, que usted puede verificar.

Al igual que un sistema de dos variables puede tener una familia de soluciones con un parámetro, un sistema con tres variables puede tener una familia de soluciones con uno o dos parámetros.[6] Los dos ejemplos siguientes lo ilustran.

EJEMPLO 6 Familia de soluciones con un parámetro

Resolver

$$\begin{cases} x - 2y = 4, & (35) \\ 2x - 3y + 2z = -2, & (36) \\ 4x - 7y + 2z = 6. & (37) \end{cases}$$

Solución: observe que, ya que la ecuación (35) puede escribirse como $x - 2y + 0z = 4$, podemos considerar a las ecuaciones (35) a (37) como un sistema de tres ecuaciones lineales en las variables x, y y z. De la ecuación (35) tenemos $x = 2y + 4$. Podemos emplear esta ecuación y el método de sustitución para eliminar x de las ecuaciones (36) y (37):

$$\begin{cases} x = 2y + 4, \\ 2(2y + 4) - 3y + 2z = -2, \\ 4(2y + 4) - 7y + 2z = 6. \end{cases}$$

[6]Nota para el profesor: los ejemplos 6 y 7 pueden omitirse sin pérdida de continuidad.

O de manera más sencilla,

$$\begin{cases} x = 2y + 4, & (38) \\ y + 2z = -10, & (39) \\ y + 2z = -10. & (40) \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación (40) por -1 se obtiene

$$\begin{cases} x = 2y + 4, \\ y + 2z = -10, \\ -y - 2z = 10. \end{cases}$$

Sumando la segunda ecuación a la tercera se obtiene

$$\begin{cases} x = 2y + 4, \\ y + 2z = -10, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Como la ecuación $0 = 0$ siempre es verdadera, en esencia podemos tratar con el sistema

$$\begin{cases} x = 2y + 4, & (41) \\ y + 2z = -10. & (42) \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación (42) para y, tenemos

$$y = -10 - 2z,$$

que expresa a y en términos de z. También podemos expresar a x en términos de z. De la ecuación (41),

$$\begin{aligned} x &= 2y + 4 \\ &= 2(-10 - 2z) + 4 \\ &= -16 - 4z. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{cases} x = -16 - 4z, \\ y = -10 - 2z. \end{cases}$$

Como no hay restricciones sobre z, esto sugiere una familia de soluciones paramétricas. Haciendo $z = r$, tenemos la familia de soluciones siguiente para el sistema dado:

$$\begin{aligned} x &= -16 - 4r, \\ y &= -10 - 2r, \\ z &= r, \end{aligned}$$

Son posibles otras representaciones paramétricas de la solución.

donde r puede ser cualquier número real. Entonces, vemos que el sistema dado tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo, haciendo $r = 1$ se obtiene la solución particular $x = -20$, $y = -12$ y $z = 1$.

EJEMPLO 7 Familia de soluciones con dos parámetros

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 2x + 4y + 2z = 8. \end{cases}$$

Solución: éste es un sistema de dos ecuaciones lineales con tres variables. Eliminaremos x de la segunda ecuación multiplicándola primero por $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ -x - 2y - z = -4. \end{cases}$$

Sumando la primera ecuación a la segunda se obtiene

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación, obtenemos

$$x = 4 - 2y - z.$$

Como no existe restricción sobre y o z, éstos pueden ser números reales arbitrarios, lo que nos da una familia de soluciones con dos parámetros. Haciendo $y = r$ y $z = s$, encontramos que la solución del sistema es

$$x = 4 - 2r - s,$$

$$y = r,$$

$$z = s,$$

donde r y s pueden ser cualesquiera números reales. Cada asignación de valores a r y a s da una solución del sistema, de modo que existe un número infinito de soluciones. Por ejemplo, haciendo $r = 1$ y $s = 2$ se obtiene la solución particular $x = 0$, $y = 1$ y $z = 2$.

Ejercicio 4.4

En los problemas del 1 al 24 resuelva algebraicamente los sistemas.

1. $\begin{cases} x + 4y = 3, \\ 3x - 2y = -5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + 2y = 9, \\ 5y - 4x = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - 4y = 13, \\ 2x + 3y = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ -x + 2y = 7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5v + 2w = 36, \\ 8v - 3w = -54. \end{cases}$

6. $\begin{cases} -p - q = -3, \\ 3p + 2q = 19. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - 2y = -7, \\ 5x + 3y = -9. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x + 5y = 7, \\ 5x + 9y = 7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x - 3y - 2 = 3x - 7y, \\ x + 5y - 2 = y + 4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x + 7y + 2 = 9y - 4x + 6, \\ \frac{21}{2}x - \frac{4}{3}y - \frac{11}{4} = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y + \frac{5}{4}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 2, \\ \frac{3}{8}x + \frac{5}{6}y = -\frac{11}{2}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}w = \frac{1}{6}, \\ z + \frac{1}{2}w = \frac{2}{3}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4p + 12q = 6, \\ 2p + 6q = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5x - 3y = 2, \\ -10x + 6y = 4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x + y + 6z = 3, \\ x - y + 4z = 1, \\ 3x + 2y - 2z = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y + z = -1, \\ 3x + y + z = 1, \\ 4x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 5x - 7y + 4z = 2, \\ 3x + 2y - 2z = 3, \\ 2x - y + 3z = 4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ -2x + y - 3z = 15, \\ \frac{3}{2}x + \frac{4}{5}y + 4z = 10. \end{cases}$

[7]**19.** $\begin{cases} x - 2z = 1, \\ y + z = 3. \end{cases}$

[7]**20.** $\begin{cases} 2y + 3z = 1, \\ 3x - 4z = 0. \end{cases}$

[7]**21.** $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$

[7]**22.** $\begin{cases} x - 2y - z = 0, \\ 2x - 4y - 2z = 0, \\ -x + 2y + z = 0. \end{cases}$

[7]**23.** $\begin{cases} 2x + 2y - z = 3, \\ 4x + 4y - 2z = 6. \end{cases}$

[7]**24.** $\begin{cases} x + 2y - 3z = -4, \\ 2x + y - 3z = 4. \end{cases}$

[7]Hace referencia a los conceptos de los ejemplos 6 y 7.

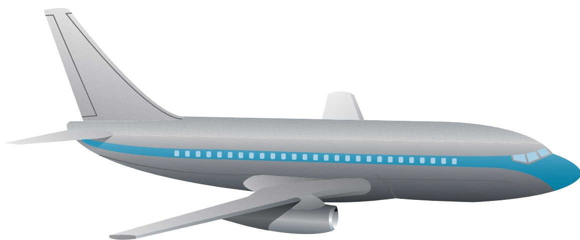
25. Mezcla Un fabricante de productos químicos desea surtir un pedido de 700 galones de una solución de ácido al 24%. En existencia tiene soluciones al 20% y 30%. ¿Cuántos galones de cada solución debe mezclar para surtir el pedido?

26. Mezcla Un jardinero tiene dos fertilizantes que contienen diferentes concentraciones de nitrógeno. Uno tiene 3% de nitrógeno y el otro tiene 11% de nitrógeno. ¿Cuántas libras de cada fertilizante debe mezclar para obtener 20 libras con una concentración de 9%?

27. Tejidos Una fábrica de tejidos produce un tejido hecho a partir de diferentes fibras. Con base en algodón, poliéster y nylon, el propietario necesita producir un tejido combinado que cueste $3.25 por libra fabricada. El costo por libra de estas fibras es de $4.00, $3.00 y $2.00, respectivamente. La cantidad de nylon debe ser la misma que la cantidad de poliéster. ¿Cuánto de cada fibra debe tener el tejido final?

28. Impuesto Una compañía tiene ingresos gravables por $312,000. El impuesto federal es el 25% de la parte que queda después que el impuesto estatal ha sido pagado. El impuesto estatal es un 10% de la parte que queda después que el federal ha sido pagado. Encuentre los impuestos federal y estatal.

29. Velocidad de un aeroplano Un aeroplano recorre 900 millas en 3 horas con viento a favor. Le toma 3 horas 36 minutos el viaje de regreso volando en contra del viento. Encuentre la velocidad del aeroplano sin viento, calcule también la velocidad del viento.

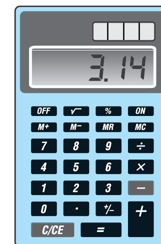


30. Velocidad de una balsa En un viaje en balsa tomó $\frac{3}{4}$ de hora recorrer 12 millas río abajo. El viaje de regreso tomó $1\frac{1}{2}$ horas. Encuentre la velocidad de la balsa con el agua en calma, y calcule la velocidad de la corriente.

31. Venta de muebles Un fabricante de comedores produce dos estilos, Early American y Contemporáneo. Por su experiencia, el administrador ha determinado que pueden venderse 20% más comedores Early American que Contemporáneo. En cada venta de un Early American hay una utilidad de $250, mientras que se gana $350 en cada Contemporáneo. Si en el año próximo, el administrador desea una ganancia total de $130,000, ¿cuántas unidades de cada estilo deben venderse?

32. Encuesta A Encuestas Nacionales se le concedió un contrato para realizar una encuesta de preferencia de producto para Crispy Crackers. Un total de 250 personas fueron entrevistadas. Encuestas Nacionales reportó que a 62.5% más de las personas les gustaba Crispy Crakers que a las que no les gustaba. Sin embargo, el reporte no indicó que el 16% de las personas entrevistadas no habían contestado. ¿A cuántas de las personas entrevistadas les gustó Crispy Crakers? ¿A cuántas no? ¿Cuántas no contestaron?

33. Costo de igualación Productos Unidos, S. A., fabrica calculadoras y tiene plantas en las ciudades de Exton y Whyton. En la planta de Exton, los costos fijos son de $7000 por mes, y el costo de producir cada calculadora es de $7.50. En la planta de Whyton, los costos fijos son de $8800 por mes y cada calculadora cuesta $6 producirla. Si el mes siguiente, Productos Unidos debe producir 1500 calculadoras, ¿cuántas debe producir cada planta si el costo total en cada una debe ser el mismo?



34. Mezcla de café Un comerciante de café mezcla tres tipos de café que cuestan $2.20, $2.30 y $2.60 por libra, para obtener 100 lb de café que vende a $2.40 por libra. Si utiliza la misma cantidad de los dos cafés más caros, ¿cuánto de cada tipo debe utilizar en la mezcla?

35. Comisiones Una compañía paga a sus agentes de ventas con base en un porcentaje de los primeros $100,000 en ventas, más otro porcentaje sobre cualquier cantidad que rebase esos $100,000. Si un agente recibió $8500 por ventas de $175,000, y otro recibió $14,800 por ventas de $280,000, encuentre los dos porcentajes.

36. Utilidades anuales En reportes financieros, las utilidades de una compañía en el año actual (T) con frecuencia son comparadas con las del año anterior (L), pero los valores reales de T y L no siempre son dados. Este año una compañía tuvo una utilidad de $20 millones más que el año pasado. Las utilidades fueron 25% mayores. A partir de estos datos determine T y L.

37. Producción La compañía Controles Universales fabrica unidades de control. Sus modelos nuevos son el Argón I y el Argón II. Para fabricar cada unidad de Argón I, usan 6 medidores y 3 controladores. Para fabricar cada unidad de Argón II, usan 10 medidores y 8 controladores. La compañía recibe un total de 760 medidores y 500 controladores diarios de sus proveedores. ¿Cuántas unidades de cada modelo puede producir diariamente? Suponga que se utilizan todas las partes.

38. Inversiones Una persona tiene dos inversiones y el porcentaje de ganancia por año en cada una de ellas es el mismo. Del total de la cantidad invertida $\frac{3}{10}$ de ella más $600 se invirtieron en una empresa de riesgo, y al final de un año la persona recibió un rendimiento de $384 de esa empresa. Si el rendimiento total después

de un año fue de $1120, encuentre la cantidad total invertida.

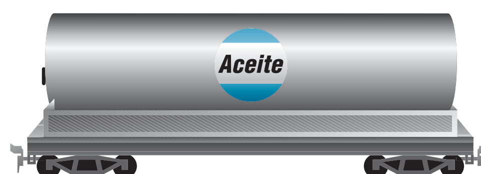
39. Producción Una compañía produce tres tipos de muebles para patio: sillas, mecedoras y sillones reclinables. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, como se indica en la tabla siguiente. La compañía tiene en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1500 unidades de aluminio. Para la corrida de fin de temporada, la compañía quiere utilizar todas sus existencias. Para hacer esto, ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones debe fabricar?

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sillón reclinable	1 unidad	2 unidades	5 unidades

40. Inversiones Un total de $35,000 se invirtieron a tres tasas de interés: 7, 8 y 9%. El interés en el primer año fue de $2830, que no se reinvirtió. El segundo año la cantidad originalmente invertida al 9% devengó un 10%, y las otras tasas permanecieron iguales. El interés total en el segundo año fue de $2960. ¿Cuánto se invirtió a cada tasa?

41. Contratación de trabajadores Una compañía paga a sus trabajadores calificados $15 por hora en su departamento de ensamblado. Los trabajadores semicalificados en ese departamento ganan $9 por hora. A los empleados de envíos se les paga $10 por hora. A causa de un incremento en los pedidos, la compañía necesita contratar un total de 70 trabajadores en los departamentos de ensamblado y envíos. Pagará un total de $760 por hora a estos empleados. A causa de un contrato con el sindicato, deben emplearse el doble de trabajadores semicalificados que de trabajadores calificados. ¿Cuántos trabajadores semicalificados, calificados y empleados de envíos debe contratar la compañía?

42. Almacenamiento de un disolvente Un tanque de ferrocarril de 10,000 galones se llenará con disolvente de dos tanques de almacenamiento, A y B. El disolvente de A se bombea a una velocidad de 20 gal/min. El disolvente B se bombea a una velocidad de 30 gal/min. En general, ambas bombas operan al mismo tiempo. Sin embargo, a causa de un fusible fundido la bomba en A estuvo sin funcionar 10 minutos. ¿Cuántos galones de cada tanque de almacenamiento se utilizarán para llenar el tanque del ferrocarril?



43. Verifique su respuesta al problema 1 utilizando su calculadora gráfica.

44. Verifique su respuesta al problema 11 utilizando su calculadora gráfica.

45. Resuelva de manera gráfica el sistema.

$$\begin{cases} 0.24x - 0.34y = 0.04, \\ 0.11x + 0.21y = 0.75. \end{cases}$$

46. Resuelva de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ \frac{1}{4}x + \frac{2}{5}y = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Redondee los valores de x y y a dos decimales.

47. Resuelva de manera gráfica el sistema

$$\begin{cases} 0.5736x - 0.3420y = 0, \\ 0.8192x + 0.9397y = 20. \end{cases}$$

Redondee los valores de x y y a un decimal.

OBJETIVO Utilizar la sustitución para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

4.5 SISTEMAS NO LINEALES

Un sistema de ecuaciones en el que al menos una ecuación es no lineal se llama **sistema no lineal.** Con frecuencia podemos resolver un sistema no lineal por sustitución, como se hizo con los sistemas lineales. Los ejemplos siguientes lo ilustran.

EJEMPLO 1 Solución de un sistema no lineal

Resolver

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y - 7 = 0, & (1) \\ 3x - y + 1 = 0. & (2) \end{cases}$$

Solución:

> **Estrategia:** si un sistema no lineal contiene una ecuación lineal, en general despejamos una de las variables de la ecuación lineal y sustituimos esa variable en la otra ecuación.

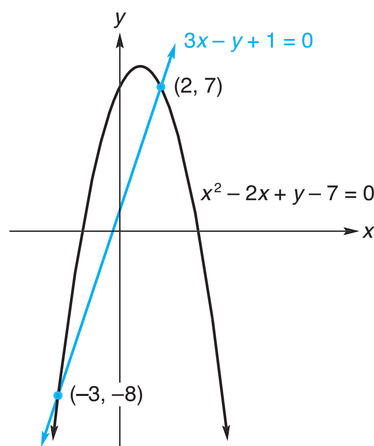


FIGURA 4.37 Sistema de ecuaciones no lineales.

Si resolvemos la ecuación (2) para y se obtiene

$$y = 3x + 1. \tag{3}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) y simplificando, tenemos

$$x^2 - 2x + (3x + 1) - 7 = 0,$$
$$x^2 + x - 6 = 0,$$
$$(x + 3)(x - 2) = 0,$$
$$x = -3 \quad \text{o} \quad x = 2.$$

Si $x = -3$, entonces la ecuación (3) implica que $y = -8$; si $x = 2$, entonces $y = 7$. Debe verificar que cada pareja de valores satisfaga el sistema dado. De aquí que las soluciones sean $x = -3, y = -8$ y $x = 2, y = 7$. La solución geométrica se presenta en la gráfica del sistema de la figura 4.37. Observe que la gráfica de la ecuación (1) es una parábola y la de la ecuación (2) una recta. Las soluciones corresponden a los puntos de intersección $(-3, -8)$ y $(2, 7)$.

Este ejemplo ilustra la necesidad de verificar todas las “soluciones”.

EJEMPLO 2 Resolución de un sistema no lineal

Resolver

$$\begin{cases} y = \sqrt{x + 2}, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Solución: al resolver la segunda ecuación, que es lineal, para y se obtiene

$$y = 4 - x. \tag{4}$$

Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene

$$4 - x = \sqrt{x + 2},$$
$$16 - 8x + x^2 = x + 2 \qquad \text{(elevando al cuadrado ambos lados),}$$
$$x^2 - 9x + 14 = 0,$$
$$(x - 2)(x - 7) = 0.$$

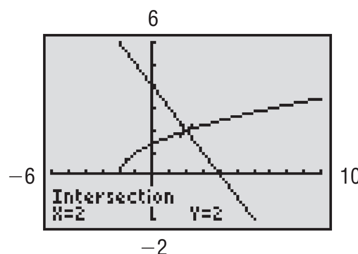


FIGURA 4.38 Sistema no lineal del ejemplo 2.

Por tanto, $x = 2$ o $x = 7$. De la ecuación (4), si $x = 2$, entonces $y = 2$; si $x = 7$, entonces $y = -3$. Puesto que realizamos la operación de elevar al cuadrado en ambos miembros, debemos verificar nuestros resultados. Mientras que la pareja $x = 2$ y $y = 2$ satisface ambas ecuaciones originales, éste no es el caso para $x = 7$ y $y = -3$. Por tanto, la solución es $x = 2, y = 2$ (véase la fig. 4.38).

Tecnología

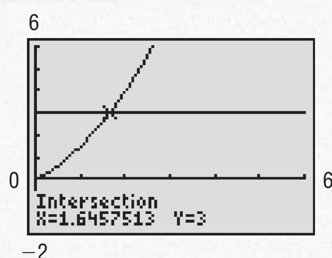


FIGURA 4.39 Solución de $0.5x^2 + x = 3$.

Resolver gráficamente la ecuación $0.5x^2 + x = 3$*, donde* $x \geq 0$.

Solución: para resolver la ecuación, podríamos encontrar los ceros de la función $f(x) = 0.5x^2 + x - 3$. De manera alterna, podemos pensar en este problema como la solución del sistema no lineal

$$y = 0.5x^2 + x,$$

$$y = 3.$$

En la figura 4.39, se estima que el punto de intersección es $x = 1.65$, $y = 3$. Observe que la gráfica de $y = 3$ es una recta horizontal. La solución de la ecuación dada es $x = 1.65$.

Ejercicio 4.5

En los problemas del 1 al 14 resuelva el sistema no lineal dado.

1. $\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ 3x + y = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = x^3, \\ x - y = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} p^2 = 5 - q, \\ p = q + 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y^2 - x^2 = 28, \\ x - y = 14. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = y^2, \\ y = x^2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} p^2 - q = 0, \\ 3q - 2p - 1 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = 4x - x^2 + 8, \\ y = x^2 - 2x. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 - y = 8, \\ y - x^2 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} p = \sqrt{q}, \\ p = q^2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} z = 4/w, \\ 3z = 2w + 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 = y^2 + 13, \\ y = x^2 - 15. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 1, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = y + 6, \\ y = 3\sqrt{x + 4}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{x - 1} + 1, \\ y = \dfrac{1}{x - 1}. \end{cases}$

15. Decoración La forma de una serpentina suspendida por encima de una pista de baile, puede describirse por medio de la función $y = 0.01x^2 + 0.01x + 7$, en donde y es la altura de la serpentina (en pies) por encima del piso, y x es la distancia horizontal (en pies) desde el centro del salón. Una cuerda descrita por medio de la función $y = 0.01x + 8.0$, y que sujeta otra decoración toca a la serpentina. ¿En dónde toca la cuerda a la serpentina?

16. Marquesina La forma de una marquesina decorativa sobre una fachada puede describirse por medio de la función $y = 0.06x^2 + 0.012x + 8$, en donde y es la altura del borde de la marquesina (en pies) por encima de la acera, y x es la distancia (en pies) medida desde el centro del portal de la tienda. Un vándalo mete un palo a través de la marquesina, perforando en dos lugares. La posición del palo puede describirse por medio de la función $y = 0.912x + 5$. ¿En qué parte de la marquesina están los agujeros que hizo el vándalo?

17. Determine de manera gráfica, el número de soluciones que tiene el sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x}, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$$

18. Resuelva en forma gráfica el sistema

$$\begin{cases} y = x^3, \\ y = 6 - x^2 \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

19. Resuelva en forma gráfica el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1, \\ y = x^3 + x^2 - 2x + 3 \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

20. Resuelva en forma gráfica el sistema

$$\begin{cases} y = x^3 - x, \\ y = 4x \end{cases}$$

con un decimal de precisión.

En los problemas del 21 al 23 resuelva gráficamente la ecuación tratándola como un sistema. Redondee las respuestas a dos decimales.

21. $0.8x^2 + 2x = 6$, donde $x \geq 0$.

22. $\sqrt{x + 2} = 5 - x$.

23. $x^3 - 3x^2 = x - 8$.

OBJETIVO Resolver sistemas que describen situaciones de equilibrio y puntos de equilibrio.

4.6 Aplicaciones de sistemas de ecuaciones

Equilibrio

Recuerde de la sección 4.2 que una ecuación que relaciona el precio por unidad y la cantidad demandada (suministrada), se llama *ecuación de demanda* (*ecuación de oferta*). Suponga que para un producto Z la ecuación de demanda es

$$p = -\frac{1}{180}q + 12 \qquad (1)$$

y la ecuación de oferta es

$$p = \frac{1}{300}q + 8, \qquad (2)$$

donde $q, p \geq 0$. Las correspondientes curvas de demanda y oferta son las líneas de las figuras 4.40 y 4.41, respectivamente. Al analizar la figura 4.40, vemos que los clientes comprarán 540 unidades por semana cuando el precio sea de \$9 por unidad, 1080 unidades cuando el precio sea \$6 y así sucesivamente. La figura 4.41 muestra que cuando el precio es de \$9 por unidad, los productores colocarán 300 unidades por semana en el mercado, a \$10 colocarán 600 unidades, y así sucesivamente.

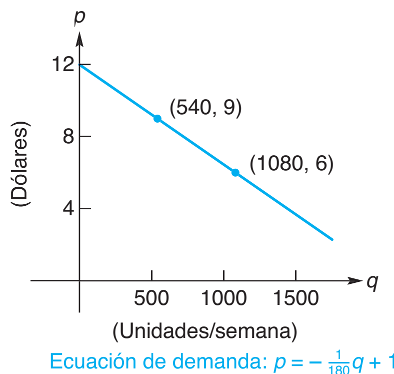


FIGURA 4.40 Curva de demanda.

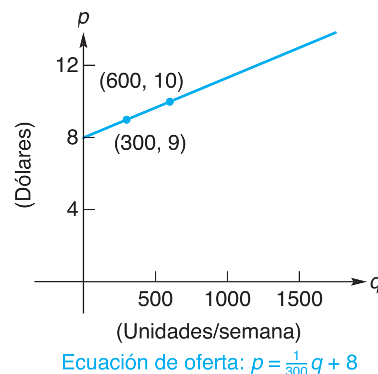


FIGURA 4.41 Curva de oferta.

Cuando las curvas de demanda y oferta de un producto se representan en el mismo plano de coordenadas, el punto (m, n) en donde las curvas se intersecan

se llama **punto de equilibrio** (véase la fig. 4.42). El precio, n, llamado **precio de equilibrio,** es el precio al que los consumidores comprarán la misma cantidad de un producto, que los productores ofrezcan a ese precio. En resumen, n es el precio en que se da una estabilidad entre productor y consumidor. La cantidad m se llama **cantidad de equilibrio.**

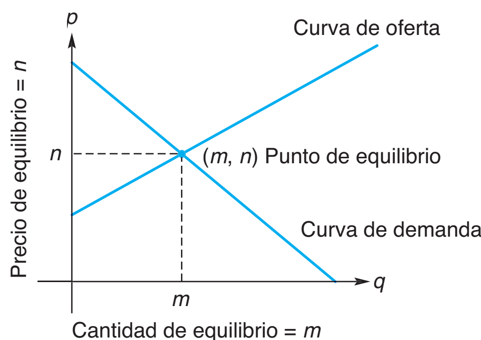


FIGURA 4.42 Equilibrio.

Para determinar con precisión el punto de equilibrio, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de oferta y demanda. Hagamos esto para los datos anteriores, es decir, el sistema

$$\begin{cases} p = -\dfrac{1}{180}q + 12 & \text{(ecuación de demanda),} \\ p = \dfrac{1}{300}q + 8 & \text{(ecuación de oferta).} \end{cases}$$

Sustituyendo p por $\frac{1}{300}q + 8$ en la ecuación de demanda, obtenemos

$$\frac{1}{300}q + 8 = -\frac{1}{180}q + 12,$$

$$\left(\frac{1}{300} + \frac{1}{180}\right)q = 4,$$

$$q = 450 \qquad \text{(cantidad de equilibrio).}$$

Por tanto,

$$p = \frac{1}{300}(450) + 8$$

$$= 9.50 \qquad \text{(precio de equilibrio),}$$

y el punto de equilibrio es (450, 9.50). Por tanto, al precio de \$9.50 por unidad, los fabricantes producirían exactamente la cantidad (450) de unidades por semana que los consumidores comprarían a ese precio (véase la fig. 4.43).

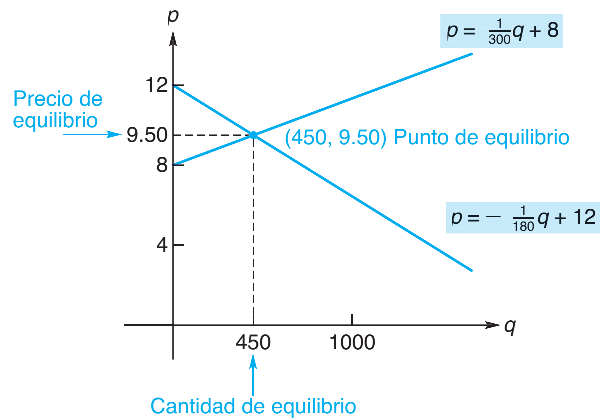


FIGURA 4.43 Equilibrio.

EJEMPLO 1 Efecto de los impuestos sobre el equilibrio

Sea $p = \frac{8}{100}q + 50$ *la ecuación de oferta para el producto de un fabricante y suponga que la ecuación de demanda es* $p = -\frac{7}{100}q + 65$.

a. *Si se cobra al fabricante un impuesto de* \$1.50 *por unidad, ¿cómo se afectará el precio de equilibrio original si la demanda permanece igual?*

Solución: antes del impuesto, el precio de equilibrio se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} p = \dfrac{8}{100}q + 50, \\ p = -\dfrac{7}{100}q + 65. \end{cases}$$

Por sustitución,

$$-\frac{7}{100}q + 65 = \frac{8}{100}q + 50,$$

$$15 = \frac{15}{100}q,$$

$$100 = q,$$

y

$$p = \frac{8}{100}(100) + 50 = 58.$$

Por tanto, \$58 es el precio de equilibrio original. Antes del impuesto el fabricante ofrecía q unidades a un precio de $p = \frac{8}{100}q + 50$ por unidad. Después del impuesto venderá las mismas q unidades con el \$1.50 adicional por unidad. El precio por unidad será $(\frac{8}{100}q + 50) + 1.50$, de modo que la nueva ecuación de oferta es

$$p = \frac{8}{100}q + 51.50.$$

La resolución del sistema

$$\begin{cases} p = \frac{8}{100}q + 51.50, \\ p = -\frac{7}{100}q + 65 \end{cases}$$

dará el nuevo precio de equilibrio:

$$\frac{8}{100}q + 51.50 = -\frac{7}{100}q + 65,$$

$$\frac{15}{100}q = 13.50,$$

$$q = 90,$$

$$p = \frac{8}{100}(90) + 51.50 = 58.70.$$

El impuesto de \$1.50 por unidad incrementó el precio de equilibrio en \$0.70 (véase la fig. 4.44). Observe que también existe una disminución en la cantidad de equilibrio, de $q = 100$ a $q = 90$, a causa del cambio en el precio de equilibrio (en los ejercicios se le pide que determine el efecto de un subsidio dado al fabricante, lo cual reducirá el precio del producto).

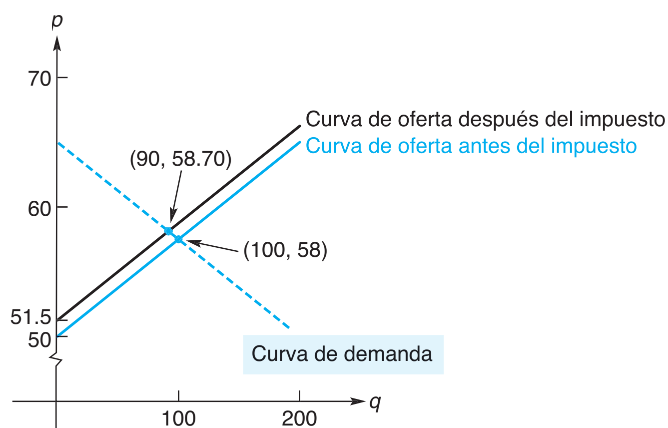


FIGURA 4.44 Equilibrio antes y después del impuesto.

b. *Determinar el ingreso total obtenido por el fabricante en el punto de equilibrio antes y después del impuesto.*

Solución: si se venden q unidades de un producto a un precio de p dólares cada una, entonces el ingreso total está dado por

$$y_{TR} = pq.$$

Antes del impuesto, el ingreso en (100, 58) es (en dólares)

$$y_{TR} = (58)(100) = 5800.$$

Después del impuesto es

$$y_{TR} = (58.70)(90) = 5283,$$

que es una disminución.

■

EJEMPLO 2 **Equilibrio con demanda no lineal**

Encontrar el punto de equilibrio si las ecuaciones de oferta y demanda de un producto son $p = \frac{q}{40} + 10$ *y* $p = \frac{8000}{q}$*, respectivamente.*

Solución: aquí la ecuación de demanda no es lineal. Al resolver el sistema

$$\begin{cases} p = \frac{q}{40} + 10, \\ p = \frac{8000}{q} \end{cases}$$

por sustitución se obtiene

$$\frac{8000}{q} = \frac{q}{40} + 10,$$

$$320{,}000 = q^2 + 400q \quad \text{(multiplicando ambos miembros por } 40q\text{)},$$

$$q^2 + 400q - 320{,}000 = 0,$$

$$(q + 800)(q - 400) = 0,$$

$$q = -800 \quad \text{o} \quad q = 400.$$

Descartamos $q = -800$, ya que q representa una cantidad. Eligiendo $q = 400$, tenemos $p = (8000/400) = 20$, de modo que el punto de equilibrio es $(400, 20)$. (Véase la fig. 4.45.)

■

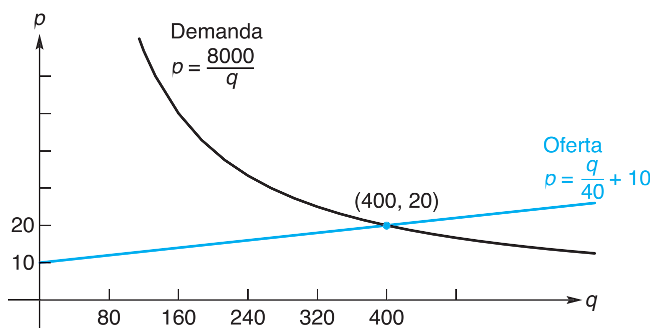


FIGURA 4.45 Equilibrio con demanda no lineal.

Puntos de equilibrio

Suponga que un fabricante produce un producto A y lo vende a \$8 por unidad. Entonces, el ingreso total y_{TR} recibido (en dólares) de la venta de q unidades es

$$y_{TR} = 8q \qquad \text{(ingreso total).}$$

La diferencia entre el ingreso total recibido por q unidades y el costo total de q unidades, es la utilidad del fabricante (o pérdida si es negativa):

$$\textbf{utilidad (o pérdida)} = \textbf{ingreso total} - \textbf{costo total.}$$

El **costo total,** y_{TR}, es la suma de los costos totales variables y_{VC}, y los costos totales fijos y_{FC}.

$$y_{TC} = y_{VC} + y_{FC}.$$

Los **costos fijos** son aquellos costos que bajo condiciones normales no dependen del nivel de producción; esto es, en algún periodo permanecen constantes en todos los niveles de producción (ejemplos son renta, salario de los oficinistas y mantenimiento normal). Los **costos variables** son los que varían con el nivel de producción (como el costo de materiales, salarios, mantenimiento debido al uso y desgaste, etc.). Suponga que, para q unidades de producto A,

$$y_{FC} = 5000 \qquad \text{(costo fijo)}$$

$$\text{y} \quad y_{VC} = \frac{22}{9}q \qquad \text{(costo variable).}$$

Entonces

$$y_{TC} = \frac{22}{9}q + 5000 \qquad \text{(costo total).}$$

Las gráficas del costo total y del ingreso total aparecen en la figura 4.46. El eje horizontal representa el nivel de producción, q, y el eje vertical representa el valor total, en dólares, del ingreso o del costo. El **punto de equilibrio** es el punto en que el ingreso total es igual al costo total (TR = TC); ocurre cuando los niveles de producción y de ventas tienen como resultado cero pérdidas y cero utilidades. En el diagrama, llamado *diagrama del punto de equilibrio*, está el punto (m, n), en el que las gráficas de $y_{TR} = 8q$ y $y_{TC} = \frac{22}{9}q + 5000$ se intersecan. Llamamos a m la **cantidad de equilibrio** y a n el **ingreso de equilibrio.** Cuando el costo total y el ingreso total están relacionados de manera lineal con la producción, como es nuestro caso, para cualquier nivel de producción mayor que m, el ingreso total es mayor que el costo total, lo que trae como resultado una utilidad. Sin embargo, en cualquier nivel menor de m unidades, el ingreso total es menor que el costo total, lo que trae como resultado una pérdida. Para una producción de m unidades la utilidad es cero. En el ejemplo siguiente examinaremos nuestros datos con mayor detalle.

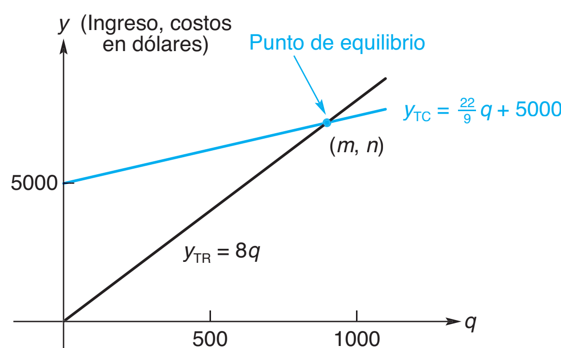


FIGURA 4.46 Diagrama de equilibrio.

EJEMPLO 3 Punto de equilibrio, utilidad y pérdida.

Un fabricante vende un producto a \$8 *por unidad, y vende todo lo que produce. El costo fijo es de* \$5000 *y el variable por unidad es de* $\frac{22}{9}$ *(dólares).*

a. *Encontrar la producción y el ingreso total en el punto de equilibrio.*

Solución: a un nivel de producción de q unidades, el costo variable es $y_{VC} = \frac{22}{9}q$ y el ingreso total es $y_{TR} = 8q$. De aquí que

$$y_{TR} = 8q,$$

$$y_{TC} = y_{VC} + y_{FC} = \frac{22}{9}q + 5000.$$

En el punto de equilibrio, el ingreso total es igual al costo total. Ahora resolvemos el sistema formado por las ecuaciones anteriores. Como

$$y_{TR} = y_{TC},$$

Tenemos

$$8q = \frac{22}{9}q + 5000,$$

$$\frac{50}{9}q = 5000,$$

$$q = 900.$$

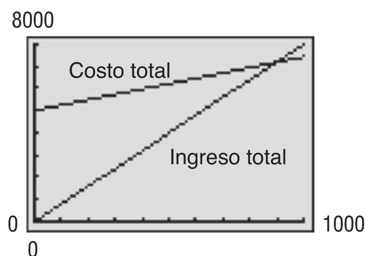


FIGURA 4.47 Punto de equilibrio (900, 7200).

Así que la producción deseada es de 900 unidades, lo que resulta en un ingreso total (en dólares) de

$$y_{TR} = 8(900) = 7200.$$

(Véase la fig. 4.47.)

b. *Encontrar la utilidad cuando se producen* 1800 *unidades.*

Solución: ya que utilidad = ingreso total − costo total, cuando $q = 1800$ tenemos

$$y_{TR} - y_{TC} = 8(1800) - \left[\frac{22}{9}(1800) + 5000\right]$$
$$= 5000.$$

La utilidad cuando se producen y venden 1800 unidades es de \$5000.

c. *Encontrar la pérdida cuando se producen* 450 *unidades.*

Solución: cuando $q = 450$,

$$y_{TR} - y_{TC} = 8(450) - \left[\frac{22}{9}(450) + 5000\right] = -2500.$$

Ocurre una pérdida de \$2500 cuando el nivel de producción es de 450 unidades.

d. *Encontrar la producción requerida para obtener una utilidad de* \$10,000.

Solución: para obtener una utilidad de \$10,000 tenemos

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total},$$

$$10{,}000 = 8q - \left(\frac{22}{9}q + 5000\right),$$

$$15{,}000 = \frac{50}{9}q,$$

$$q = 2700.$$

Así, deben producirse 2700 unidades.

EJEMPLO 4 Cantidad de equilibrio

Determinar la cantidad de equilibrio de Fabricaciones XYZ dada la información siguiente: costo fijo total, \$1200*; costo variable por unidad*, \$2*; ingreso total por la venta de q unidades*, $y_{TR} = 100\sqrt{q}$.

Solución: por q unidades de producción,

$$y_{TR} = 100\sqrt{q},$$
$$y_{TC} = 2q + 1200.$$

Igualando el ingreso total al costo total se obtiene

$$100\sqrt{q} = 2q + 1200,$$
$$50\sqrt{q} = q + 600 \quad \text{(dividiendo ambos lados entre 2).}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, tenemos

$$2500q = q^2 + 1200q + (600)^2,$$
$$0 = q^2 - 1300q + 360{,}000.$$

Por medio de la fórmula cuadrática,

$$q = \frac{1300 \pm \sqrt{250{,}000}}{2},$$

$$q = \frac{1300 \pm 500}{2},$$

$$q = 400 \quad \text{o} \quad q = 900.$$

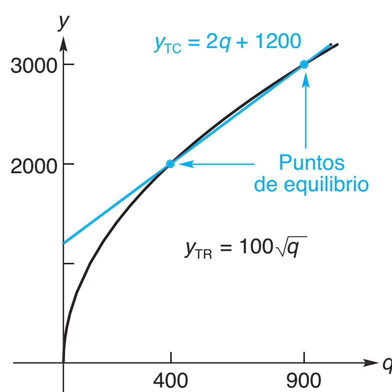


FIGURA 4.48 Dos puntos de equilibrio.

Aunque tanto $q = 400$, como $q = 900$ son cantidades de equilibrio, observe en la figura 4.48 que cuando $q > 900$, el costo total es mayor que el ingreso total, de modo que siempre se tendrá una pérdida. Esto ocurre porque aquí el ingreso total no está relacionado linealmente con la producción. Por tanto, producir más de la cantidad de equilibrio no necesariamente garantiza una utilidad.

Ejercicio 4.6

En los problemas del 1 al 8 se le da una ecuación de oferta y una de demanda para un producto. Si p representa el precio por unidad en dólares y q el número de unidades por unidad de tiempo, encuentre el punto de equilibrio. En los problemas 1 y 2, plantee el sistema.

1. Oferta: $p = \frac{3}{100}q + 2$,
Demanda: $p = -\frac{7}{100}q + 12$.

2. Oferta: $p = \frac{1}{2000}q + 3$,
Demanda: $p = -\frac{1}{2500}q + \frac{42}{5}$.

3. Oferta: $35q - 2p + 250 = 0$,
Demanda: $65q + p - 537.5 = 0$.

4. Oferta: $246p - 3.25q - 2460 = 0$,
Demanda: $410p + 3q - 14{,}452.5 = 0$.

5. Oferta: $p = 2q + 20$,
Demanda: $p = 200 - 2q^2$.

6. Oferta: $p = (q + 10)^2$,
Demanda: $p = 388 - 16q - q^2$.

7. Oferta: $p = \sqrt{q + 10}$,
Demanda: $p = 20 - q$.

8. Oferta: $p = \frac{1}{5}q + 7$,
Demanda: $p = \frac{3240}{q + 20}$.

En los problemas del 9 al 14 y_{TR} representa el ingreso total en dólares y y_{TC} el costo total en dólares para un fabricante. Si q representa tanto el número de unidades producidas como el número de unidades vendidas, encuentre la cantidad de equilibrio. Esquematice un diagrama de equilibrio en los problemas 9 y 10.

9. $y_{TR} = 3q$,
$y_{TC} = 2q + 4500$.

10. $y_{TR} = 14q$,
$y_{TC} = \frac{40}{3}q + 1200$.

11. $y_{TR} = 0.05q$,
$y_{TC} = 0.85q + 600$.

12. $y_{TR} = 0.25q$,
$y_{TC} = 0.16q + 360$.

13. $y_{TR} = 100 - \frac{1000}{q + 5}$,
$y_{TC} = q + 35$.

14. $y_{TR} = 0.1q^2 + 7q$,
$y_{TC} = 2q + 500$.

15. Negocios Las ecuaciones de oferta y demanda para cierto producto son

$$3q - 200p + 1800 = 0$$

y

$$3q + 100p - 1800 = 0,$$

respectivamente, donde p representa el precio por unidad en dólares y q el número de unidades vendidas por periodo.

a. Encuentre algebraicamente el precio de equilibrio y dedúzcalo por medio de una gráfica.
b. Encuentre el precio de equilibrio cuando se fija un impuesto de 27 centavos por unidad al proveedor.

16. Negocios Un fabricante vende todo lo que produce. Su ingreso total está dado por $y_{TR} = 7q$ y el costo total es $y_{TC} = 6q + 800$, donde q representa el número de unidades producidas y vendidas.

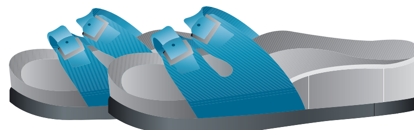
a. Encuentre el nivel de producción en el punto de equilibrio y dibuje el diagrama de equilibrio.
b. Encuentre el nivel de producción en el punto de equilibrio, si el costo total se incrementa en 5%.

17. Negocios Un fabricante vende un producto a \$8.35 por unidad, y vende todo lo que produce. Los costos fijos son de \$2116 y el costo variable es de \$7.20 por unidad. ¿A qué nivel de producción existirán utilidades de \$4600? ¿A qué nivel de producción habrá una pérdida de \$1150? ¿A qué nivel de producción ocurre el punto de equilibrio?

18. Negocios El punto de equilibrio de mercado para un producto ocurre cuando se producen 13,500 unidades a un precio de \$4.50 por unidad. El productor no proveerá unidades a \$1 y el consumidor no demandará unidades a \$20. Encuentre las ecuaciones de oferta y demanda si ambas son lineales.

19. Negocios Un fabricante de juguetes para niños alcanzará el punto de equilibrio en un volumen de ventas de \$200,000. Los costos fijos son de \$40,000 y cada unidad de producción se vende a \$5. Determine el costo variable por unidad.

20. Negocios La compañía Sandalias Cómodas fabrica sandalias para las que el costo del material es de \$0.80 por par, y el costo de mano de obra es de \$0.90 por par. Hay costos adicionales por par de \$0.30. Los costos fijos son de \$70,000. Si cada par se vende a \$2.50, ¿cuántos pares se deben vender para que la compañía llegue al equilibrio?



21. Negocios Encuentre el punto de equilibrio para la compañía Z, que vende todo lo que produce, si el costo variable por unidad es de \$2, los costos fijos de \$1050 y $y_{TR} = 50\sqrt{q}$, donde q es el número de unidades producidas.

22. Negocios Una compañía determinó que la ecuación de demanda para su producto es $p = 1000/q$, donde p es el precio por unidad para q unidades en algún periodo. Determine la cantidad demandada cuando el precio por unidad es (a)\$4, (b)\$2 y (c)\$0.50. Para cada uno de estos precios calcule el ingreso total que la compañía recibirá. ¿Cuál será el ingreso sin importar el precio? (*Sugerencia*: encuentre el ingreso cuando el precio es p dólares.)

23. Negocios Utilizando los datos del ejemplo 1, determine cómo se afectará el precio de equilibrio original, si la compañía recibe un subsidio del gobierno de \$1.50 por unidad.

24. Negocios La compañía Aceros Forjados vende un producto de acero corrugado a Fabricaciones Modelo, y compite para hacer estas ventas con otros proveedores. El vicepresidente de ventas de Aceros Forjados cree que reduciendo el precio del producto, se podría asegurar un 40% de incremento en el volumen de unidades vendidas a Fabricaciones Modelo. Como administrador del departamento de costos y análisis, a usted se le ha consultado para que analice la propuesta del vicepresidente, y exponga sus recomendaciones de si ésta es financieramente benéfica. Se le pide que determine específicamente:

a. Ganancia o pérdida neta con base en el precio propuesto.
b. Volumen de ventas de unidades que, bajo el precio propuesto, se requieren para obtener las mismas utilidades de \$40,000 que se reciben con el precio y volumen de ventas actuales.

Utilice la siguiente información en su análisis:

	Operaciones actuales	**Propuesta del vicepresidente de ventas**
Precio unitario	\$2.50	\$2.00
Volumen de ventas	200,000 unidades	280,000 unidades
Costo variable		
Total	\$350,000	\$490,000
Por unidad	\$1.75	\$1.75
Costo fojo	\$110,000	\$110,000
Ganancia	\$40,000	?

25. Negocios Suponga que los productos A y B tienen ecuaciones de demanda y oferta que están relacionadas una con otra. Si q_A y q_B son las cantidades producidas y vendidas de A y B, respectivamente, y p_A y p_B sus respectivos precios, las ecuaciones de demanda son

$$q_A = 8 - p_A + p_B$$

y

$$q_B = 26 + p_A - p_B,$$

y las ecuaciones de oferta son

$$q_A = -2 + 5p_A - p_B$$

y

$$q_B = -4 - p_A + 3p_B.$$

Elimine q_A y q_B para obtener los precios de equilibrio.

26. Negocios La ecuación de oferta para un producto es

$$p = 0.3q^2 + 14.6,$$

y la ecuación de demanda es

$$p = \frac{35.2}{1 + 0.3q}.$$

Aquí p representa el precio por unidad en dólares, y q el número de unidades (en miles) por unidad de tiempo. Grafique ambas ecuaciones y a partir de su gráfica determine el precio y la cantidad de equilibrio a un decimal.

27. Negocios Para un fabricante la ecuación de ingreso total es

$$y_{TR} = 20.5\sqrt{q + 4} - 41$$

y la ecuación de costo total es

$$y_{TC} = 0.02q^3 + 10.4,$$

donde q representa (en miles) tanto el número de unidades producidas como el de unidades vendidas. Grafique un diagrama de equilibrio y encuentre la cantidad de equilibrio.

4.7 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 4.1 pendiente de una recta   forma punto-pendiente   forma pendiente-ordenada al origen
ecuación lineal general en x y y relación lineal

Sección 4.2 ecuación de demanda   curva de demanda   ecuación de oferta   curva de oferta
ecuación lineal

Sección 4.3 función cuadrática   parábola   eje de simetría   vértice

Sección 4.4 sistema de ecuaciones   sistemas equivalentes   eliminación por adición   eliminación por sustitución   parámetro   ecuación lineal general en x, y y z

Sección 4.5 sistema no lineal

Sección 4.6 punto de equilibrio   precio de equilibrio   cantidad de equilibrio   ganancia   costo total
costo fijo   costo variable   punto de equilibrio   cantidad de equilibrio   ingreso de equilibrio

Resumen

La orientación de una recta no vertical está caracterizada por su pendiente y la recta está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos diferentes sobre la recta. La pendiente de una recta vertical no está definida, y la pendiente de una recta horizontal es cero. Rectas que ascienden tienen pendiente positiva; rectas que descienden tienen pendiente negativa. Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente o son verticales. Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares entre sí, si y sólo si $m_1 = -\frac{1}{m_2}$. Una recta horizontal y una vertical son perpendiculares entre sí.

Formas básicas de las ecuaciones de rectas son las siguientes:

$y - y_1 = m(x - x_1)$	(forma punto-pendiente)
$y = mx + b$	(forma pendiente-ordenada al origen)
$x = a$	(recta vertical)
$y = b$	(recta horizontal)
$Ax + By + C = 0$	(general)

La función lineal $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$, tiene como gráfica una línea recta.

En economía, las funciones de oferta y demanda tienen la forma $p = f(q)$ y desempeñan un papel importante. Cada una da una correspondencia entre el precio p de un producto, y el número de unidades q del producto que los fabricantes (o consumidores) ofrecerán (o comprarán) a ese precio durante algún periodo.

Una función cuadrática tiene la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

Su gráfica es una parábola que se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. El vértice es

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right),$$

y c es la intersección y. El eje de simetría, así como las intersecciones x y y son útiles para hacer el bosquejo de la gráfica.

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse con los métodos de eliminación por adición y eliminación por sustitución. Una solución puede incluir uno o más parámetros. La sustitución también es útil en la solución de sistemas no lineales.

La solución de un sistema formado por las ecuaciones de oferta y demanda para un producto, da el punto de equilibrio, que indica el precio al que los clientes comprarán la misma cantidad de un producto que los productores desean vender a ese precio.

Las utilidades son el ingreso total menos el costo total, donde el costo total es la suma de los costos fijos y los costos variables. El punto de equilibrio es el punto en donde el ingreso total iguala al costo total.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color se sugiere utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

1. La pendiente de la recta que pasa por $(2, 5)$ y $(3, k)$ es 4. Encuentre k.

2. La pendiente de la recta que pasa por $(2, 3)$ y $(k, 3)$ es 0. Encuentre k.

En los problemas del 3 al 9 determine la forma pendiente-ordenada al origen y una forma general de una ecuación de la recta que tiene las propiedades indicadas.

3. Pasa por $(3, -2)$ y tiene intersección y igual a 1.

4. Pasa por $(-1, -1)$ y es paralela a la recta $y = 3x - 4$.

5. Pasa por $(10, 4)$ y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.

6. Pasa por $(3, 5)$ y es vertical.

7. Pasa por $(-2, 4)$ y es horizontal.

8. Pasa por $(1, 2)$ y es perpendicular a la recta $-3y + 5x = 7$.

9. Tiene intersección y igual a 2 y es perpendicular a $y + 3x = 2$.

10. Determine si el punto $(0, -7)$ pertenece a la recta que pasa por $(1, -3)$ y $(4, 9)$.

En los problemas del 11 al 16 determine si las rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de éstas.

11. $x + 4y + 2 = 0, \quad 8x - 2y - 2 = 0.$

12. $y - 2 = 2(x - 1), \quad 2x + 4y - 3 = 0.$

13. $x - 3 = 2(y + 4), \quad y = 4x + 2.$

14. $3x + 5y + 4 = 0, \quad 6x + 10y = 0.$

15. $y = \frac{1}{2}x + 5, \quad 2x = 4y - 3.$

16. $y = 7x, \quad y = 7.$

En los problemas del 17 al 20 escriba cada recta en la forma pendiente-ordenada al origen y haga un bosquejo de su gráfica. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

17. $3x - 2y = 4.$

18. $x = -3y + 4.$

19. $4 - 3y = 0.$

20. $y = 2x.$

En los problemas del 21 al 30 grafique cada función. Para las que sean funciones lineales, también obtenga la pendiente y la intersección con el eje vertical. Para las cuadráticas obtenga todas las intersecciones y el vértice.

21. $y = f(x) = 4 - 2x.$

22. $s = g(t) = 8 - 2t - t^2.$

23. $y = f(x) = 9 - x^2.$

24. $y = f(x) = 3x - 7.$

25. $y = h(t) = t^2 - 4t - 5.$

26. $y = h(t) = 1 + 3t.$

27. $p = g(t) = 3t.$

28. $y = F(x) = (2x - 1)^2.$

29. $y = F(x) = -(x^2 + 2x + 3).$

30. $y = f(x) = \dfrac{x}{3} - 2.$

En los problemas del 31 al 44 resuelva el sistema dado.

31. $\begin{cases} 2x - y = 6, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$

32. $\begin{cases} 8x - 4y = 7, \\ y = 2x - 4. \end{cases}$

33. $\begin{cases} 4x + 5y = 3, \\ 3x + 4y = 2. \end{cases}$

34. $\begin{cases} 3x + 6y = 9, \\ 4x + 8y = 12. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}y = -4, \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 8. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{12}, \\ \frac{4}{3}x + 3y = \frac{5}{3}. \end{cases}$

37. $\begin{cases} 3x - 2y + z = -2, \\ 2x + y + z = 1, \\ x + 3y - z = 3. \end{cases}$

38. $\begin{cases} x + \dfrac{2y + x}{6} = 14, \\ y + \dfrac{3x + y}{4} = 20. \end{cases}$

39. $\begin{cases} x^2 - y + 2x = 7, \\ x^2 + y = 5. \end{cases}$

40. $\begin{cases} y = \dfrac{18}{x + 4}, \\ x - y + 7 = 0. \end{cases}$

[8]**41.** $\begin{cases} x + 2z = -2, \\ x + y + z = 5. \end{cases}$

[8]**42.** $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y + z = 0, \\ x + z = 0. \end{cases}$

[8]**43.** $\begin{cases} x - y - z = 0, \\ 2x - 2y + 3z = 0. \end{cases}$

[8]**44.** $\begin{cases} 2x - 5y + 6z = 1, \\ 4x - 10y + 12z = 2. \end{cases}$

---

45. Suponga que a y b están relacionadas de manera lineal, de modo que $a = 1$ cuando $b = 2$, y $a = 2$ cuando $b = 1$. Encuentre una forma lineal general de una ecuación que relacione a y b. También encuentre a cuando $b = 3$.

46. Temperatura y frecuencia cardiaca Cuando la temperatura T (en grados Celsius) de un gato se reduce, la frecuencia cardiaca del gato r (en latidos por minuto) disminuye. Bajo condiciones de laboratorio, un gato a una temperatura de 37°C tuvo una frecuencia cardiaca de 220, y a una temperatura de 32°C su frecuencia cardiaca fue de 150. Si r está relacionada linealmente con T, en donde T está entre 26 y 38°C, (a) determine una ecuación para r en términos de T, y (b) determine la frecuencia cardiaca a una temperatura de 28°C.



[8]Se refiere a los conceptos vistos en los ejemplos 6 y 7 de la sección 4.4.

47. Suponga que f es una función lineal tal que $f(1) = 5$, y $f(x)$ disminuye 4 unidades por cada incremento de 3 unidades en x. Encuentre $f(x)$.

48. Si f es una función lineal tal que $f(-1) = 8$ y $f(2) = 5$, encuentre $f(x)$.

49. Ingreso máximo La función de demanda para el fabricante de un producto es $p = f(q) = 200 - 2q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando se demandan q unidades. Determine el nivel de producción que maximiza el ingreso total del fabricante y calcule este ingreso.

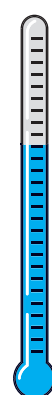
50. Impuesto sobre ventas La diferencia en el precio de dos artículos antes de que un impuesto sobre la venta de 5% se les imponga es de \$4. La diferencia en el precio después del impuesto es de \$4.20. Encuentre el precio de cada artículo antes del impuesto.

51. Precio de equilibrio Si las ecuaciones de oferta y demanda de cierto producto son $125p - q - 250 = 0$ y $100p + q - 1100 = 0$, respectivamente, encuentre el precio de equilibrio.

52. Psicología En psicología el término *memoria semántica* se refiere al conocimiento del significado y la relación de las palabras, así como al significado con el que almacenamos y recuperamos tal información.[9] En un modelo de red de memoria semántica, hay una jerarquía de niveles en los que se almacena la información. En un experimento de Collins y Quillian basado en un modelo de red, los datos se obtuvieron sobre el tiempo de reacción para responder a preguntas sencillas acerca de sustantivos. La gráfica de los resultados muestra que en promedio, el tiempo de reacción R (en milisegundos) es una función lineal del nivel L en el que una propiedad característica del sustantivo es almacenada. En el nivel 0 el tiempo de reacción es de 1310; en el nivel 2 el tiempo de reacción es de 1460. (a) Encuentre la función lineal. (b) Encuentre el tiempo de reacción en el nivel 1. (c) Encuentre la pendiente y determine su significado.

53. Punto de equilibrio Un fabricante de cierto producto vende todo lo que produce. Determine el punto de equilibrio, si el producto se vende en \$16 por unidad, el costo fijo es \$10,000 y el costo variable está dado por $y_{VC} = 8q$, en donde q es el número de unidades producidas (y_{VC} se expresa en dólares).

54. Conversión de temperatura La temperatura Celsius, C, es una función lineal de la temperatura Fahrenheit, F. Utilice el hecho de que 32 °F es lo mismo que 0 °C y que 212 °F es lo mismo que 100 °C para hallar esta función. También encuentre C cuando $F = 50$.



55. Contaminación En una provincia de una nación desarrollada, la contaminación del agua se analiza utilizando un modelo de oferta-demanda. La *ecuación de oferta ambiental* $L = 0.0183 - \frac{0.0042}{p}$ describe el gravamen por tonelada, L (en dólares), como una función de la contaminación total, p (en toneladas por kilómetro cuadrado), para $p \geq 0.2295$. La *ecuación de demanda ambiental*, $L = 0.0005 + \frac{0.0378}{p}$, describe el costo por tonelada de disminución, como una función de la contaminación total para $p > 0$. Determine el nivel de equilibrio de la contaminación total a dos decimales.[10]

56. 56. Resuelva en forma gráfica el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x + 4y = 20, \\ 7x + 5y = 64. \end{cases}$$

57. Por medio de una gráfica, resuelva el sistema lineal

$$\begin{cases} 0.2x + 0.3y = 7, \\ 0.3x + 0.5y = 4. \end{cases}$$

Redondee x y y a dos decimales.

58. Mediante una gráfica, resuelva el sistema no lineal

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x}, \text{ donde } x > 0, \\ y = x^2 - 6. \end{cases}$$

Redondee x y y a dos decimales.

59. Resuelva gráficamente el sistema no lineal

$$\begin{cases} y = x^3 + 1, \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$$

Redondee x y y a dos decimales.

60. Resuelva en forma gráfica la ecuación

$$x^2 + 4 = x^3 - 3x$$

tratándola como un sistema. Redondee x a dos decimales.

---

[9] G. R. Loftus y E. F. Loftus, *Human Memory*: *The Processing of Information* (Nueva York: Laurence Erlbaum Associates, Inc., distribuido por Halsted Press, División de John Wiley and Sons, Inc., 1976).

[10] Véase Hua Wang y David Wheeler, "Pricing Industrial Pollution in China: An Economic Analysis of the Levy System", World Bank Policy Research Working Paper #1644, septiembre de 1996.

Aplicación práctica

Planes de cobro en telefonía celular



Planes de cobro en telefonía celular. En décadas recientes, los cambios en la tecnología y la ley han transformado la industria de la comunicación. Algunos de los cambios han tenidos sus pros y sus contras. Por ejemplo, considere el problema de elegir un plan de telefonía celular. En la mayoría de las áreas urbanas, los usuarios de teléfonos celulares, literalmente tienen docenas de planes para elegir. Los planes incluyen tarifas de accesos mensuales, minutos libres, cobros por tiempo aire adicional, tarifas por *roaming* regional, tarifa por *roaming* nacional, tarifas por horas pico y horas no pico, y tarifas por larga distancia (sin mencionar costos por activación, gastos por cancelación y cosas por el estilo). Dados todos estos factores, ¿cómo puede un consumidor hacer una elección inteligente?

Aunque encontramos que la mejor elección garantizada requiere de un arduo trabajo, realizar una elección razonable sólo requiere de pocas matemáticas. Considere los planes ofrecidos por una sola compañía de telecomunicaciones, denominada Compañía XY&Z, y suponga que la mayor parte de las llamadas son locales, hechas (o recibidas) en la ciudad durante las horas pico. En otras palabras, ignoraremos las cuotas por *roaming*, tasas en horas no pico y tarifas de larga distancia. En diciembre de 2000, esta compañía ofreció los planes siguientes:

Básico: \$19.99 mensual compra 60 minutos. El tiempo adicional cuesta \$0.40 por minuto.

Advantage I: \$29.99 mensual compra 120 minutos. El tiempo adicional cuesta \$0.30 por minuto.

Advantage II: \$39.99 mensual compra 200 minutos. El tiempo adicional cuesta \$0.30 por minuto.

Advantage III: \$49.99 mensual compra 400 minutos. El tiempo adicional cuesta \$0.30 por minuto.

Premier: \$59.99 mensual compra 450 minutos. El tiempo adicional cuesta \$0.35 por minuto.

Para representar en forma matemática estos planes, tenemos que escribir el costo mensual total como una función del tiempo para cada plan. Para el plan Básico, el costo mensual, B, dependerá del número total de llamadas de acuerdo con la función

$$B(t) = \begin{cases} 19.99 & \text{si } t \leq 60, \\ 19.99 + 0.40(t - 60) & \text{si } t > 60. \end{cases}$$

De manera similar, representamos los tres planes Advantage con $A1$, $A2$ y $A3$, respectivamente, y el plan Premier por P, así, tenemos estas funciones:

$$A1(t) = \begin{cases} 29.99 & \text{si } t \leq 120, \\ 29.99 + 0.30(t - 120) & \text{si } t > 120. \end{cases}$$

$$A2(t) = \begin{cases} 39.99 & \text{si } t \leq 200, \\ 39.99 + 0.30(t - 200) & \text{si } t > 200. \end{cases}$$

$$A3(t) = \begin{cases} 49.99 & \text{si } t \leq 400, \\ 49.99 + 0.30(t - 400) & \text{si } t > 400. \end{cases}$$

$$P(t) = \begin{cases} 59.99 & \text{si } t \leq 450, \\ 59.99 + 0.35(t - 450) & \text{si } t > 450. \end{cases}$$

Con toda esta vasta información, es recomendable construir una gráfica para tener una perspectiva general del problema. Podríamos realizar esto en forma manual, pero aquí está una buena oportunidad para utilizar la capacidad de una calculadora gráfica. Introducimos la función $B(t)$ como

$$\text{Y1} = 19.99 + 0.40(\text{X} - 60)(\text{X} > 60).$$

El símbolo $>$ viene en el menú TEST, y la expresión $(\text{X} > 60)$ es igual a 1 o 0, dependiendo si x es, o no, mayor que 60. Introduciendo las otras cuatro funciones de manera similar y graficándolas juntas, obtenemos la pantalla que se muestra en la figura 4.49.

Cuál plan es mejor depende de la cantidad de tiempo de llamadas, para cualquier tiempo aire mensual dado, el mejor plan es aquél en que la gráfica es la más baja en ese punto.

Para un tiempo muy breve de llamadas, el plan Básico es mejor, pero en algún punto se vuelve más caro que el plan Advantage I. Encontramos en dónde ocurre esto —el valor de t en el que las gráficas de esos dos planes se intersecan. Obsérvese que si no hubiésemos graficado todas las funciones, no sabríamos qué

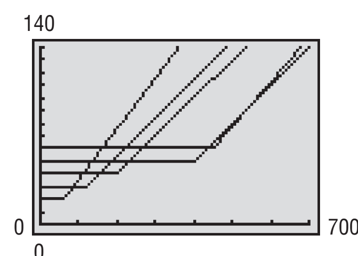


FIGURA 4.49 Costos de los diferentes planes.

parte de cada definición de función utilizar; tal como están las cosas, podemos ver que utilizamos la segunda parte de la definición de $B(t)$ (la parte cuya gráfica es inclinada), y la primera parte de la definición de $A1(t)$ (la parte cuya gráfica es plana). En otras palabras, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} B(t) = 19.99 + 0.40(t - 60), \\ A1(t) = 29.99. \\ B(t) = A1(t), \end{cases}$$

Por medio de sustitución, esto se simplifica a una sola ecuación que se resuelve rápidamente:

$$\begin{aligned} 19.99 + 0.40(t - 60) &= 29.99, \\ 0.40t - 24 &= 10, \\ 0.40t &= 34, \\ t &= 85. \end{aligned}$$

De modo que el plan Advantage I se vuelve mejor que el plan Básico para más de 85 minutos de tiempo mensual de llamadas.

Con base en la gráfica, también podemos ver que en algún punto el plan Advantage II empieza a ser el mejor plan, y que en un punto posterior, a su vez, el plan Advantage III se vuelve mejor. Sin embargo, note algo interesante en los planes Advantage III y Premier: el plan Advantage III es mejor al principio, y luego el plan Premier es mejor por un lapso, pero para tiempos muy altos de uso, el plan Advantage III es nuevamente mejor.[11] Encontramos el último punto de cambio. Es el valor de t en el que las dos partes inclinadas de las gráficas de $A3(t)$ y $P(t)$ se intersecan. En lugar de resolverla en forma algebraica, esta vez utilizamos la calculadora para determinar de manera automática el punto de intersección.

Nuestro resultado se muestra en la fig. 4.50.

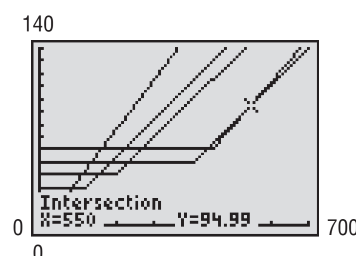


FIGURA 4.50 Planes Advantage III y Premier.

De modo que el plan Advantage III es mejor que el plan Premier para más de 550 minutos de llamadas.

De lo que conocemos hasta ahora, podemos construir la tabla parcial siguiente.

Tiempo aire (min)	Mejor plan
0 a 85	Básico
	Advantage I
	Advantage II
	Advantage III
	Premier
550 y más	Advantage III

La terminación de esta tabla se deja para los ejercicios.

Para buscar planes de servicio de teléfonos celulares en diferentes áreas, visite `www.point.com`.

Ejercicios

1. Copie la tabla anterior en una página aparte. Después utilice las técnicas de solución algebraicas para llenar las dos primeras líneas en blanco de la columna de tiempo aire.
2. Utilice una calculadora gráfica para llenar las dos líneas en blanco restantes.
3. ¿Qué sucede cuando trata de utilizar la calculadora para determinar un punto de intersección, pero no es cuidadoso con su aproximación inicial?
4. ¿Por qué la compañía XY&Z ofrece cinco diferentes planes, en lugar de ofrecer un solo plan que proporcione a la compañía una utilidad para cualquier tiempo aire del consumidor?

[11] Los planes también difieren de manera significativa en tarifas por roaming regional, pero no estamos considerándolos.



CAPÍTULO 5

Funciones exponencial y logarítmica

Al igual que los virus biológicos se propagan a través del contacto entre organismos, también los virus de computadora se propagan cuando las computadoras interactúan por medio de redes o correo electrónico. Mientras los científicos estudian cómo luchar contra los virus de computadora, que causan mucho daño por la forma en que borran o alteran archivos, también diseñan modelos matemáticos de la rapidez con que se propagan los virus. Por ejemplo, el viernes 26 de marzo de 1999 se reportó el primer caso del virus conocido como Melissa; para el lunes 29 de marzo, Melissa había alcanzado a más de 100,000 computadoras.

Las funciones exponenciales, que este capítulo estudia en detalle, proporcionan un modelo plausible. Considere un virus de computadora que se oculta en un archivo adjunto de correo electrónico; una vez que el archivo se baja, de manera automática se envía un mensaje con un archivo adjunto similar a todas las direcciones en la libreta de direcciones de correo electrónico de la computadora anfitriona. Si la libreta de direcciones común contiene 20 direcciones, y si el usuario común de computadora revisa su correo electrónico una vez por día, entonces un virus en una sola máquina habrá infectado a 20 máquinas en un día, $20^2 = 400$ máquinas al cabo de dos días, $20^3 = 8000$ después de tres días y, en general, después de t días, el número N de computadoras infectadas estará dado por la función exponencial $N(t) = 20^t$.

Este modelo supone que todas las computadoras implicadas están ligadas unas con otras, vía su lista de direcciones, en un solo grupo bien conectado. Los modelos exponenciales son más precisos para pequeños valores de t; este modelo en particular, ignora el descenso que ocurre cuando la mayoría de los correos electrónicos iniciales van a computadoras que ya están infectadas; lo cual sucede cuando pasan varios días. Por ejemplo, nuestro modelo nos dice que después de siete días infectará a $20^7 = 1.28$ miles de millones de computadoras —¡aproximadamente todas las computadoras en la Tierra! Pero a pesar de sus limitaciones, los modelos exponenciales explican el porqué con frecuencia los nuevos virus infectan a miles de máquinas antes de que los expertos en antivirus tengan tiempo de reaccionar.

OBJETIVO Estudiar las funciones exponenciales y sus aplicaciones en temas como interés compuesto, crecimiento poblacional y decaimiento radiactivo.

5.1 Funciones exponenciales

Existe una función que desempeña una función importante no sólo en matemáticas, sino también en finanzas, economía y otras áreas de estudio. Incluye una constante elevada a un exponente variable, como $f(x) = 2^x$. A tales funciones les llamamos *funciones exponenciales*.

No confunda la función exponencial $y = 2^x$ con la *función potencia* $y = x^2$, que tiene una base variable y un exponente constante.

Definición

La función f definida por

$$f(x) = b^x,$$

donde $b > 0$, $b \neq 1$, y el exponente x es cualquier número real, se llama ***función exponencial*** con base b.[1]

Ya que el exponente de b^x puede ser cualquier número real, podría sorprenderle cómo le asignamos un valor a algo como $2^{\sqrt{2}}$, donde el exponente es un número irracional. Simplemente utilizamos aproximaciones. Como $\sqrt{2} = 1.41421\ldots$, $2^{\sqrt{2}}$ es casi $2^{1.4} = 2^{7/5} = \sqrt[5]{2^7}$, que *sí está* definido. Aproximaciones mejores son $2^{1.41} = 2^{141/100} = \sqrt[100]{2^{141}}$, y así sucesivamente. De esta manera el significado de $2^{\sqrt{2}}$ se vuelve claro. El valor que da una calculadora para $2^{\sqrt{2}}$ es (aproximadamente) 2.66514.

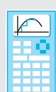
Cuando se trabaja con funciones exponenciales puede ser necesario aplicar las reglas de los exponentes. Estas reglas se presentan a continuación, en ellas m y n son números reales y a y b son positivos.

Si desea revisar exponentes, consulte la sección 0.5.

Reglas de los exponentes

1. $a^m a^n = a^{m+n}$.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$.
4. $(ab)^n = a^n b^n$.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
6. $a^1 = a$.
7. $a^0 = 1$.
8. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Algunas funciones que no parecen tener la forma exponencial b^x pueden ponerse en esa forma aplicando las reglas anteriores. Por ejemplo, $2^{-x} = 1/(2^x) = (\frac{1}{2})^x$ y $3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$.



Principios en práctica 1
Crecimiento de bacterias

El número de bacterias en un cultivo que duplica su número cada hora, está dado por $N(t) = A \cdot 2^t$, en donde A es el número presente originalmente y t es el número de horas que las bacterias se han estado duplicando. Utilice una calculadora gráfica para trazar esta función para diferentes valores de $A > 1$. ¿En qué se parecen las gráficas? ¿Cómo altera el valor de A la gráfica?

EJEMPLO 1 Crecimiento de bacterias

El número de bacterias presentes en un cultivo después de t minutos está dado por

$$N(t) = 300\left(\frac{4}{3}\right)^t.$$

Observe que $N(t)$ *es un múltiplo constante de la función exponencial* $\left(\dfrac{4}{3}\right)^t$.

[1] Si $b = 1$, entonces $f(x) = 1^x = 1$. Esta función es de tan poco interés, que no le llamamos función exponencial.

a. *¿Cuántas bacterias están presentes al inicio?*

Solución: aquí queremos determinar $N(t)$ cuando $t = 0$. Tenemos

$$N(0) = 300\left(\frac{4}{3}\right)^0 = 300(1) = 300.$$

Así que 300 bacterias están presentes al inicio.

b. *En forma aproximada, ¿cuántas bacterias están presentes después de 3 minutos?*

Solución:

$$N(3) = 300\left(\frac{4}{3}\right)^3 = 300\left(\frac{64}{27}\right) = \frac{6400}{9} \approx 711.$$

Por lo que casi 711 bacterias están presentes después de 3 minutos.

Principios en práctica 2

Graficación de funciones exponenciales con $b > 1$

Suponga que una inversión aumenta 10% cada año. Construya una tabla del factor por el cual la inversión aumenta a partir de la cantidad inicial para 0 a 4 años. Para cada año, escriba una expresión para el aumento como una potencia de alguna base. ¿Qué base utilizaría? ¿Cómo se relaciona esa base con el problema? Utilice su tabla para graficar el aumento multiplicativo como una función del número de años. Utilice su gráfica para determinar cuándo se duplica la inversión.

Gráficas de funciones exponenciales

EJEMPLO 2 Graficación de funciones exponenciales con $b > 1$

Graficar las funciones exponenciales $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 5^x$.

Solución: al trazar puntos y conectarlos obtenemos las gráficas de la figura 5.1. Para la gráfica de $f(x) = 5^x$, como consecuencia de la unidad de distancia seleccionada sobre el eje y, no se muestran los puntos $(-2, \frac{1}{25})$, $(2, 25)$ y $(3, 125)$.

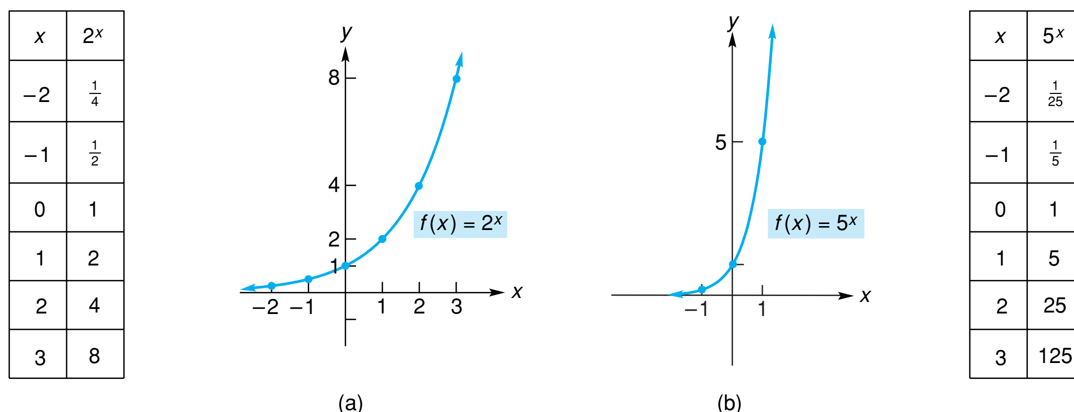


FIGURA 5.1 Gráficas de $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 5^x$.

Vamos a hacer algunas observaciones acerca de estas gráficas. El dominio de cada función es el conjunto de todos los números reales, y el rango todos los números reales positivos. Cada gráfica tiene intersección con el eje y $(0, 1)$. Además, estas gráficas tienen la misma forma general. Cada una *asciende* de izquierda a derecha. Conforme x aumenta, $f(x)$ también aumenta. De hecho, $f(x)$ aumenta sin límite. Sin embargo, en el primer cuadrante, la gráfica de $f(x) = 5^x$ asciende más rápido que $f(x) = 2^x$, ya que la base en 5^x es *mayor* que la base en 2^x (esto es $5 > 2$). En el segundo cuadrante vemos que cuando

Principios en práctica 3

Graficación de una función exponencial con $0 < b < 1$

Suponga que el valor de un automóvil se deprecia 15% cada año. Construya una tabla del factor por el cual disminuye de su monto original para 0 a 3 años. Para cada año, escriba una expresión para la disminución como una potencia de alguna base. ¿Qué base utilizaría? ¿Cómo se relaciona esa base con el problema? Utilice su tabla para graficar la disminución multiplicativa como una función del número de años. Utilice su gráfica para determinar cuándo el automóvil disminuye su valor a la mitad de su precio original.

x se hace más negativa, las gráficas de ambas funciones se aproximan al eje x.[2] Esto implica que los valores de las funciones se hacen muy cercanos a 0.

Las observaciones realizadas en el ejemplo 2 son ciertas para todas las funciones exponenciales cuya base b es mayor que 1. En el ejemplo 3 se examinará el caso de una base entre 0 y 1 ($0 < b < 1$).

EJEMPLO 3 Graficación de una función exponencial con $0 < b < 1$

Graficar la función exponencial $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

Solución: al trazar puntos y conectarlos, obtenemos la gráfica de la figura 5.2. Observe que el dominio equivale a todos los números reales y el rango a todos los números reales positivos. La gráfica tiene intersección y $(0, 1)$. Si comparamos con las gráficas del ejemplo 2, vemos que aquí la gráfica *desciende* de izquierda a derecha. Esto es, conforme x aumenta $f(x)$ disminuye. Observe que cuando x toma valores positivos cada vez más grandes, $f(x)$ toma valores muy cercanos a cero y la gráfica se aproxima al eje x. Sin embargo, cuando x se vuelve muy negativa los valores de la función no están acotados.

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

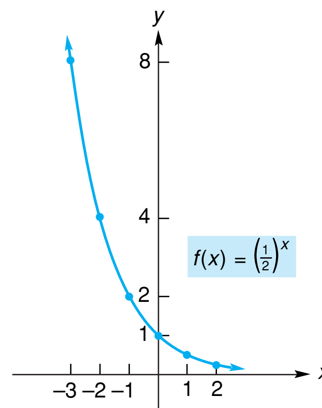


FIGURA 5.2 Gráfica de $f(x) = (\frac{1}{2})^x$.

Existen dos formas básicas para las gráficas de las funciones exponenciales, éstas dependen de la base incluida.

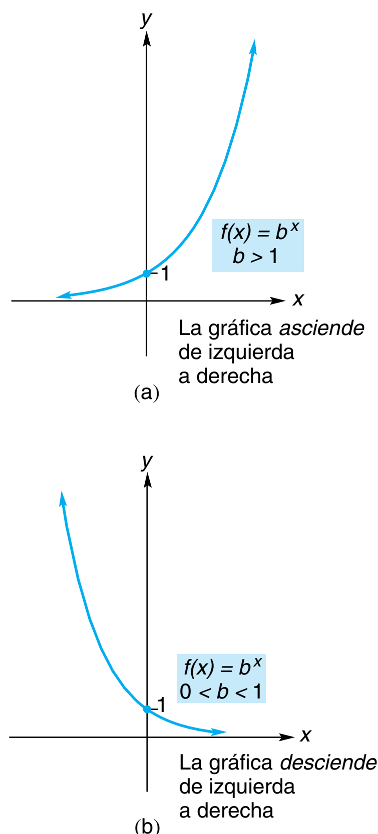


FIGURA 5.3 Formas generales de $f(x) = b^x$.

En general, la gráfica de una función exponencial tiene una de las dos formas comunes, dependiendo del valor de la base b. Esto se ilustra en la figura 5.3. Las propiedades básicas de una función exponencial y su gráfica se resumen en la tabla 5.1.

Recuerde de la sección 3.6 que la gráfica de una función puede estar relacionada con otra por medio de cierta transformación. Nuestro ejemplo siguiente se refiere a este concepto.

[2]Decimos que el eje x es una *asíntota* para cada gráfica.

TABLA 5.1 Propiedades de la función exponencial $f(x) = b^x$

1. El dominio de una función exponencial es el conjunto de todos los números reales. El rango es el conjunto de todos los números positivos.
2. La gráfica de $f(x) = b^x$ tiene intersección con el eje y $(0, 1)$. No existe intersección con el eje x.
3. Si $b > 1$, la gráfica *asciende* de izquierda a derecha. Si $0 < b < 1$, la gráfica *desciende* de izquierda a derecha.
4. Si $b > 1$, la gráfica se aproxima al eje x conforme x toma valores negativos cada vez más grandes en valor absoluto. Si $0 < b < 1$, la gráfica se aproxima al eje x conforme x toma valores positivos cada vez más grandes.

El ejemplo 4 hace uso de las transformaciones de la tabla 3.2.

Principios en práctica 4

Transformaciones de funciones exponenciales

Después de observar el crecimiento del dinero de su hermana durante tres años en un plan con 8% anual, George abrió una cuenta de ahorros con el mismo plan. Si $y = 1.08^t$ representa el aumento multiplicativo en la cuenta de su hermana, escriba una ecuación que representará el aumento multiplicativo en la cuenta de George, utilizando la misma referencia de tiempo. Si George tiene una gráfica de aumento multiplicativo del dinero de su hermana en el tiempo t desde que ella inició su ahorro, ¿cómo podría él utilizar la gráfica para proyectar el incremento en su dinero?

EJEMPLO 4 Transformaciones de funciones exponenciales

a. *Utilizar la gráfica de $y = 2^x$ para graficar $y = 2^x - 3$.*

Solución: la función tiene la forma $f(x) - c$, donde $f(x) = 2^x$ y $c = 3$. Así que su gráfica se obtiene recorriendo la gráfica de $f(x) = 2^x$ tres unidades hacia abajo (véase la fig. 5.4).

b. *Utilizar la gráfica de $y = (\frac{1}{2})^x$ para graficar $y = (\frac{1}{2})^{x-4}$.*

Solución: la función tiene la forma $f(x - c)$, donde $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ y $c = 4$. De aquí que su gráfica se obtenga recorriendo la gráfica de $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, cuatro unidades hacia la derecha (véase la fig. 5.5).

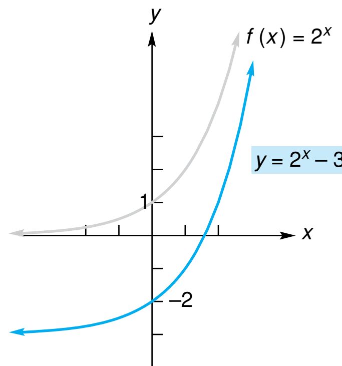


FIGURA 5.4 Gráfica de $y = 2^x - 3$.

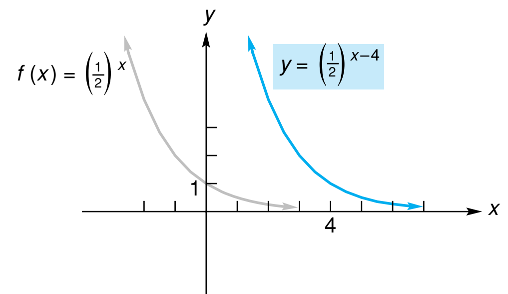
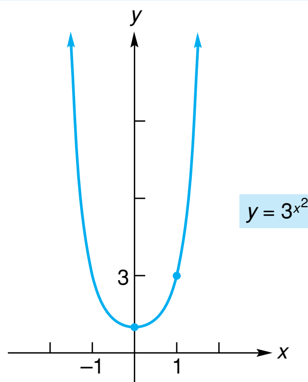


FIGURA 5.5 Gráfica de $y = (\frac{1}{2})^{x-4}$.



x	0	1	2
y	1	3	81

FIGURA 5.6 Gráfica de $y = 3^{x^2}$.

EJEMPLO 5 Gráfica de una función con una base constante

Graficar $y = 3^{x^2}$.

Solución: aunque ésta no es una función exponencial, tiene una base constante. Vemos que al reemplazar x por $-x$ resulta la misma ecuación. Así, la gráfica es simétrica con respecto al eje y. Al trazar algunos puntos y utilizar la simetría se obtiene la gráfica de la figura 5.6.

Tecnología

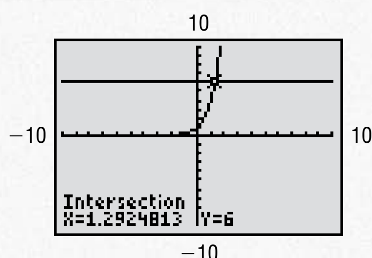


FIGURA 5.7 *Resolución de la ecuación* $6 = 4^x$.

Si $y = 4^x$, considere el problema de encontrar x cuando $y = 6$. Una manera de resolverlo es encontrar la intersección de las gráficas de $y = 6$ y $y = 4^x$. La figura 5.7 muestra que x es aproximadamente igual a 1.29.

Interés compuesto

Las funciones exponenciales están implicadas en el **interés compuesto,** en el cual el interés que genera una cantidad de dinero invertida (**capital** o **principal**), se invierte nuevamente de modo que también genere intereses. Así, el interés es convertido (o *compuesto*) en capital y, por tanto, hay "interés sobre el interés".

Por ejemplo, suponga que se invierten \$100 a una tasa de 5% compuesto (capitalizable) cada año. Al final del primer año, el valor de la inversión es el capital original (\$100), más el interés sobre el capital [100(0.05)]:

$$100 + 100(0.05) = \$105.$$

Ésta es la cantidad sobre la cual se genera el interés para el segundo año. Al final del segundo año, el valor de la inversión es el capital del final del primer año (\$105), más el interés sobre esa cantidad [105(0.05)]:

$$105 + 105(0.05) = \$110.25.$$

Así, cada año el capital se incrementa en 5%. Los \$110.25 representan el capital original más todo el interés acumulado; esta cantidad se llama **monto acumulado** o **monto compuesto.** La diferencia entre el monto compuesto y el capital original se conoce como **interés compuesto.** Aquí, el interés compuesto es $110.25 - 100 = 10.25$.

De manera más general, si un capital de P dólares se invierte a una tasa de $100r$ por ciento, compuesto anualmente (por ejemplo, a 5%, r es 0.05), la cantidad compuesta después de un año es $P + Pr$, o factorizando, $P(1 + r)$. Al final del segundo año la cantidad compuesta es

$$\begin{aligned} &P(1 + r) + [P(1 + r)]r \\ &= P(1 + r)[1 + r] \qquad \text{(factorizando)} \\ &= P(1 + r)^2. \end{aligned}$$

Este patrón continúa. Después de 3 años la cantidad compuesta es $P(1 + r)^3$. En general, **el monto compuesto *S* del capital *P* al final de *n* años a una tasa de *r* compuesta anualmente,** está dado por

$$S = P(1 + r)^n. \qquad (1)$$

Observe en la ecuación (1) que para un capital y una tasa dados, S es una función de n. En efecto, S es una función exponencial con base $1 + r$.

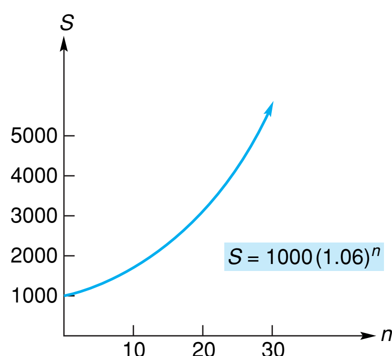


FIGURA 5.8 Gráfica de $S = 1000(1.06)^n$.

EJEMPLO 6 Monto compuesto e interés compuesto

Suponga que se invierten \$1000 *durante* 10 *años a* 6% *compuesto anualmente.*

a. *Encontrar el monto compuesto.*

Solución: utilizamos la ecuación (1) con $P = 1000$, $r = 0.06$, y $n = 10$:

$$S = 1000(1 + 0.06)^{10} = 1000(1.06)^{10} \approx \$1790.85.$$

La figura 5.8 muestra la gráfica de $S = 1000(1.06)^n$. Observe que conforme pasa el tiempo, el monto compuesto crece de manera impresionante.

b. *Encontrar el interés compuesto.*

Solución: utilizando los resultados del inciso (a), tenemos

$$\begin{aligned}\textbf{interés compuesto} &= \boldsymbol{S - P} \\ &= 1790.85 - 1000 = \$790.85.\end{aligned}$$

Principios en práctica 5
Monto compuesto e interés compuesto

Suponga que \$2000 se invirtieron a 13% capitalizable anualmente. Determine el valor de la inversión después de cinco años. Determine el interés devengado durante los primeros cinco años.

La abreviatura T.P.A. es común, y se encuentra en los contratos de tarjetas de crédito y en anuncios.

Suponga que el capital de \$1000 en el ejemplo 6 se invierte durante 10 años como antes, pero esta vez se compone cada 3 meses (esto es, *trimestralmente*) a una tasa de $1\frac{1}{2}\%$ *por trimestre*. Entonces hay cuatro **periodos de interés** o **periodos de capitalización** o conversión por año, y en 10 años son $10(4) = 40$ periodos de interés. Así, el monto compuesto con $r = 0.015$ ahora es

$$1000(1.015)^{40} \approx \$1814.02,$$

y el interés compuesto es \$814.02. En general, la tasa de interés por periodo de capitalización se establece como una tasa anual. Aquí hablaríamos de una tasa anual de 6% compuesta trimestralmente, de modo que la tasa del interés en cada periodo, o **tasa periódica,** es $6\%/4 = 1.5\%$. Esta tasa anual *cotizada* de 6% se llama **tasa nominal** o **tasa de porcentaje anual (TPA).** A menos que se diga otra cosa, todas las tasas de interés se supondrán tasas anuales (nominales). Así, una tasa de 15% compuesta mensualmente corresponde a una tasa periódica de $15\%/12 = 1.25\%$.

Con base en nuestro estudio, podemos generalizar la ecuación (1). La fórmula

$$S = P(1 + r)^n \qquad (2)$$

proporciona **el monto acumulado *S* de un principal *P* al final de *n* periodos de interés a una tasa periódica de *r*.**

Hemos visto que un capital de \$1000, a una tasa nominal de 6% en un periodo de 10 años, compuesto anualmente, tiene como resultado un interés compuesto de \$790.85, y compuesto cada trimestre da un interés de \$814.02. Es común que para una tasa nominal dada, entre más frecuentemente se componga, mayor será el interés compuesto. Sin embargo, conforme el número de periodos de interés aumente, el efecto tiende a ser menos significativo. Por ejemplo, con una composición semanal el interés compuesto es

$$1000\left(1 + \frac{0.06}{52}\right)^{10(52)} - 1000 \approx \$821.49,$$

y compuesto de forma diaria es

$$1000\left(1+\frac{0.06}{365}\right)^{10(365)}-1000 \approx \$822.03.$$

Aquí la diferencia no es muy significativa.



Advertencia Una tasa nominal de 6% no significa necesariamente que una inversión aumente en 6% en cada año. El incremento depende de la frecuencia de la capitalización.

A veces la frase "valor del dinero" se usa para expresar una tasa de interés anual. Por lo que, al decir que el dinero vale 6% compuesto por trimestre, nos referimos a una tasa anual (nominal) de 6% compuesto cada trimestre.

Principios en práctica 6
Capitalización semestral

Suponga que $2000 se invirtieron a una tasa nominal de 6.5% capitalizable semestralmente. Determine el valor de la inversión después de cinco años. Determine el interés devengado durante los primeros cinco años.

EJEMPLO 7 Capitalización semestral

Suponga que $3000 *se ponen en una cuenta de ahorros. Si el dinero tiene un valor de* 6% *compuesto semestralmente, ¿cuál es el saldo después de* 7 *años?* (*Suponga que no se hacen otros depósitos ni retiros*.)

Solución: aquí $P = 3000$. Con dos periodos de interés por año, tenemos un total de $n = 7(2) = 14$ periodos de interés. La tasa periódica r es $0.06/2 = 0.03$. Por la ecuación (2) tenemos

$$S = 3000(1.03)^{14} \approx \$4537.77.$$

Un estudio más detallado del interés compuesto y de matemáticas financieras se presenta en el capítulo 8.

Crecimiento poblacional

La ecuación (2) puede aplicarse no sólo al aumento del dinero, sino también a otros tipos de crecimiento, como al de población. Por ejemplo, suponga que la población P de una ciudad con 10,000 habitantes, crece a una tasa de 2% por año. Entonces P es una función del tiempo t, donde t está en años. Es común indicar esta dependencia funcional mediante

$$P = P(t).$$

Aquí la letra P se utiliza en dos formas. En el lado derecho, P representa la función; en el lado izquierdo P representa la variable dependiente. De la ecuación (2), tenemos

$$P(t) = 10{,}000(1+0.02)^t = 10{,}000(1.02)^t.$$

Principios en práctica 7
Crecimiento de población

Una compañía nueva con cinco empleados espera que el número de empleados crezca a una tasa de 120% cada año. Determine el número de empleados dentro de cuatro años.

EJEMPLO 8 Crecimiento de población

La población de una ciudad de 10,000 *habitantes crece a razón de* 2% *anual. Calcular la población dentro de* 3 *años*.

Solución: del estudio anterior,

$$P(t) = 10{,}000(1.02)^t.$$

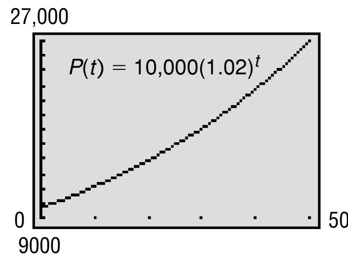


FIGURA 5.9 Gráfica de la función de población $P(t) = 10{,}000(1.02)^t$.

Para $t = 3$ tenemos

$$P(3) = 10{,}000(1.02)^3 \approx 10{,}612.$$

Por tanto, dentro de 3 años la población será de 10,612 habitantes (véase la fig. 5.9).

Función exponencial con base *e*

Uno de los números más útiles como base de una función exponencial es cierto número irracional denotado por la letra e, en honor del matemático suizo Leonardo Euler (1707–1783):

$$e = 2.71828\ldots.$$

La función exponencial con base e se conoce como **función exponencial natural.**

Aunque e puede parecer una base extraña, surge de manera natural en cálculo (como se verá más adelante en otro capítulo). También surge en el análisis económico y en problemas que implican crecimiento o decaimiento naturales, como estudios poblacionales, interés compuesto y decaimiento radiactivo. Valores aproximados de e^x pueden encontrarse con calculadora. La gráfica de $y = e^x$ se muestra en la figura 5.10. La tabla adjunta a la figura indica los valores de y con dos decimales. Por supuesto, la gráfica tiene la forma general de una función exponencial con base mayor que 1.

x	y
−2	0.14
−1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.39

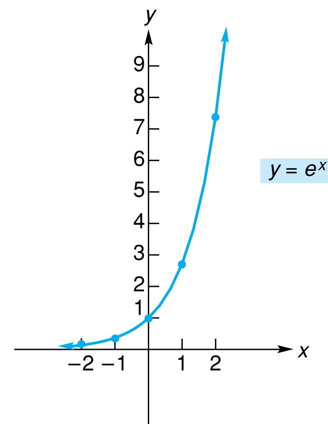


FIGURA 5.10 Gráfica de la función exponencial natural.

Debe familiarizarse con la gráfica de la función exponencial natural de la figura 5.10.

Principios en práctica 8

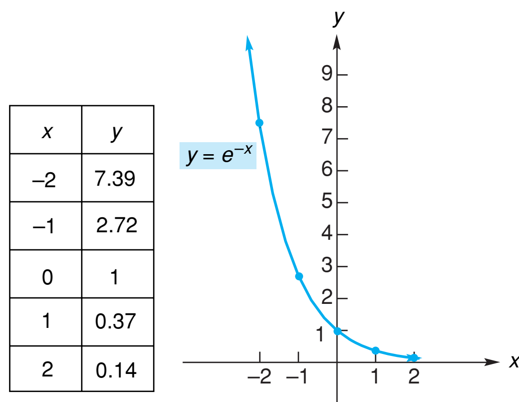
Gráficas de funciones que incluyen a *e*

La disminución multiplicativa en el poder de compra P después de t años de inflación a 6%, puede modelarse por medio de $P = e^{-0.06t}$. Haga la gráfica de la disminución del poder de compra como una función de t años.

EJEMPLO 9 Gráficas de funciones que incluyen a *e*

a. *Graficar* $y = e^{-x}$.

Solución: como $e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ y $0 < \frac{1}{e} < 1$, la gráfica es la de una función exponencial que desciende de izquierda a derecha (véase la fig. 5.11). De manera alterna, podemos considerar la gráfica de $y = e^{-x}$ como una transformación de la gráfica de $f(x) = e^x$. Puesto que $e^{-x} = f(-x)$, la gráfica de $y = e^{-x}$ sólo es la reflexión de la gráfica de f con respecto al eje y (compare las gráficas de las figuras 5.10 y 5.11).



x	y
–2	7.39
–1	2.72
0	1
1	0.37
2	0.14

FIGURA 5.11 Gráfica de $y = e^{-x}$.

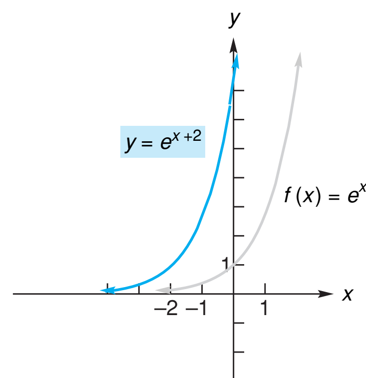


FIGURA 5.12 Gráfica de $y = e^{x+2}$.

b. *Graficar* $y = e^{x+2}$.

Solución: la gráfica de $y = e^{x+2}$ está relacionada con la de $f(x) = e^x$. Como e^{x+2} es $f(x + 2)$, podemos obtener la gráfica de $y = e^{x+2}$ mediante un corrimiento horizontal de dos unidades a la izquierda, de la gráfica de $f(x) = e^x$ (véase la fig. 5.12).

EJEMPLO 10 Crecimiento poblacional

La población proyectada, P, de una ciudad está dada por

$$P = 100{,}000e^{0.05t},$$

donde t es el número de años después de 1990. *Pronosticar la población para el año* 2010.

Solución: el número de años desde 1990 hasta 2010 es 20, de modo que hacemos $t = 20$. Entonces

$$P = 100{,}000e^{0.05(20)} = 100{,}000e^1 = 100{,}000e \approx 271{,}828.$$

Muchos pronósticos están basados en estudios de población.

En estadística, una función importante que se utiliza como modelo para describir la ocurrencia de eventos en la naturaleza es la **función de distribución de Poisson:**

$$f(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, \; \ldots .$$

El símbolo μ (léase "mu") es una letra griega. En ciertas situaciones $f(x)$ da la probabilidad de que exactamente x eventos ocurran en un intervalo de tiempo o espacio. La constante μ es la media o número promedio de ocurrencias en dicho intervalo. El ejemplo siguiente ilustra la distribución de Poisson.

EJEMPLO 11 Hemocitómetro y células

Un hemocitómetro es una cámara de conteo dividida en cuadrados que se utiliza para el estudio del número de estructuras microscópicas en un líquido. En un experimento muy conocido,[3] *células de levadura se diluyeron y mezclaron*

[3]R. R. Sokal y F. J. Rohlf, *Introduction to Biostatistics* (San Francisco: W. H. Freeman and Company, Publishers, 1973).

perfectamente en un líquido, y la mezcla se colocó en un hemocitómetro. Con un microscopio se contaron las células de levadura existentes en cada cuadrado. La probabilidad de que hubiera exactamente x células en cada cuadrado del hemocitómetro se encontró que se ajustaba a una distribución de Poisson con $\mu = 1.8$. *Determinar la probabilidad de hallar exactamente cuatro células en un cuadrado en particular.*

Solución: utilizamos la función de distribución de Poisson con $\mu = 1.8$ y $x = 4$:

$$f(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!},$$

$$f(4) = \frac{e^{-1.8}(1.8)^4}{4!} \approx 0.072.$$

Por ejemplo, esto significa que en 400 cuadrados *esperaríamos* que $400(0.072) \approx 29$ cuadrados contuvieran exactamente 4 células (en el experimento, en 400 cuadrados el número real observado fue de 30).

Decaimiento radiactivo

Los elementos radiactivos tienen la particularidad de que su cantidad disminuye con respecto al tiempo. Decimos que un elemento radiactivo *decae*. Si N es la cantidad en el tiempo t, entonces puede demostrarse que

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{3}$$

donde N_0 y λ (letra griega "lambda") son constantes positivas. Observe que N incluye una función exponencial de t. Decimos que N sigue una **ley de decaimiento exponencial.** Si $t = 0$, entonces $N = N_0 e^0 = N_0 \cdot 1 = N_0$. Así, la constante N_0 representa la cantidad del elemento presente en el tiempo $t = 0$ y se le llama la **cantidad inicial.** La constante λ depende del elemento particular de que se trate, y es llamada la **constante de decaimiento.**

Como N disminuye conforme el tiempo pasa, suponga que T es el tiempo que tarda el elemento en disminuir a la mitad de su cantidad inicial. Entonces en el $t = T$, tenemos $N = N_0/2$. La ecuación (3) implica que

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}.$$

Ahora utilizamos este hecho para demostrar que en *cualquier* intervalo de longitud T, decaerá la mitad de la cantidad del elemento. Considere el intervalo desde el tiempo t hasta $t + T$, que tiene longitud T. En el tiempo t, la cantidad de elemento es $N_0 e^{-\lambda t}$, y en el tiempo $t + T$ es

$$N_0 e^{-\lambda(t+T)} = N_0 e^{-\lambda t} e^{-\lambda T} = (N_0 e^{-\lambda T})e^{-\lambda t}$$

$$= \frac{N_0}{2} e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}(N_0 e^{-\lambda t}),$$

que es la mitad de la cantidad en el tiempo t. Esto significa que si la cantidad inicial presente N_0 fuese de 1 gramo, en el tiempo T habría $\frac{1}{2}$ gramo, en el tiempo $2T$ habría $\frac{1}{4}$ de gramo, y así sucesivamente. Este valor de T se conoce como

la **vida media** del elemento radiactivo. La figura 5.13 muestra una gráfica de decaimiento radiactivo.

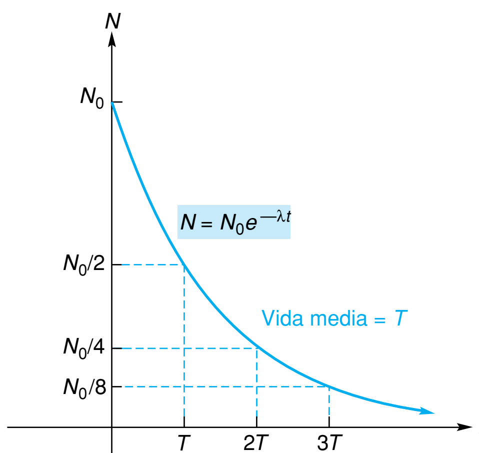


FIGURA 5.13 Decaimiento radiactivo.

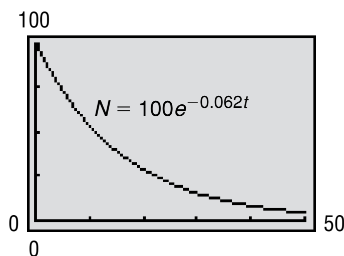


FIGURA 5.14 Gráfica de la función de decaimiento radiactivo $N = 100e^{-0.062t}$.

EJEMPLO 12 Decaimiento radiactivo

Un elemento radiactivo decae de modo que después de t días el número de miligramos presentes está dado por

$$N = 100e^{-0.062t}.$$

a. *¿Cuántos miligramos están presentes inicialmente?*

Solución: esta ecuación tiene la forma de la ecuación (3); $N = N_0e^{-\lambda t}$, donde $N_0 = 100$ y $\lambda = 0.062$. N_0 es la cantidad inicial y corresponde a $t = 0$. Así, 100 miligramos están presentes inicialmente (véase la fig. 5.14).

b. *¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 días?*

Solución: cuando $t = 10$,

$$N = 100e^{-0.062(10)} = 100e^{-0.62} \approx 53.8.$$

Por consiguiente, en forma aproximada, 53.8 miligramos están presentes después de 10 días.

Ejercicio 5.1

En los problemas del 1 al 12 grafique cada función.

1. $y = f(x) = 4^x$.
2. $y = f(x) = 3^x$.
3. $y = f(x) = (\frac{1}{3})^x$.
4. $y = f(x) = (\frac{1}{4})^x$.
5. $y = f(x) = 2(\frac{1}{4})^x$.
6. $y = f(x) = 3(2)^x$.
7. $y = f(x) = 3^{x+2}$.
8. $y = f(x) = 2^{x-1}$.
9. $y = f(x) = 2^x - 1$.
10. $y = f(x) = 3^{x-1} - 1$.
11. $y = f(x) = 2^{-x}$.
12. $y = f(x) = \frac{1}{5}(3^{x/2})$.

Los problemas 13 y 14 se refieren a la figura 5.15, que muestra las gráficas de $y = 0.4^x$, $y = 2^x$ y $y = 5^x$.

13. De las curvas A, B y C, ¿cuál es la gráfica de $y = 5^x$?

14. De las curvas A, B y C, ¿cuál es la gráfica de $y = 0.4^x$?

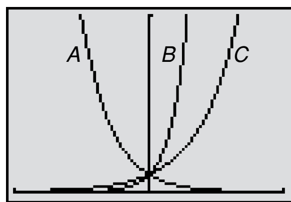


FIGURA 5.15 Diagrama para los problemas 13 y 14.

15. Población La población proyectada de una ciudad está dada por $P = 125{,}000(1.11)^{t/20}$, donde t es el número de años a partir de 1995. ¿Cuál es la población estimada para el año 2015?

16. Población Para cierta ciudad, la población P crece a una tasa de 2% por año. La fórmula $P = 1{,}000{,}000(1.02)^t$ proporciona la población t años después de 1998. Determine la población en (a) 1999 y (b) 2000.

17. Aprendizaje por asociación de pares En un experimento psicológico sobre aprendizaje,[4] se pidió a un conjunto de personas proporcionar respuestas específicas después de recibir ciertos estímulos. Cada estímulo fue un par de letras y cada respuesta era un dígito, 1 o 2. Después de cada respuesta se le decía al sujeto la respuesta correcta. En este experimento de aprendizaje denominado *asociación de pares*, la probabilidad teórica P de que el sujeto dé la respuesta correcta en el n-ésimo ensayo está dada por

$$P = 1 - \tfrac{1}{2}(1 - c)^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad 0 < c < 1.$$

Encuentre P cuando $n = 1$.

18. Exprese $y = 2^{3x}$ como una función exponencial de base 8.

En los problemas del 19 al 27 encuentre (a) el monto compuesto y (b) el interés compuesto para la inversión y tasa anual dadas.

19. \$4000 durante 7 años a 6% compuesto anualmente.

20. \$5000 durante 20 años a 5% compuesto anualmente.

21. \$700 durante 15 años a 7% compuesto cada semestre.

22. \$4000 durante 12 años a 7.5% compuesto cada semestre.

23. \$4000 durante 15 años a 8.5% compuesto trimestralmente.

24. \$900 durante 11 años a 10% compuesto cada trimestre.

25. \$5000 durante 2.5 años a 9% compuesto mensualmente.

26. \$500 durante 5 años a 11% compuesto semestralmente.

27. \$8000 durante 3 años a 6.25% compuesto diariamente (suponga que hay 365 días en un año).

28. Inversiones Suponga que \$1000 se colocan en una cuenta de ahorros que gana intereses a una tasa de 5% compuesto semestralmente. (a) ¿Cuál es el valor de la cuenta al final de 4 años? (b) Si la cuenta hubiera generado intereses a una tasa de 5% compuesto anualmente, ¿cuál sería su valor después de 4 años?



29. Inversión Un certificado de depósito de \$6000 se compra en \$6000 y se conserva durante 7 años. Si el certificado gana un 8% compuesto cada trimestre, ¿cuál es su valor al cabo de 7 años?

30. Crecimiento poblacional La población de una ciudad de 5000 habitantes crece a razón de 3% anual. (a) Determine una ecuación que proporcione la población después de t años a partir de ahora. (b) Determine la población 3 años después de ahora. Obtenga la respuesta para (b) al entero más cercano.

31. Crecimiento de bacterias En un cultivo se tienen bacterias cuyo número se incrementa a razón de 5% cada hora. Al inicio estaban presentes 400 bacterias. (a) Determine una ecuación que dé el número, N, de bacterias presentes después de t horas. (b) ¿Cuántas bacterias están presentes después de 1 hora? (c) ¿Después de 4 horas? Dé sus respuestas a (b) y (c) al entero más cercano.

32. Reducción de bacterias Cierta medicina reduce las bacterias presentes en una persona en 10% cada hora. Actualmente, están presentes 100,000 bacterias. Construya una tabla de valores para el número de bacterias presentes en cada hora, desde 0 hasta 4 horas. Para cada hora, escriba una expresión para el número de bacterias como un producto de 100,000 y una potencia de $\frac{9}{10}$. Utilice las expresiones para construir una entrada en su tabla para el número de bacterias después de t horas. Escriba una función N para el número de bacterias después de t horas.

33. Reciclado Suponga que la cantidad de plástico que se reciclará aumenta 30% cada año. Construya una tabla del factor por el cual aumenta el reciclado sobre la cantidad original para 0 a 3 años. Para cada año, escriba una expresión para el aumento como una potencia de alguna base. ¿Qué base utilizará? ¿Cómo se relaciona esa base con el problema? Utilice su tabla para graficar el aumento multiplicativo como una función de los años. Utilice su gráfica para determinar cuando el reciclado se triplica.

34. Crecimiento poblacional Las ciudades A y B en la actualidad tienen poblaciones de 70,000 y 60,000 habitantes, respectivamente. La ciudad A crece a razón de 4% anual y la de B crece a razón de 5% anual. Determine la diferencia entre las poblaciones al final de 5 años. Dé su respuesta al entero más cercano.

[4]D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1973).

Los problemas 35 y 36 tratan sobre la disminución poblacional. Si una población disminuye a una tasa de r por periodo, entonces la población P después de t periodos está dada por

$$P = P_0(1 - r)^t.$$

donde P_0 *es la población inicial (la población cuando* $t = 0$*).*

35. Población A causa de una recesión económica, la población de cierta área urbana disminuye a razón de 1% anual. Al inicio la población era de 100,000 habitantes. ¿Cuál es la población después de 3 años?

36. Fuerza de trabajo En un esfuerzo por disminuir los costos, una compañía reducirá su fuerza de trabajo a razón de 2% mensual durante 12 meses. Si actualmente emplea a 500 trabajadores, ¿cuántos trabajadores tendrá dentro de 12 meses? Redondee al entero más cercano.

En los problemas del 37 al 40 utilice una calculadora para encontrar el valor (redondeado a cuatro decimales) de cada expresión.

37. $e^{1.5}$. **38.** $e^{3.4}$. **39.** $e^{-0.7}$. **40.** $e^{-3/4}$.

En los problemas 41 y 42 grafique las funciones.

41. $y = -e^x$. **42.** $y = 2e^x$.

43. Llamadas telefónicas La probabilidad de que un operador de teléfonos reciba exactamente x llamadas durante cierto periodo está dada por

$$P = \frac{e^{-3}3^x}{x!}.$$

Encuentre la probabilidad de que el operador reciba exactamente tres llamadas. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

44. Distribución normal Una función importante utilizada en economía y decisiones de negocios es la *función de distribución normal*, que en forma estándar es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{1}{2})x^2}.$$

Evalué $f(0)$, $f(-1)$ y $f(1)$. Redondee sus respuestas a tres decimales.

45. Exprese e^{kt} en la forma b^t.

46. Exprese $\frac{1}{e^x}$ en la forma b^x.

47. Decaimiento radiactivo Un elemento radiactivo tiene la característica de que se tienen N gramos de él después de t horas, donde

$$N = 10e^{-0.028t}.$$

(a) ¿Cuántos gramos están presentes inicialmente? (b) A la décima de gramo más cercana, ¿cuántos gramos permanecen después de 10 horas? (c) ¿Y de 50 horas? (d) Con base en su respuesta de la parte (c), ¿cuál es su estimación de la vida media del elemento?

48. Decaimiento radiactivo A un cierto tiempo hay 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Ésta decae de modo que después de t años el número de miligramos presentes, N, está dado por

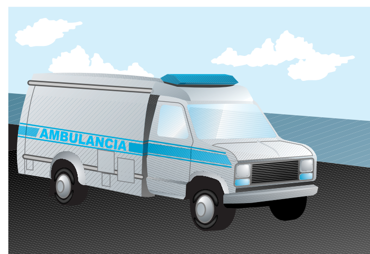
$$N = 100e^{-0.035t}.$$

¿Cuántos miligramos están presentes después de 20 años? Dé su respuesta al miligramo más cercano.

49. Decaimiento radiactivo Si una sustancia tiene una vida media de 8 años, ¿cuánto tiempo toma para que un gramo decaiga a $\frac{1}{16}$ de gramo?

50. Mercadotecnia Una compañía de ventas por correo se anuncia en una revista nacional. La compañía determina que de todas las ciudades pequeñas, el porcentaje (dado como un decimal) en el que exactamente x personas respondan a un anuncio se ajusta a una distribución de Poisson con $\mu = 0.5$. ¿En qué porcentaje de ciudades pequeñas puede esperar la compañía que respondan exactamente dos personas? Redondee su respuesta a cuatro decimales.

51. Admisión en cuartos de urgencia Suponga que el número de pacientes admitidos en un cuarto de urgencia de hospital durante cierta hora del día tiene una distribución de Poisson con media 4. Encuentre la probabilidad de que durante esa hora haya exactamente dos pacientes de urgencia. Redondee su respuesta a cuatro decimales.



52. Grafique $y = 10^x$ y $y = (\frac{1}{10})^x$ en la misma pantalla. Determine el punto de intersección.

53. Grafique $y = 2^x$ y $y = 4 \cdot 2^x$ en la misma pantalla. Parece que la gráfica de $y = 4 \cdot 2^x$ es la gráfica de $y = 2^x$ recorrida dos unidades a la izquierda. En forma algebraica pruebe que esto es cierto.

54. Para $y = 7^x$, encuentre x si $y = 4$. Redondee su respuesta a dos decimales.

55. Para $y = 2^x$, determine x si $y = 9$. Redondee su respuesta a dos decimales.

56. Crecimiento de células En un cultivo de células, su número se incrementa a razón de 7% por hora. Al inicio están presentes 1000 células. ¿Después de cuántas horas completas habrá al menos 3000 células?

57. Crecimiento de bacterias Con referencia al ejemplo 1, ¿cuánto tiempo tomará para que estén presentes 1000 bacterias? Redondee su respuesta a la décima de minuto más cercana.

58. Ecuación de demanda La ecuación de demanda de un juguete nuevo es

$$q = 10{,}000(0.95123)^p.$$

a. Evalúe q al entero más cercano cuando $p = 10$.

b. Convierta la ecuación de demanda a la forma

$$q = 10{,}000e^{-0.05p}.$$

[*Sugerencia:* encuentre un número x tal que $0.95123 \approx e^{-x}$.]

c. Utilice la ecuación de la parte (b) para evaluar q al entero más cercano cuando $p = 10$. Sus respuestas para las partes (a) y (c) deben ser iguales.

59. Inversión Si $3000 se invierten en una cuenta de ahorros que genera interés a 4.5% compuesto anualmente, ¿después de cuántos años completos la cantidad al menos se duplicará?

OBJETIVO Introducir las funciones logarítmicas y sus gráficas. Las propiedades de los logaritmos se estudiarán en la sección 5.3.

5.2 Funciones logarítmicas

En esta sección las funciones de interés para nosotros son las *funciones logarítmicas*, las cuales están relacionadas con las funciones exponenciales. La figura 5.16(a) muestra la gráfica de la función exponencial $s = f(t) = 2^t$. Aquí f convierte un número de entrada t en un número *positivo* de salida s:

$$f: t \rightarrow s \quad \text{en donde} \quad s = 2^t.$$

Por ejemplo, f convierte el 2 en 4.

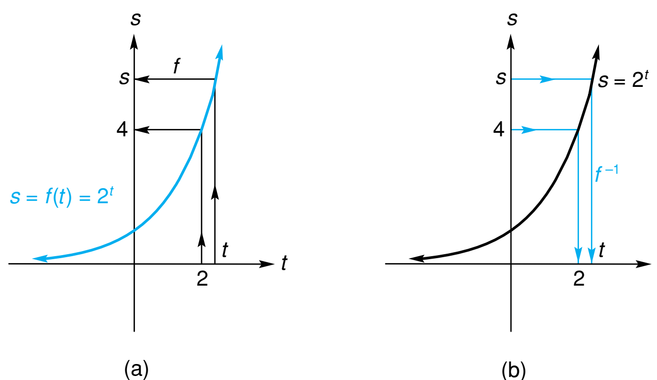


FIGURA 5.16 Gráfica de $s = 2^t$.

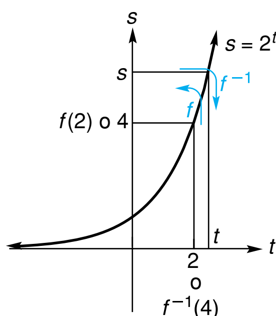


FIGURA 5.17 Acciones de f y f^{-1}.

En la misma curva de la figura 5.16(b), puede verse de las flechas pequeñas que a cada número positivo s en eje vertical, podemos asociar exactamente un valor de t. Por ejemplo, con $s = 4$ asociamos $t = 2$. Si pensamos en s como una entrada y t como una salida, tenemos una función que envía cada s a una t. Denotaremos a esta función por f^{-1} (se lee "f inversa"):[5]

$$f^{-1}: s \rightarrow t \quad \text{en donde} \quad s = 2^t.$$

Así, $f^{-1}(s) = t$. El dominio de f^{-1} es el rango de f (todos los números reales positivos), y el rango de f^{-1} es el dominio de f (todos los números reales).

Las funciones f y f^{-1} están relacionadas. La figura 5.17 muestra que f^{-1} *invierte* la acción de f, y viceversa. Por ejemplo

$$f \text{ envía el 2 al 4} \quad \text{y} \quad f^{-1} \text{ envía el 4 al 2.}$$

[5] El -1 en f^{-1} no es un exponente, de modo que f^{-1} *no* significa $\frac{1}{f}$.

Más generalmente, $f(t) = s$ y $f^{-1}(s) = t$. En términos de composición, cuando se aplica $f^{-1} \circ f$ o bien $f \circ f^{-1}$ a un número de entrada, ese mismo número es obtenido en la salida a causa de los efectos inversos de f y f^{-1}. Esto es,

$$(f^{-1} \circ f)(t) = f^{-1}(f(t)) = f^{-1}(s) = t$$

y

$$(f \circ f^{-1})(s) = f(f^{-1}(s)) = f(t) = s.$$

Damos un nombre especial a f^{-1}: **función logarítmica de base 2** y se escribe $\log_2$ [se lee "logaritmo (o log) base 2"]. Así $f^{-1}(4) = \log_2 4 = 2$ y decimos que el *logaritmo* en base 2 de 4 es 2.

En resumen

$$\text{si } s = 2^t, \quad \text{entonces} \quad t = \log_2 s. \tag{1}$$

Ahora generalizamos nuestro estudio a otras bases. En la ecuación (1), reemplazando 2 por b, s por x y t por y se obtiene la siguiente definición.

Definición

La ***función logarítmica*** de base b, donde $b > 0$ y $b \neq 1$, se denota por $\log_b$ y se define como

$$y = \log_b x \quad \textit{si y sólo si} \quad b^y = x.$$

El dominio de $\log_b$ es el conjunto de todos los números reales positivos y el rango es el conjunto de todos los números reales.

Puesto que una función logarítmica invierte la acción de la correspondiente función exponencial y viceversa, cada función logarítmica es llamada la *inversa* de su correspondiente función logarítmica.

Recuerde, cuando decimos que y es el logaritmo base b de x, queremos decir que b elevado a la potencia y es igual a x. Esto es,

$$y = \log_b x \quad \text{significa} \quad b^y = x.$$

En este sentido, *un logaritmo de un número es un exponente:* $\log_b x$ es la potencia a la cual debe elevarse b para obtener x. Por ejemplo,

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{ya que} \quad 2^3 = 8.$$

Decimos que $\log_2 8 = 3$ es la **forma logarítmica** de la **forma exponencial** $2^3 = 8$ (véase la fig. 5.18).

Forma logarítmica y exponencial

Logaritmo → $\log_2 8 = 3$ (base: 2)

Exponente → $2^3 = 8$ (base: 2)

FIGURA 5.18 Un logaritmo puede considerarse un exponente.

■ *Principios en práctica 1*

Conversión de forma exponencial a forma logarítmica

Si las bacterias se han estado duplicando cada hora y la cantidad actual es 16 veces la cantidad que se midió al inicio, entonces la situación puede representarse por $16 = 2^t$. Represente esta ecuación en forma logarítmica. ¿Qué representa t?

EJEMPLO 1 Conversión de forma exponencial a forma logarítmica

	Forma exponencial		*Forma logarítmica*
a. Como	$5^2 = 25$,	se concluye que	$\log_5 25 = 2$.
b. Como	$3^4 = 81$,	se concluye que	$\log_3 81 = 4$.
c. Como	$10^0 = 1$,	se concluye que	$\log_{10} 1 = 0$.

■

Principios en práctica 2

Conversión de forma logarítmica a forma exponencial

Un terremoto que midió 8.3 en la escala de Richter puede representarse por $8.3 = \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$, en donde I es la intensidad del terremoto e I_0 es la intensidad de un terremoto de nivel cero. Represente esta ecuación en forma exponencial.

EJEMPLO 2 Conversión de forma logarítmica a forma exponencial

Forma logarítmica		*Forma exponencial*
a. $\log_{10} 1000 = 3$	significa	$10^3 = 1000.$
b. $\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$	significa	$64^{1/2} = 8.$
c. $\log_2 \frac{1}{16} = -4$	significa	$2^{-4} = \frac{1}{16}.$

Principios en práctica 3

Gráfica de una función logarítmica con $b > 1$

Suponga que una planta de reciclado encontró que la cantidad de material que se reciclará ha aumentado en 50% cada año, desde el primer año de operación de la planta. Haga la gráfica de cada año como una función del aumento multiplicativo en el reciclado desde el primer año. Marque la gráfica con el nombre de la función.

EJEMPLO 3 Gráfica de una función logarítmica con $b > 1$

Graficar la función $y = \log_2 x$.

Solución: puede ser difícil sustituir valores de x y después encontrar los correspondientes valores de y. Por ejemplo, si $x = 3$, entonces $y = \log_2 3$, lo que no se determina con facilidad. Una manera más sencilla para trazar puntos es utilizar la forma exponencial equivalente $x = 2^y$. Seleccionamos valores de y y encontramos los correspondientes valores de x. Por ejemplo, si $y = 0$, entonces $x = 1$. Esto da el punto $(1, 0)$. Otros puntos se muestran en la figura 5.19.

x	y
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

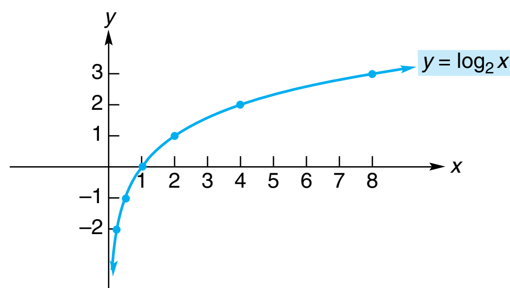


FIGURA 5.19 Gráfica de $y = \log_2 x$.

De la gráfica puede deducirse que el dominio es el conjunto de todos lo números reales positivos. Por tanto, *los números negativos y el cero no tienen logaritmos*. El rango es el conjunto de todos los números reales. Observe que la gráfica asciende de izquierda a derecha. Los números entre 0 y 1 tienen logaritmos negativos, y entre más cercano al cero es el número su logaritmo es más negativo. Los números mayores que 1 tienen logaritmos positivos. El logaritmo de 1 es 0, que corresponde a la intersección x $(1, 0)$. No existe y. Esta gráfica es representativa para una función logarítmica con $b > 1$.

EJEMPLO 4 Gráfica de una función logarítmica con $0 < b < 1$

Graficar $y = \log_{1/2} x$.

Solución: para trazar puntos usamos la forma exponencial equivalente $x = (\frac{1}{2})^y$ (véase la fig. 5.20).

■ Principios en práctica 4

Gráfica de una función logarítmica con $0 < b < 1$

Suponga que un bote se deprecia 20% cada año. Haga la gráfica del número de años que se conserva el bote como una función de la disminución multiplicativa de su valor original. Marque la gráfica con el nombre de la función.

x	y
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	−1
4	−2
8	−3

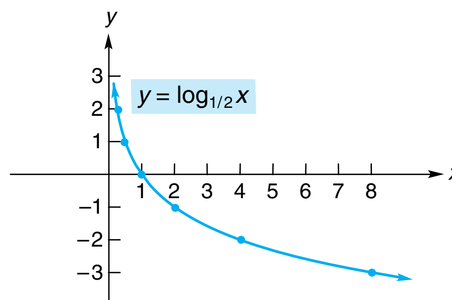
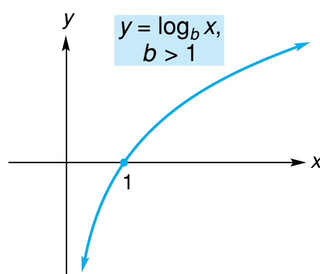


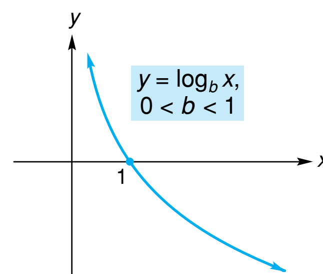
FIGURA 5.20 Gráfica de $y = \log_{1/2}x$.

A partir de la gráfica, podemos ver que el dominio es el conjunto de todos los números reales positivos y el rango todos los números reales. La gráfica desciende de izquierda a derecha. Los números entre 0 y 1 tienen logaritmos positivos y, entre más cerca estén del 0, mayor es su logaritmo. Los números mayores que 1 tienen logaritmos negativos. El logaritmo de 1 es cero y corresponde a la intersección x $(1, 0)$. Esta gráfica es representativa para una función logarítmica con $0 < b < 1$.

Resumiendo los resultados de los ejemplos 3 y 4, podemos decir que la gráfica de una función logarítmica tiene una de dos formas generales, dependiendo si $b > 1$ o si $0 < b < 1$ (véase la fig. 5.21). Para $b > 1$ la gráfica asciende de izquierda a derecha; conforme x se acerca a 0, los valores de la función disminuyen sin una cota y la gráfica se hace cada vez más próxima al eje y. Para $0 < b < 1$, la gráfica desciende de izquierda a derecha; conforme x se acerca a cero, los valores de la función crecen sin una cota y la gráfica se acerca al eje y. En cada caso note que:



(a)



(b)

FIGURA 5.21 Formas generales de $y = \log_b x$.

1. El dominio de una función logarítmica es el intervalo $(0, \infty)$. Esto es, no existe logaritmo de números negativos ni del cero.
2. El rango es el intervalo $(-\infty, \infty)$.
3. El logaritmo de 1 es 0, que corresponde a la intersección x $(1, 0)$.

Los logaritmos de base 10 son llamados **logaritmos comunes.** Era frecuente utilizarlos para propósitos de cómputo antes de la época de las calculadoras. En general, de la notación se omite el subíndice 10:

$$\log x \quad \text{significa} \quad \log_{10} x.$$

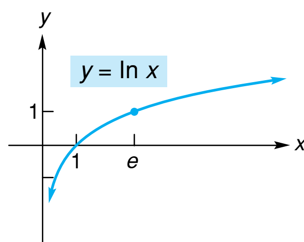


FIGURA 5.22 Gráfica de la función logaritmo natural.

Debe familiarizarse con la gráfica de la función logaritmo natural de la figura 5.22.

Recuerde: Un logaritmo (en cierto sentido) es un exponente.

Los logaritmos de base e son importantes en el cálculo y se conocen como **logaritmos naturales.** Usamos la notación "ln" para tales logaritmos:

$$\ln x \quad \text{significa} \quad \log_e x.$$

El símbolo ln x puede leerse "ele ene de x". Su calculadora da valores aproximados para los logaritmos naturales y comunes. Por ejemplo, verifique que $\ln 2 \approx 0.69315$. Esto significa que $e^{0.69315} \approx 2$. La figura 5.22 muestra la gráfica de $y = \ln x$. Ya que $e > 1$, la gráfica tiene la forma general de una función logarítmica con $b > 1$ [véase la fig. 5.21(a)] y asciende de izquierda a derecha.

> ***Principios en práctica 5***
> **Cálculo de logaritmos**
>
> El número de años que le toma a una cantidad invertida a una tasa anual de r y compuesta de manera continua, cuadriplicar su valor es una función de la tasa anual r dada por $t(r) = \frac{\ln 4}{r}$. Utilice una calculadora para encontrar la tasa necesaria para cuadriplicar una inversión en 10 años.

EJEMPLO 5 Cálculo de logaritmos

a. *Encontrar* log 100.

Solución: aquí la base es 10. Por lo que log 100 es el exponente al que hay que elevar a 10 para obtener 100. Como $10^2 = 100$, $\log = 2$.

b. *Encontrar* ln 1.

Solución: aquí la base es e. Puesto que $e^0 = 1$, $\ln 1 = 0$.

c. *Encontrar* log 0.1.

Solución: como $0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$, $\log 0.1 = -1$.

d. *Encontrar* $\ln e^{-1}$.

Solución: como $\ln e^{-1}$ es el exponente al que se debe elevar e para obtener e^{-1}, es claro que $\ln e^{-1} = -1$.

e. *Encontrar* $\log_{36} 6$.

Solución: como $36^{1/2}$ (o $\sqrt{36}$) es 6, $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$.

Muchas ecuaciones que incluyen formas logarítmica o exponencial, pueden resolverse para una cantidad desconocida transformando primero de la forma logarítmica a la exponencial o viceversa. El ejemplo 6 lo ilustra.

> ***Principios en práctica 6***
> **Solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales**
>
> El aumento multiplicativo m de un monto invertido a una tasa anual de r, capitalizable de manera continua durante un tiempo t está dado por $m = e^{rt}$. ¿Qué tasa anual es necesaria para triplicar la inversión en 12 años?

EJEMPLO 6 Solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

a. *Resolver* $\log_2 x = 4$.

Solución: podemos obtener una expresión explícita para x escribiendo la ecuación en forma exponencial. Esto da

$$2^4 = x,$$

de modo que $x = 16$.

b. *Resolver* $\ln(x + 1) = 7$.

Solución: la forma exponencial da $e^7 = x + 1$. Así, $x = e^7 - 1$.

c. *Resolver* $\log_x 49 = 2$.

Solución: en la forma exponencial, $x^2 = 49$, de modo que $x = 7$. Rechazamos $x = -7$, ya que un número negativo no puede ser una base de una función logarítmica.

d. *Resolver* $e^{5x} = 4$.

Solución: podemos obtener una expresión explícita para x escribiendo la ecuación en forma logarítmica. Tenemos

$$\ln 4 = 5x,$$

$$x = \frac{\ln 4}{5}.$$

Decaimiento radiactivo y vida media

Del estudio de decaimiento de un elemento radiactivo de la sección 5.1, sabemos que la cantidad presente en el instante t está dada por

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (2)$$

donde N_0 es la cantidad inicial (la cantidad en el instante $t = 0$) y λ la constante de decaimiento. Ahora determinemos la vida media T del elemento. En el instante T, la mitad de la cantidad inicial está presente. Esto es, cuando $t = T$, entonces $N = N_0/2$. Así, de la ecuación (2), tenemos

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}.$$

Resolviendo para T se obtiene

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T},$$

$$2 = e^{\lambda T} \qquad \text{(tomando recíprocos de ambos lados).}$$

Para obtener una expresión explícita para T, convertiremos a la forma logarítmica. Esto da

$$\lambda T = \ln 2,$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Resumiendo, tenemos lo siguiente:

Si un elemento radiactivo tiene una constante de decaimiento λ, entonces la vida media T del elemento está dada por:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (3)$$

EJEMPLO 7 Determinación de la vida media

Una muestra de 10 miligramos de polonio 210 radiactivo (^{210}Po) *decae de acuerdo con la ecuación*

$$N = 10e^{-0.00501t},$$

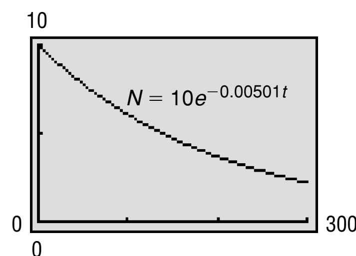


FIGURA 5.23 Función de decaimiento radiactivo $N = 10e^{-0.00501t}$.

donde N es el número de miligramos presentes después de t días (véase la fig. 5.23). *Determinar la vida media del* ^{210}Po.

Solución: aquí la constante de decaimiento es $\lambda = 0.00501$. Por la ecuación (3), la vida media T está dada por:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0.00501} \approx 138.4 \text{ días.}$$

Ejercicio 5.2

En los problemas del 1 al 8 exprese cada forma logarítmica de manera exponencial y cada forma exponencial de manera logarítmica.

1. $10^4 = 10{,}000$. **2.** $2 = \log_{12} 144$. **3.** $\log_2 64 = 6$. **4.** $8^{2/3} = 4$.
5. $e^2 = 7.3891$. **6.** $e^{0.33647} = 1.4$. **7.** $\ln 3 = 1.09861$. **8.** $\log 5 = 0.6990$.

En los problemas del 9 al 16 grafique las funciones.

9. $y = f(x) = \log_3 x$. **10.** $y = f(x) = \log_4 2x$. **11.** $y = f(x) = \log_{1/4} x$. **12.** $y = f(x) = \log_{1/3} x$.
13. $y = f(x) = \log_2(x - 4)$. **14.** $y = f(x) = \log_2(-x)$. **15.** $y = f(x) = -2 \ln x$. **16.** $y = f(x) = \ln(x + 2)$.

En los problemas del 17 al 28 evalúe la expresión.

17. $\log_6 36$. **18.** $\log_2 32$. **19.** $\log_3 27$. **20.** $\log_{16} 4$.
21. $\log_7 7$. **22.** $\log 10{,}000$. **23.** $\log 0.01$. **24.** $\log_2 \sqrt{2}$.
25. $\log_5 1$. **26.** $\log_5 \frac{1}{25}$. **27.** $\log_2 \frac{1}{8}$. **28.** $\log_4 \sqrt[5]{4}$.

En los problemas del 29 al 48 encuentre x.

29. $\log_3 x = 2$. **30.** $\log_2 x = 8$. **31.** $\log_5 x = 3$. **32.** $\log_4 x = 0$.
33. $\log x = -1$. **34.** $\ln x = 1$. **35.** $\ln x = -3$. **36.** $\log_x 100 = 2$.
37. $\log_x 8 = 3$. **38.** $\log_x 3 = \frac{1}{2}$. **39.** $\log_x \frac{1}{6} = -1$. **40.** $\log_x y = 1$.
41. $\log_3 x = -4$. **42.** $\log_x(2x - 3) = 1$. **43.** $\log_x(6 - x) = 2$. **44.** $\log_8 64 = x - 1$.
45. $2 + \log_2 4 = 3x - 1$. **46.** $\log_3(x + 2) = -2$. **47.** $\log_x(2x + 8) = 2$. **48.** $\log_x(30 - 4x - x^2) = 2$.

En los problemas del 49 al 52 encuentre x y y, además exprese su respuesta en términos de logaritmos naturales.

49. $e^{3x} = 2$. **50.** $0.1e^{0.1x} = 0.5$. **51.** $e^{2x-5} + 1 = 4$. **52.** $6e^{2x} - 1 = \frac{1}{2}$.

En los problemas del 53 al 56 utilice su calculadora para encontrar el valor aproximado de cada expresión. Redondee su respuesta a cinco decimales.

53. $\ln 5$. **54.** $\ln 3.12$. **55.** $\ln 7.39$. **56.** $\ln 9.98$.

---

57. Química Si el pH de una sustancia es 5.5, entonces la concentración de iones de hidrógeno, h, en átomos gramo por litro puede representarse por medio de $5.5 = \log \frac{1}{h}$. Represente esta ecuación en forma exponencial.

58. Apreciación Suponga que una antigüedad gana en valor 10% cada año. Haga una gráfica del número de años que se retiene como una función del aumento multiplicativo de su valor original. Marque la gráfica con el nombre de la función.

59. Ecuación de costo Para una compañía, el costo para producir q unidades de un producto está dado por la ecuación

$$c = (2q \ln q) + 20.$$

Evalúe el costo cuando $q = 6$ (redondee su respuesta a dos decimales).

60. Ecuación de oferta La ecuación de oferta de un fabricante es

$$p = \log\left(10 + \frac{q}{2}\right),$$

donde q es el número de unidades ofrecidas con el precio p por unidad. ¿A qué precio el fabricante ofrecerá 1980 unidades?

61. Terremotos La magnitud, M, de un terremoto y su energía, E, están relacionadas por la ecuación[6]

$$1.5M = \log\left(\frac{E}{2.5 \times 10^{11}}\right),$$

en donde M está dada en términos de la escala de Ritcher de 1958 y E está en ergios. Resuelva la ecuación para E.

62. Biología Para cierta población de células, el número de células en el instante t está dado por $N = N_0(2^{t/k})$, *donde* N_0 es el número de células en $t = 0$ y k es una constante positiva. (a) Encuentre N cuando $t = k$. (b) ¿Cuál es el significado de k? (c) Demuestre que el tiempo que toma tener una población de N_1 puede escribirse como

$$t = k \log_2 \frac{N_1}{N_0}.$$

63. Ciencias de la tierra La presión atmosférica, p, varía con la altitud, h, sobre la superficie de la Tierra. Para altitudes hasta casi los 10 kilómetros, la presión p (en milímetros de mercurio) está dada en forma aproximada por

$$p = 760e^{-0.125h},$$

donde h está en kilómetros. (a) Encuentre p a una altitud de 7.3 km. (b) ¿A qué altitud la presión será de 400 mm de mercurio?

64. Trabajo El trabajo, en joules, realizado por una muestra de 1 kg de gas nitrógeno cuando su volumen cambia de un valor inicial V_i a un valor final V_f durante un proceso a temperatura constante, está dado por

$$W = 8.1 \times 10^4 \ln \frac{V_f}{V_i}.$$

Si tal muestra se expande de un volumen de 3 litros a un volumen de 7 litros, determine el trabajo realizado por el gas, aproxime a la centésima de joule más cercana.

[6] K. E. Bullen, An Introduction to the *Theory of Seismology* (Cambridge, Reino Unido: Cambridge at the University Press, 1963).

65. Bienes secundarios En un estudio de bienes secundarios, Persky[7] resuelve una ecuación de la forma

$$u_0 = A \ln(x_1) + \frac{x_2^2}{2}$$

para x_1, donde x_1 y x_2 son cantidades de dos productos, u_0 es una medida de la utilidad y A es una constante positiva. Determine x_1.

66. Decaimiento radiactivo Una muestra de un gramo de plomo 211 radiactivo (^{211}Pb) decae de acuerdo con la ecuación $N = e^{-0.01920t}$, donde N es el número de gramos presentes después de t minutos. Determine la vida media del ^{211}Pb a la décima de minuto más cercana.

67. Decaimiento radiactivo Una muestra de 100 miligramos de actinio 277 radiactivo (^{227}Ac) decae de acuerdo con la ecuación

$$N = 100e^{-0.03194t},$$

donde N es el número de miligramos presentes después de t años. Determine la vida media del ^{227}Ac a la décima de año más cercana.

68. Si $\log_y x = 3$ y $\log_z x = 2$, encuentre una fórmula para z como una función explícita que dependa sólo de y.

69. Despeje a y como una función explícita de x si

$$x + 2e^{3y} - 10 = 0.$$

70. Suponga que $y = f(x) = x \ln x$. (*a*) ¿Para qué valores de x es $y < 0$? [*Sugerencia:* determine cuándo la gráfica está por debajo del eje x.] (b) Determine el rango de f.

71. Encuentre la intersección con el eje x de $y = x^2 \ln x$.

72. Utilice la gráfica de $y = e^x$ para estimar ln 3. Redondee su respuesta a dos decimales.

73. Utilice la gráfica de $y = \ln x$ para estimar e^2. Redondee su respuesta a dos decimales.

74. Determine las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de $y = (x - 2)^2$ y $y = \ln x$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

[7] A. L. Persky, "An Inferior Good and a Novel Indifference Map", *The American Economist*, XXIX, núm. 1 (primavera de 1985).

OBJETIVO Estudiar las propiedades básicas de las funciones logarítmicas.

5.3 Propiedades de los logaritmos

La función logarítmica tiene muchas propiedades importantes. Por ejemplo, el logaritmo del producto de dos números es la suma de los logaritmos de esos números. En forma simbólica, $\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$. Para probar esto, hacemos $x = \log_b m$ y $y = \log_b n$. Entonces $b^x = m$, $b^y = n$, y

$$mn = b^x b^y = b^{x+y}.$$

Así $mn = b^{x+y}$. En forma logarítmica, esto significa que $\log_b(mn) = x + y$. Por tanto, $\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$.

1. $\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$.

Esto es, el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores.

No probaremos las dos propiedades siguientes, ya que sus demostraciones son similares a la de la propiedad 1.

2. $\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$.

Esto es, el logaritmo de un cociente es la diferencia del logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador.

3. $\log_b m^r = r \log_b m$.

Por lo que el logaritmo de una potencia de un número es el exponente por el logaritmo del número.



Advertencia Asegúrese de que entiende claramente las propiedades 1, 2 y 3, las cuales no se aplican al logaritmo de una suma $[\log_b(m + n)]$, al de una diferencia $[\log_b (m - n)]$, ni a la división de logaritmos $\left[\dfrac{\log_b m}{\log_b n}\right]$. Por ejemplo,

$$\log_b(m + n) \neq \log_b m + \log_b n,$$

$$\log_b(m - n) \neq \log_b m - \log_b n,$$

$$\frac{\log_b m}{\log_b n} \neq \log_b(m - n),$$

y

$$\frac{\log_b m}{\log_b n} \neq \log_b\left(\frac{m}{n}\right).$$

La tabla 5.2 da los valores de algunos logaritmos comunes (base 10). La mayoría de las entradas son aproximadas. Por ejemplo, $\log 4 \approx 0.6021$, que significa $10^{0.6021} \approx 4$. Para ilustrar el uso de las propiedades de los logaritmos, usaremos esta tabla en algunos de los ejemplos siguientes.

TABLA 5.2 Logaritmos comunes

x	$\log x$	x	$\log x$
2	0.3010	7	0.8451
3	0.4771	8	0.9031
4	0.6021	9	0.9542
5	0.6990	10	1.0000
6	0.7782	e	0.4343

Aunque los logaritmos del ejemplo pueden encontrarse con una calculadora, haremos uso de las propiedades de los logaritmos.

EJEMPLO 1 Determinación de logaritmos utilizando la tabla 5.2

a. *Encontrar* log 56.

Solución: log 56 no está en la tabla. Pero podemos escribir 56 como el producto de $8 \cdot 7$. Así, por la propiedad 1,

$$\log 56 = \log(8 \cdot 7) = \log 8 + \log 7 \approx 0.9031 + 0.8451 = 1.7482.$$

b. *Encontrar* $\log \frac{9}{2}$.

Solución: por la propiedad 2,

$$\log \tfrac{9}{2} = \log 9 - \log 2 \approx 0.9542 - 0.3010 = 0.6532.$$

c. *Encontrar* log 64.

Solución: como $64 = 8^2$, por la propiedad 3,

$$\log 64 = \log 8^2 = 2 \log 8 \approx 2(0.9031) = 1.8062.$$

d. *Encontrar* $\log \sqrt{5}$.

Solución: por la propiedad 3, tenemos

$$\log \sqrt{5} = \log 5^{1/2} = \tfrac{1}{2} \log 5 \approx \tfrac{1}{2}(0.6990) = 0.3495.$$

e. *Encontrar* $\log \dfrac{16}{21}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\log \frac{16}{21} &= \log 16 - \log 21 = \log(4^2) - \log(3 \cdot 7)\\ &= 2 \log 4 - [\log 3 + \log 7]\\ &\approx 2(0.6021) - [0.4771 + 0.8451] = -0.1180.\end{aligned}$$

Debe notar el uso de corchetes en el segundo renglón. Es incorrecto escribir $2 \log 4 - \log 3 + \log 7$.

EJEMPLO 2 Reescritura de expresiones con logaritmos

a. *Expresar* $\log \dfrac{1}{x^2}$ *en términos de* $\log x$.

Solución:

$$\log \frac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2 \log x \qquad \text{(propiedad 3).}$$

Aquí hemos supuesto que $x > 0$. Aunque $\log (1/x^2)$ está definido para $x \neq 0$, la expresión $-2 \log x$ sólo está definida si $x > 0$.

b. *Expresar* $\log \dfrac{1}{x}$ *en términos de* $\log x$.

Solución: por la propiedad 3,

$$\log \frac{1}{x} = \log x^{-1} = -1 \log x = -\log x.$$

Del ejemplo 2(b), vemos que $\log(1/x) = -\log x$. Generalizando se obtiene la propiedad siguiente:

4. $\log_b \frac{1}{m} = -\log_b m.$

Esto es, el logaritmo del recíproco de un número es menos el logaritmo del número.

Por ejemplo, $\log \frac{2}{3} = -\log \frac{3}{2}$.

Las manipulaciones como las del ejemplo 3, con frecuencia se utilizan en cálculo.

EJEMPLO 3 Escritura de logaritmos en términos de logaritmos más simples

a. *Escribir* $\ln \frac{x}{zw}$ *en términos de* $\ln x$, $\ln z$ *y* $\ln w$.

Solución:

$$\begin{aligned} \ln \frac{x}{zw} &= \ln x - \ln(zw) && \text{(propiedad 2)} \\ &= \ln x - (\ln z + \ln w) && \text{(propiedad 1)} \\ &= \ln x - \ln z - \ln w. \end{aligned}$$

b. *Escribir* $\sqrt[3]{\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}}$ *en términos de* $\ln x$, $\ln(x-2)$ y $\ln(x-3)$.

Solución:

$$\begin{aligned} \ln \sqrt[3]{\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}} &= \ln\left[\frac{x^5(x-2)^8}{x-3}\right]^{1/3} = \frac{1}{3}\ln\frac{x^5(x-2)^8}{x-3} \\ &= \frac{1}{3}\{\ln[x^5(x-2)^8] - \ln(x-3)\} \\ &= \frac{1}{3}[\ln x^5 + \ln(x-2)^8 - \ln(x-3)] \\ &= \frac{1}{3}[5\ln x + 8\ln(x-2) - \ln(x-3)]. \end{aligned}$$

Principios en práctica 1
Combinación de logaritmos

La medida en la escala de Richter de un terremoto está dada por $R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, en donde I es la intensidad del terremoto e I_0 es la intensidad de un terremoto de nivel cero. ¿Cuántas veces es mayor, en la escala de Richter, un terremoto con intensidad 900,000 veces la intensidad de un terremoto con nivel cero, que un terremoto con intensidad 9000 veces la intensidad de un terremoto de nivel cero? Escriba la respuesta como una expresión que incluya logaritmos. Simplifique la expresión por medio de reducción de logaritmos, y después evalúe la expresión resultante.

EJEMPLO 4 Combinación de logaritmos

a. *Escribir* $\ln x - \ln(x+3)$ *como un solo logaritmo.*

Solución:

$$\ln x - \ln(x+3) = \ln\frac{x}{x+3}. \qquad \text{(propiedad 2).}$$

b. *Escribir* $\ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - 2\ln 4$ *como un solo logaritmo.*

Solución:

$$
\begin{aligned}
&\ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - 2\ln 4 \\
&= \ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - \ln(4^2) \quad \text{(propiedad 3)} \\
&= \ln 3 + \ln 7 - [\ln 2 + \ln(4^2)] \\
&= \ln(3 \cdot 7) - \ln(2 \cdot 4^2) \quad \text{(propiedad 1)} \\
&= \ln 21 - \ln 32 \\
&= \ln \frac{21}{23} \quad \text{(propiedad 2).}
\end{aligned}
$$

Como $b^0 = 1$ y $b^1 = b$, al convertir a formas logarítmicas tenemos las propiedades siguientes:

5. $\log_b 1 = 0$.
6. $\log_b b = 1$.

Por la propiedad 3, $\log_b b^r = r \log_b b$. Pero por la propiedad 6, $\log_b b = 1$. Así, tenemos la propiedad siguiente:

7. $\log_b b^r = r$.

> ***Principios en práctica 2***
> **Simplificación de expresiones con logaritmos**
>
> Si un terremoto es 10,000 veces tan intenso como un terremoto de nivel cero, ¿cuál es su medida en la escala de Richter? Escriba la respuesta como una expresión logarítmica y simplifíquela (véase la página anterior para la fórmula).

EJEMPLO 5 Simplificación de expresiones con logaritmos

a. *Encontrar* $\ln e^{3x}$.

Solución: por la propiedad 7 con $b = e$, tenemos $\ln e^{3x} = 3x$. De manera alterna, por las propiedades 3 y 6,

$$\ln e^{3x} = 3x \ln e = 3x(1) = 3x.$$

b. *Encontrar* $\log 1 + \log 1000$.

Solución: por la propiedad 5, $\log 1 = 0$. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\log 1 + \log 1000 &= 0 + \log 10^3 \\
&= 0 + 3 \quad \text{(propiedad 7 con } b = 10\text{)} \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

c. *Encontrar* $\log_7 \sqrt[9]{7^8}$.

Solución:

$$\log_7 \sqrt[9]{7^8} = \log_7 7^{8/9} = \tfrac{8}{9}.$$

d. *Encontrar* $\log_3\left(\frac{27}{81}\right)$.

Solución:

$$\log_3\left(\frac{27}{81}\right) = \log_3\left(\frac{3^3}{3^4}\right) = \log_3(3^{-1}) = -1.$$

e. *Encontrar* $\ln e + \log \frac{1}{10}$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
\ln e + \log \tfrac{1}{10} &= \ln e + \log 10^{-1} \\
&= 1 + (-1) = 0.
\end{aligned}
$$

No confunda $\ln x^2$ con $(\ln x)^2$. Tenemos

$$\ln x^2 = \ln(x \cdot x),$$

pero

$$(\ln x)^2 = (\ln x)(\ln x),$$

que puede escribirse como $\ln^2 x$. Esto es, en $\ln x^2$ elevamos x al cuadrado; en $(\ln x)^2$, o $\ln^2 x$, elevamos al cuadrado $\ln x$.

Nuestra siguiente propiedad es:

8. $b^{\log_b m} = m$

y en particular,

$$10^{\log x} = x \quad \text{y} \quad e^{\ln x} = x.$$

La propiedad 8 es verdadera porque establece, en forma logarítmica, que $\log_b m = \log_b m$.

EJEMPLO 6 Uso de la propiedad 8

a. *Encontrar* $e^{\ln x^2}$.

Solución: por la propiedad 8, $e^{\ln x^2} = x^2$.

b. *Resolver* $10^{\log x^2} = 25$ para x.

Solución:

$$10^{\log x^2} = 25.$$

$$x^2 = 25 \qquad \text{(propiedad 8)},$$

$$x = \pm 5.$$

EJEMPLO 7 Evaluación de logaritmos de base 5

Utilizar una calculadora para encontrar $\log_5 2$.

Solución: las calculadoras comunes tienen teclas para logaritmos de base 10 y de base e, pero no para base 5. Sin embargo, podemos convertir logaritmos de una base a otra. Convirtamos de base 5 a base 10. Primero, hacemos $x = \log_5 2$. Entonces $5^x = 2$. Tomando los logaritmos comunes en ambos miembros de $5^x = 2$ se obtiene

$$\log 5^x = \log 2,$$

$$x \log 5 = \log 2,$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 5} \approx 0.4307.$$

Si hubiéramos tomado logaritmos naturales en ambos miembros, el resultado sería $x = (\ln 2)/(\ln 5) \approx 0.4307$, igual que antes.

Generalizando el método utilizado en el ejemplo 7 obtenemos la llamada fórmula de *cambio de base:*

Fórmula de cambio de base

9. $\log_b m = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}$.

La fórmula de cambio de base permite la conversión de logaritmos de una base (b) a otra (a).

EJEMPLO 8 **Fórmula de cambio de base**

Expresar $\log x$ *en términos de logaritmos naturales.*

Solución: debemos transformar de base 10 a base e, por lo que utilizamos la fórmula de cambio de base (propiedad 9) con $b = 10, m = x$ y $a = e$.

$$\log x = \log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10} = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Tecnología

Problema: mostrar la gráfica de $y = \log_2 x$.

Solución: para introducir la función, primero debemos convertir a la base e o a la base 10. Elegimos la base e. Por la propiedad 9,

$$y = \log_2 x = \frac{\log_e x}{\log_e 2} = \frac{\ln x}{\ln 2}.$$

Ahora graficamos $y = (\ln x)/(\ln 2)$, que se muestra en la figura 5.24.

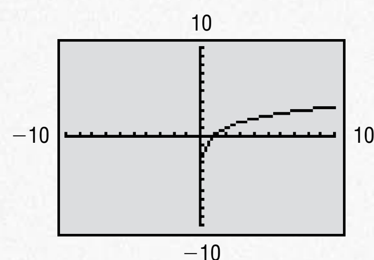


FIGURA 5.24 Gráfica de $y = \log_2 x$.

Ejercicio 5.3

En los problemas del 1 al 10 sean $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ *y* $\log 5 = c$. *Exprese el logaritmo indicado en términos de a, b o c.*

1. $\log 15$.
2. $\log 16$.
3. $\log \frac{2}{3}$.
4. $\log \frac{5}{2}$.
5. $\log \frac{8}{3}$.
6. $\log \frac{3}{10}$.
7. $\log 36$.
8. $\log 0.0002$.
9. $\log_2 3$.
10. $\log_3 5$.

En los problemas del 11 al 20 determine el valor de la expresión sin hacer uso de una calculadora.

11. $\log_7 7^{48}$.
12. $\log_5(5\sqrt{5})^5$.
13. $\log 0.0001$.
14. $10^{\log 3.4}$.
15. $\ln e^{5.01}$.
16. $\ln e$.
17. $\ln \dfrac{1}{e^2}$.
18. $\log_5 25$.
19. $\log \frac{1}{10} + \ln e^3$.
20. $e^{\ln 6}$.

En los problemas del 21 al 32 escriba la expresión en términos de $\ln x$, $\ln (x + 1)$ *y/o* $\ln (x + 2)$.

21. $\ln[x(x + 1)^2]$.
22. $\ln \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$.
23. $\ln \dfrac{x^2}{(x + 1)^3}$.
24. $\ln[x(x + 1)]^3$.
25. $\ln\left(\dfrac{x}{x + 1}\right)^3$.
26. $\ln\sqrt{x(x + 1)}$.
27. $\ln \dfrac{x}{(x + 1)(x + 2)}$.
28. $\ln \dfrac{x^2(x + 1)}{x + 2}$.
29. $\ln \dfrac{\sqrt{x}}{(x + 1)^2(x + 2)^3}$.
30. $\ln \dfrac{1}{x(x + 1)(x + 2)}$.
31. $\ln \left[\dfrac{1}{x + 2}\sqrt[5]{\dfrac{x^2}{x + 1}}\right]$.
32. $\ln \sqrt{\dfrac{x^4(x + 1)^3}{x + 2}}$.

En los problemas del 33 al 40 exprese cada una de las formas dadas como un solo logaritmo.

33. $\log 6 + \log 4$.
34. $\log_3 10 - \log_3 5$.
35. $\log_2(2x) - \log_2(x + 1)$.
36. $2 \log x - \frac{1}{2}\log(x - 2)$.
37. $9 \log 7 + 5 \log 23$.
38. $3(\log x + \log y - 2 \log z)$.
39. $2 + 10 \log 1.05$.
40. $\frac{1}{2}(\log 215 + 8 \log 6 - 3 \log 169)$.

En los problemas del 41 al 44 determine los valores de las expresiones sin utilizar una calculadora.

41. $e^{4 \ln 3 - 3 \ln 4}$.
42. $\log_2 [\ln(\sqrt{7 + e^2} + \sqrt{7}) + \ln(\sqrt{7 + e^2} - \sqrt{7})]$.
43. $\log_6 54 - \log_6 9$.
44. $\log_2 \sqrt{2} + \log_3 \sqrt[3]{3} - \log_4 \sqrt[4]{4}$

En los problemas del 45 al 48 encuentre x.

45. $e^{\ln(2x)} = 5$.
46. $4^{\log_4 x + \log_4 2} = 3$.
47. $10^{\log x^2} = 4$.
48. $e^{3 \ln x} = 8$.

En los problemas del 49 al 52 escriba cada expresión en términos de logaritmos naturales.

49. $\log(x + 6)$.
50. $\log_2 x$.
51. $\log_3(x^2 + 1)$.
52. $\log_5(9 - x^2)$.

53. Si $e^{\ln z} = 7e^y$, resuelva para y en términos de z.

54. Estadística En estadística, la ecuación de regresión $y = ab^x$ se reduce a una forma lineal tomando logaritmos en ambos lados. Exprese $\log y$ en términos de x, $\log a$ y $\log b$.

55. Remuneración militar En un estudio de reclutamiento, Brown[8] considera la remuneración militar total C como la suma de la remuneración militar básica B (que incluye el valor de la asignación para gastos, las exenciones fiscales y salario base) y las prestaciones de educación E. Así, $C = B + E$. Brown establece que

$$\ln C = \ln B + \ln\left(1 + \frac{E}{B}\right).$$

Verifique esto.

56. Intensidad del sonido El nivel de intensidad de una onda sonora de intensidad I está dado por

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

donde β es la letra griega "beta" e I_o es una intensidad de referencia igual a 10^{-12}, que corresponde de manera aproximada al sonido más débil que una persona puede oír. El nivel de intensidad se mide en decibeles (db). Por ejemplo, el nivel de intensidad de una conversación común es de 40 db y el de un tren subterráneo (el metro) es de 100 db. Determine el nivel de intensidad del sonido que hacen las hojas al ser movidas por el viento, las que tienen una intensidad de 10^{-11}.

57. Terremoto De acuerdo con Richter,[9] la magnitud M de un terremoto que ocurre a 100 km de cierto tipo de sismógrafo está dada por $M = \log(A) + 3$, donde A es la amplitud del trazo registrado (en milímetros) del terremoto. (a) Encuentre la magnitud de un terremoto que registra una amplitud de trazo de 1 mm. (b) Si un terremoto tiene amplitud A_1 y magnitud M_1, determine la magnitud de un temblor con amplitud $100A_1$. Exprese su respuesta para la parte (b) en términos de M_1.

Química *Un químico puede determinar la acidez o basicidad de una solución acuosa a temperatura ambiente, encontrando el* pH *de la solución. Para hacer esto, primero puede determinar la concentración de iones de hidrógeno (en moles por litro). El símbolo* $[H^+]$ *se establece para esta concentración. El* pH *entonces está dado por*

$$\text{pH} = -\log[H^+].$$

Si pH < 7, *la solución es ácida. Si* pH $= 7$, *decimos que la solución es neutra. Si* pH > 7, *es básica. Utilice esta información en los problemas 58 y 59.*

58. Una solución limpiadora tiene un pH de 8. ¿Cuál es el $[H^+]$ de esta solución?

59. ¿Cuál es el pH del vinagre con $[H^+]$ igual a 3×10^{-4}?

Química *Para una solución acuosa a temperatura ambiente, el producto de la concentración de iones de hidrógeno,* $[H^+]$, *y de iones de hidróxido* $[OH^-]$, *es* 10^{-14} *(donde la concentración está en moles por litro).*

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14}.$$

En los problemas 60 y 61 encuentre el pH *de una solución (véase la explicación que precede al problema 58) con el* $[OH^-]$ *dado.*

60. $[OH^-] = 10^{-4}$.
61. $[OH^-] = 3 \times 10^{-2}$.


62. Muestre la gráfica de $y = \log_6 x$.


63. Muestre la gráfica de $y = \log_4(x + 2)$.


64. Muestre las gráficas de $y = \log x$ y $y = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ en la misma pantalla. Parecen ser idénticas. ¿Por qué?

---

[8] C. Brown, "Military Enlistments: What Can We Learn from Geographic Variation?" *The American Economic Review*, 75, núm. 1 (1985), 228-234.
[9] C.F. Richter, *Elementary Seismology* (San Francisco: W. H. Freeman and Company Publisher, 1958).

65. En la misma pantalla, despliegue las gráficas de $y = \ln x$ y de $y = \ln(4x)$. Parece que la gráfica de $y = \ln(4x)$ es la de $y = \ln x$ recorrida hacia arriba. Determine de manera algebraica el valor de este corrimiento.

66. En la misma pantalla, exhiba las gráficas de $y = \ln x$ y de $y = \ln(x/3)$. Parece que la gráfica de $y = \ln(x/3)$ es la de $y = \ln x$ recorrida hacia abajo. Determine algebraicamente el valor de este corrimiento.

5.4 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

OBJETIVO Desarrollar técnicas para la resolución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Aquí resolveremos *ecuaciones logarítmicas* y *exponenciales*. Una **ecuación logarítmica** es una ecuación que incluye al logaritmo de una expresión que contiene una incógnita. Por ejemplo, $2\ln(x + 4) = 5$ es una ecuación logarítmica. Por otra parte, una **ecuación exponencial** tiene una incógnita que aparece en un exponente, como en $2^{3x} = 7$.

Para resolver algunas ecuaciones logarítmicas, usamos una propiedad de los logaritmos que ahora desarrollaremos.

Para muchas funciones f, si $f(m) = f(n)$, esto no implica que $m = n$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ entonces $f(2) = f(-2)$, pero $2 \neq -2$. Éste no es el caso para la función logarítmica. En la figura 5.25 puede verse que la gráfica de $y = \log_2 x$ asciende de izquierda a derecha. Así, si x_1 y x_2 son diferentes, sus logaritmos (valores de y) serán diferentes. Esto significa que si $\log_2 m = \log_2 n$, entonces $m = n$, Generalizando para la base b, tenemos la propiedad siguiente:

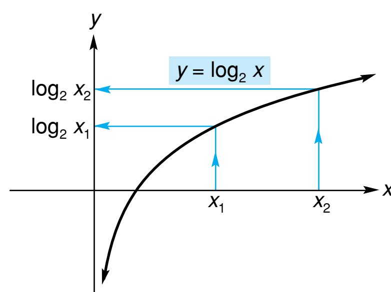


FIGURA 5.25 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $\log_2 x_1 \neq \log_2 x_2$.

Si $\log_b m = \log_b n$, entonces $m = n$.

Existe una propiedad semejante para exponenciales:

Si $b^m = b^n$, entonces $m = n$.

EJEMPLO 1 Composición de oxígeno

Un experimento fue llevado a cabo con un tipo particular de animal pequeño.[10] *En él se determinó el logaritmo de la cantidad de oxígeno consumido por hora para varios de los animales, y se graficó contra los logaritmos de sus pesos. Se encontró que*

$$\log y = \log 5.934 + 0.885 \log x,$$

donde y fue el número de microlitros de oxígeno consumidos por hora y x el peso del animal (en gramos). Resolver para y.

Solución: primero combinamos los términos del lado derecho en un solo logaritmo:

$$\begin{aligned}\log y &= \log 5.934 + 0.885 \log x \\ &= \log 5.934 + \log x^{0.885} && \text{(propiedad 3 de la sección5.3)} \\ \log y &= \log(5.934x^{0.885}) && \text{(propiedad 1 de la sección5.3).}\end{aligned}$$

Por la propiedad de igualdad de logaritmos, tenemos

$$y = 5.934x^{0.885}.$$

[10] R.W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

Principios en práctica 1

Solución de una ecuación exponencial

Greg escogió un número y lo multiplicó por una potencia de 32. Jean inició con el mismo número y obtuvo el mismo resultado, cuando ella lo multiplicó por 4 elevado a un número que era nueve veces menor que tres veces el exponente que Greg utilizó. ¿Qué potencia de 32 utilizó Greg?

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación exponencial

Determinar x si $(25)^{x+2} = 5^{3x-4}$.

Solución: ya que $25 = 5^2$, podemos expresar ambos lados de la ecuación como potencias de 5:

$$(25)^{x+2} = 5^{3x-4},$$
$$(5^2)^{x+2} = 5^{3x-4},$$
$$5^{2x+4} = 5^{3x-4}.$$

Por la propiedad de igualdad de exponenciales,

$$2x + 4 = 3x - 4,$$
$$x = 8.$$

Algunas ecuaciones exponenciales pueden resolverse tomando el logaritmo de ambos miembros, después que la ecuación está escrita en una forma adecuada. El ejemplo siguiente lo ilustra.

Principios en práctica 2

Uso de logaritmos para resolver una ecuación exponencial

El gerente de ventas de una cadena de comida rápida determina que las ventas del desayuno empiezan a disminuir al final de una campaña promocional. La venta en dólares como una función del número de días d después de que termina la campaña está dada por $S = 800\left(\frac{4}{3}\right)^{-0.1d}$. Si el gerente no quiere que las ventas caigan por debajo de 450 por día antes de iniciar una nueva campaña, ¿cuándo debe iniciar esa nueva campaña?

EJEMPLO 3 Uso de logaritmos para resolver una ecuación exponencial

Resolver $5 + (3)4^{x-1} = 12$.

Solución: primero aislamos la expresión exponencial 4^{x-1} en un lado de la ecuación:

$$5 + (3)4^{x-1} = 12,$$
$$(3)4^{x-1} = 7,$$
$$4^{x-1} = \frac{7}{3}.$$

Ahora tomamos el logaritmo natural de ambos lados:

$$\ln 4^{x-1} = \ln \frac{7}{3}.$$

Simplificando se obtiene

$$(x - 1)\ln 4 = \ln \frac{7}{3},$$
$$x - 1 = \frac{\ln \frac{7}{3}}{\ln 4},$$
$$x = \frac{\ln \frac{7}{3}}{\ln 4} + 1 \approx 1.61120.$$

En el ejemplo 3, utilizamos logaritmos naturales para resolver la ecuación dada. Sin embargo, se pueden emplear logaritmos de cualquier base. Por lo general, se utilizan logaritmos naturales o logaritmos comunes si se desea una forma decimal de la solución. Si usamos logaritmos comunes obtendríamos

$$x = \frac{\log \frac{7}{3}}{\log 4} + 1 \approx 1.61120.$$

Tecnología

La figura 5.26 muestra una solución gráfica de la ecuación $5 + (3)4^{x-1} = 12$ del ejemplo 3. Esta solución ocurre en la intersección de las gráficas de $y = 5 + (3)4^{x-1}$ y $y = 12$.

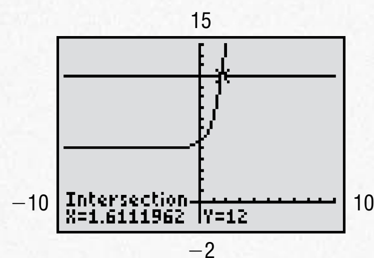


FIGURA 5.26 La solución de $5 + (3)4^{x-1} = 12$ es aproximadamente igual a 1.61120.

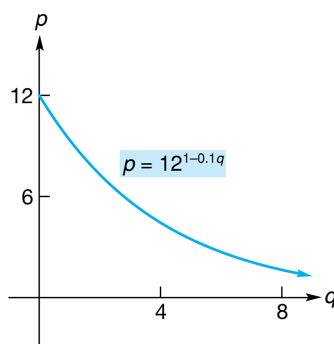


FIGURA 5.27 Gráfica de la ecuación de demanda $p = 12^{1-0.1q}$.

EJEMPLO 4 Ecuación de demanda

La ecuación de demanda para un producto es $p = 12^{1-0.1q}$. Utilizar logaritmos comunes para expresar q en términos de p.

Solución: la figura 5.27 muestra la gráfica de esta ecuación de demanda para $q \geq 0$. Como es común para una ecuación de demanda, la gráfica desciende de izquierda a derecha. Es necesario resolver la ecuación para q. Tomando logaritmos comunes de ambos lados de $p = 12^{1-0.1q}$ se obtiene

$$\log p = \log(12^{1-0.1q}),$$

$$\log p = (1 - 0.1q)\log 12,$$

$$\frac{\log p}{\log 12} = 1 - 0.1q,$$

$$0.1q = 1 - \frac{\log p}{\log 12},$$

$$q = 10\left(1 - \frac{\log p}{\log 12}\right).$$

Para resolver algunas ecuaciones exponenciales que incluyen la base e o la base 10, tal como $10^{2x} = 3$, en lugar de tomar logaritmos de ambos miembros, puede ser más fácil primero transformar la ecuación en una forma logarítmica equivalente. En este caso tenemos

$$10^{2x} = 3,$$

$$2x = \log 3 \qquad \text{(forma logarítmica)},$$

$$x = \frac{\log 3}{2} \approx 0.2386.$$

EJEMPLO 5 Relación presa–depredador

En un artículo que concierne a presas y depredadores, Holling[11] hace referencia a una ecuación de la forma

$$y = K(1 - e^{-ax}),$$

[11] C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism". *The Canadian Entomologist*, 91, núm. 7 (1959), 385-398.

donde x es la densidad de presas, y es el número de presas atacadas y K y a son constantes. Verificar su aseveración de que

$$\ln \frac{K}{K - y} = ax.$$

Solución: para encontrar ax resolvemos la ecuación dada para e^{-ax}:

$$y = K(1 - e^{-ax}),$$

$$\frac{y}{K} = 1 - e^{-ax},$$

$$e^{-ax} = 1 - \frac{y}{K},$$

$$e^{-ax} = \frac{K - y}{K}.$$

Ahora convertimos a la forma logarítmica.

$$\ln \frac{K - y}{K} = -ax,$$

$$-\ln \frac{K - y}{K} = ax,$$

$$\ln \frac{K}{K - y} = ax \quad \text{(propiedad 4 de la sección. 5.3),}$$

como quería mostrarse.

Algunas ecuaciones logarítmicas pueden resolverse al escribirlas nuevamente en forma exponencial.

Principios en práctica 3

Solución de una ecuación logarítmica

La medida en la escala de Richter de un terremoto está dada por $R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, en donde I es la intensidad del terremoto, e I_0 es la intensidad de un terremoto de nivel cero. Un terremoto que es 675,000 veces tan intenso como un terremoto de nivel cero, tiene una magnitud en la escala de Richter que es 4 veces mayor que otro terremoto. ¿Cuál es la intensidad de este otro terremoto?

EJEMPLO 6 Solución de una ecuación logarítmica

Resolver $\log_2 x = 5 - \log_2(x + 4)$.

Solución: aquí primero debemos suponer que x y $x + 4$ son positivos, de modo que sus logaritmos estén definidos. Ambas condiciones se satisfacen si $x > 0$. Para resolver la ecuación, primero colocamos todos los logaritmos en un miembro de modo que podamos combinarlos:

$$\log_2 x + \log_2(x + 4) = 5,$$

$$\log_2[x(x + 4)] = 5.$$

En forma exponencial tenemos

$$x(x + 4) = 2^5,$$

$$x^2 + 4x = 32,$$

$$x^2 + 4x - 32 = 0 \quad \text{(ecuación cuadrática),}$$

$$(x - 4)(x + 8) = 0,$$

$$x = 4 \quad \text{o} \quad x = -8.$$

Puesto que debemos tener $x > 0$, la única solución es 4, como puede verificarse sustituyendo en la ecuación original:

$$\log_2 4 \stackrel{?}{=} 5 - \log_2 8,$$
$$2 \stackrel{?}{=} 5 - 3,$$
$$2 = 2.$$

Cuando resolvemos una ecuación logarítmica, es una buena idea verificar si las soluciones son extrañas.

Ejercicio 5.4

En los problemas del 1 al 36 encuentre x. Redondee sus respuestas a tres decimales.

1. $\log(2x + 1) = \log(x + 6)$.

2. $\log x + \log 3 = \log 5$.

3. $\log 7 - \log(x - 1) = \log 4$.

4. $\log_2 x + 3\log_2 2 = \log_2 \dfrac{2}{x}$.

5. $\ln(-x) = \ln(x^2 - 6)$.

6. $\ln(4 - x) + \ln 2 = 2\ln x$.

7. $e^{2x} \cdot e^{5x} = e^{14}$.

8. $(e^{5x+1})^2 = e$.

9. $(16)^{3x} = 2$.

10. $(27)^{2x+1} = \dfrac{1}{3}$.

11. $e^{2x} = 9$.

12. $e^{4x} = \frac{3}{4}$.

13. $3e^{3x+1} = 15$.

14. $6e^{1-x} + 1 = 25$.

15. $10^{4/x} = 6$.

16. $\dfrac{4(10)^{0.2x}}{5} = 3$.

17. $\dfrac{5}{10^{2x}} = 7$.

18. $2(10)^x + (10)^{x+1} = 4$.

19. $2^x = 5$.

20. $4^{x+3} = 12$.

21. $5^{2x-5} = 9$.

22. $4^{x/2} = 20$.

23. $2^{-2x/3} = \dfrac{4}{5}$.

24. $5(3^x - 6) = 10$.

25. $(4)5^{3-x} - 7 = 2$.

26. $\dfrac{8}{3^x} = 4$.

27. $\log(x - 3) = 3$.

28. $\log_2(x + 1) = 4$.

29. $\log_4(9x - 4) = 2$.

30. $\log_4(2x + 4) - 3 = \log_4 3$.

31. $\log(3x - 1) - \log(x - 3) = 2$.

32. $\log x + \log(x - 15) = 2$.

33. $\log_3(2x + 3) = 4 - \log_3(x + 6)$.

34. $\log(x + 2)^2 = 2$, donde $x > 0$.

35. $\log_2\left(\dfrac{2}{x}\right) = 3 + \log_2 x$.

36. $\ln x = \ln(3x + 1) + 1$.

37. Plantas arraigadas En un estudio sobre plantas arraigadas en cierta región geográfica,[12] se determinó que en terrenos de tamaño A (en metros cuadrados), el número promedio de especies encontradas era S. Cuando $\log S$ se graficó como una función de $\log A$, el resultado fue una línea recta dada por

$$\log S = \log 12.4 + 0.26 \log A.$$

Resuelva para S.

38. Producto nacional bruto En un artículo, Taagepera y Hayes se refieren a una ecuación de la forma

$$\log T = 1.7 + 0.2068 \log P - 0.1334 \log^2 P.$$

Aquí T es el porcentaje del producto nacional bruto (PNB) de un país correspondiente al comercio exterior (exportaciones más importaciones), y P es la población del país (en unidades de 100,000).[13] Verifique la aseveración de que

[12] R. W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

[13] R. Taagepera y J. P. Hayes, "How Trade/GNP Ratio Decreases with Country Size", *Social Science Research*, 6 (1977), 108-132.

$$T = 50P^{(0.2068-0.1334 \log P)}.$$

Puede suponer que $\log 50 = 1.7$.

39. Radiactividad El número, Q, de miligramos presentes de una sustancia radiactiva después de t años está dado por

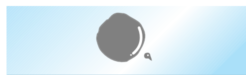
$$Q = 100e^{-0.035t}.$$

a. ¿Cuántos miligramos estarán presentes después de 0 años?

b. ¿Después de cuántos años estarán presentes 20 miligramos?

Proporciones sus respuestas al año más cercano.

40. Muestra de sangre En la superficie de un portaobjetos está una retícula que divide la superficie en 225 cuadrados iguales. Suponga que una muestra de sangre que contiene N células rojas, se esparce en el portaobjetos y las células se distribuyen aleatoriamente. El número de cuadrados que no tienen células está dado (de manera aproximada) por $225e^{-N/225}$. Si 100 de los cuadrados no tienen células, estime el número de células que la muestra contenía.



41. Población En una ciudad la población, P, crece a razón de 2% por año. La ecuación $P = 1{,}000{,}000(1.02)^t$ da la población t años después de 1998. Determine el valor de t para el que la población es 1,500,000. Dé su respuesta a la décima más cercana.

42. Penetración de mercado En un estudio de penetración en el mercado de nuevos productos, Hurter y Rubenstein[14] hacen referencia a la función

$$F(t) = \frac{q - pe^{-(t+C)(p+q)}}{q[1 + e^{(t+C)(p+q)}]},$$

donde p, q y C son constantes. Ellos aseguran que si $F(0) = 0$, entonces

$$C = -\frac{1}{p+q} \ln \frac{q}{p}.$$

Demuestre que su aseveración es cierta.

43. Ecuación de demanda La ecuación de demanda para un producto es $q = 80 - 2^p$. Resuelva para p y exprese su respuesta en términos de logaritmos comunes como en el ejemplo 4. Evalúe p con dos decimales cuando $q = 60$.

[14]A. P. Hurter, Jr., A. H. Rubenstein, et. al., "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 197-221.

44. Inversión La ecuación $A = P(1.1)^t$ da el valor A, al final de t años de una inversión de P dólares compuesta anualmente a una tasa de interés de 10%. ¿Cuántos años tomará para que una inversión se duplique? Proporcione su respuesta al año más cercano.

45. Intensidad de luz Un material translúcido tiene la propiedad de reducir la intensidad de la luz que pasa a través de él. Un material translúcido de plástico tiene la propiedad de que una hoja de 1 mm de espesor reduce la intensidad de la luz en 10%. ¿Cuántas de tales hojas son necesarias para reducir la intensidad de un rayo de luz a cerca de 50% de su valor original?

46. Ventas Después de t años el número de unidades, de un producto vendido por año está dado por $q = 1000(\frac{1}{2})^{0.8^t}$. Tal ecuación se llama *ecuación de Gompertz,* la cual describe el crecimiento natural en muchas áreas de estudio. Resuelva esta ecuación para t en la misma manera que en el ejemplo 4 y demuestre que

$$t = \frac{\log \dfrac{3 - \log q}{\log 2}}{(3 \log 2) - 1}.$$

47. Ecuación de aprendizaje Suponga que la producción diaria de unidades de un nuevo producto en el t-ésimo día de una corrida de producción está dada por

$$q = 500(1 - e^{-0.2t}).$$

Tal ecuación se llama *ecuación de aprendizaje,* la cual indica que conforme pase el tiempo, la producción por día aumentará. Esto puede deberse a un aumento en la habilidad de los trabajadores. Determine a la unidad completa más cercana la producción en (a) el primer día, y (b) en el décimo día después del inicio de una producción. (c) ¿Después de cuántos días se alcanzará una producción diaria de 400 unidades? Proporcione sus respuestas redondeadas al día más cercano.

 **48.** Verifique que 4 es la única solución de la ecuación logarítmica del ejemplo 6 graficando la función

$$y = 5 - \log_2(x + 4) - \log_2 x$$

y observando cuándo $y = 0$.

 **49.** Resuelva $2^{3x+0.5} = 17$. Redondee su respuesta a dos decimales.

 **50.** Resuelva $\ln(x + 1) = 4 - x$. Redondee su respuesta a dos decimales.

 **51.** Grafique la ecuación $4x + (3)4^y = 1$. [*Sugerencia:* despeje a y como una función explícita de x.]

5.5 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 5.1 función exponencial, b^x interés compuesto principal (capital) monto (capital) compuesto periodo de interés tasa periódica tasa nominal e función exponencial natural, e^x ley de decaimiento exponencial cantidad inicial constante de decaimiento vida media

Sección 5.2 función logarítmica, $\log_b x$ logaritmo común, $\log x$ logaritmo natural $\ln x$

Sección 5.3 fórmula de cambio de base

Sección 5.4 ecuación logarítmica ecuación exponencial

Resumen

Una función exponencial tiene la forma $f(x) = b^x$. La gráfica de $f(x) = b^x$ tiene una de dos formas generales, dependiendo del valor de la base b (véase la fig. 5.3). Una función exponencial está incluida en la fórmula de interés compuesto:

$$S = P(1 + r)^n,$$

donde S es el monto compuesto de un principal de P al final de n periodos de interés a la tasa periódica r.

Una base utilizada con frecuencia en una función exponencial es el número irracional e, donde $e \approx 2.71828$. Esta base aparece en análisis económico y en muchas situaciones que implican crecimiento o decaimiento, como estudios poblacionales y decaimiento radiactivo. Los elementos radiactivos siguen la ley de decaimiento exponencial

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

donde N es la cantidad presente en el tiempo t, N_0 la cantidad inicial y λ la constante de decaimiento. El tiempo necesario para que la mitad de la cantidad del elemento decaiga se conoce como vida media.

La función logarítmica es la función inversa de la función exponencial, y viceversa. La función logarítmica de base b es denotada por $\log_b$, y $y = \log_b x$ si y sólo si $b^y = x$. La gráfica de $y = \log_b x$ tiene una de dos formas generales dependiendo del valor de la base b (véase la fig. 5.21). Los logaritmos de base e son llamados logaritmos naturales y denotados por ln, aquéllos de base 10 son llamados logaritmos comunes y denotados por log. La vida media T de un elemento radiactivo puede expresarse en términos de un logaritmo natural y de la constante de decaimiento: $T = (\ln 2)/\lambda$.

Algunas propiedades importantes de los logaritmos son las siguientes:

$$\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n,$$

$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n,$$

$$\log_b m^r = r \log_b m,$$

$$\log_b \frac{1}{m} = -\log_b m,$$

$$\log_b 1 = 0,$$

$$\log_b b = 1,$$

$$\log_b b^r = r,$$

$$b^{\log_b m} = m,$$

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}.$$

Además, si $\log_b m = \log_b n$ entonces $m = n$. De manera semejante, si $b^m = b^n$, entonces $m = n$. Muchas de estas propiedades se utilizan en la solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 6 escriba cada una de las formas exponenciales de manera logarítmica y cada forma logarítmica de manera exponencial.

1. $3^5 = 243$. **2.** $\log_7 343 = 3$. **3.** $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$.

4. $10^5 = 100{,}000$. **5.** $e^4 = 54.598$. **6.** $\log_9 9 = 1$.

En los problemas del 7 al 12 determine el valor de la expresión sin utilizar una calculadora.

7. $\log_5 125$. **8.** $\log_4 16$. **9.** $\log_2 \frac{1}{16}$.

10. $\log_{1/3} \frac{1}{9}$. **11.** $\log_{1/3} 9$. **12.** $\log_4 2$.

En los problemas del 13 al 18 encuentre x sin utilizar una calculadora.

13. $\log_5 625 = x$.

14. $\log_x \frac{1}{8} = -3$.

15. $\log x = -2$.

16. $\ln \frac{1}{e} = x$.

17. $\ln(2x + 3) = 0$.

18. $e^{\ln(x+4)} = 7$.

En los problemas 19 y 20 sean $\log 2 = a$ *y* $\log 3 = b$. *Exprese el logaritmo dado en términos de a y de b.*

19. $\log 8000$.

20. $\log \frac{9}{\sqrt{2}}$.

En los problemas del 21 al 26 escriba cada expresión como un solo logaritmo.

21. $2 \log 5 - 3 \log 3$.

22. $6 \ln x + 4 \ln y$.

23. $2 \ln x + \ln y - 3 \ln z$.

24. $\log_6 2 - \log_6 4 - 9 \log_6 3$.

25. $\frac{1}{2} \log_2 x + 2 \log_2(x^2) - 3 \log_2(x + 1) - 4 \log_2(x + 2)$.

26. $3 \log x + \log y - 2(\log z + \log w)$.

En los problemas del 27 al 32 escriba la expresión en términos de $\ln x$, $\ln y$ *y* $\ln z$.

27. $\ln \frac{x^2 y}{z^3}$.

28. $\ln \frac{\sqrt{x}}{(yz)^2}$.

29. $\ln \sqrt[3]{xyz}$.

30. $\ln\left[\frac{xy^3}{z^2}\right]^4$.

31. $\ln\left[\frac{1}{x}\sqrt{\frac{y}{z}}\right]$.

32. $\ln\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2\left(\frac{x}{z}\right)^3\right]$.

---

33. Escriba $\log_3(x + 5)$ en términos de logaritmos naturales.

34. Escriba $\log_5(2x^2 + 1)$ en términos de logaritmos comunes.

35. Suponga que $\log_2 19 = 4.2479$ y $\log_2 5 = 2.3219$. Encuentre $\log_5 19$.

36. Utilice logaritmos naturales para determinar el valor de $\log_4 5$.

37. Si $\ln 3 = x$ y $\ln 4 = y$, exprese $\ln(16\sqrt{3})$ en términos de x y de y.

38. Exprese $\log \frac{x^2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+2}}$ en términos de $\log x$, $\log(x + 1)$, y $\log(x^2 + 2)$.

39. Simplifique $e^{\ln x} + \ln e^x + \ln 1$.

40. Simplifique $\log 10^2 + \log 1000 - 5$.

41. Si $\ln y = x^2 + 2$, encuentre y.

42. Haga el bosquejo de las gráficas de $y = 3^x$ y $y = \log_3 x$.

43. Haga el bosquejo de la gráfica de $y = 2^{x+3}$.

44. Haga el bosquejo de la gráfica de $y = -2 \log_2 x$.

En los problemas del 45 al 52 encuentre x.

45. $\log(4x + 1) = \log(x + 2)$.

46. $\log x + \log 2 = 1$.

47. $3^{4x} = 9^{x+1}$.

48. $4^{3-x} = \frac{1}{16}$.

49. $\log x + \log(10x) = 3$.

50. $\log_3(x + 1) = \log_3(x - 1) + 1$.

51. $\ln(\log_x 2) = -1$.

52. $\log_2 x + \log_4 x = 3$.

En los problemas del 53 al 58 encuentre x. Redondee sus respuestas a tres decimales.

53. $e^{3x} = 14$.

54. $10^{3x/2} = 5$.

55. $3(10^{x+4} - 3) = 9$.

56. $7e^{3x-1} - 2 = 1$.

57. $4^{x+3} = 7$.

58. $5^{2/x} = 2$.

---

59. Inversiones Si \$2600 se invierten durante $6\frac{1}{2}$ años a 6% compuesto cada trimestre, determine (a) el monto compuesto y (b) el interés compuesto.

60. Inversiones Encuentre el monto compuesto de una inversión de \$4000 durante 5 años a una tasa de 11% compuesto mensualmente.

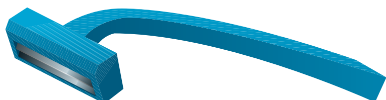
61. Encuentre la tasa nominal que corresponde a una tasa periódica de $1\frac{1}{6}$% mensual.

62. Crecimiento de bacterias En un cultivo de bacterias su número aumenta a razón de 4% por hora. Al inicio, estaban presentes 500 bacterias. (a) Determine una ecuación que dé el número, N, de bacterias después de t horas. (b) ¿Cuántas bacterias están presentes después de una hora? (c) ¿Después de 3 horas? Proporcione su respuesta al entero más cercano.

63. Crecimiento poblacional La población de una ciudad de 8000 habitantes crece a razón de 2% anual. (a) Determi-

ne una ecuación que dé la población, P, después de t años a partir de ahora. (b) Encuentre la población dentro de 2 años. Dé la respuesta a (b) al entero más cercano.

64. Ingreso Debido a una campaña de publicidad ineficaz, la compañía Rasurado Al Ras encuentra que sus ingresos anuales han sufrido una reducción drástica. Por otra parte, el ingreso anual R al final de los t años de negocios satisface la ecuación $R = 200{,}000e^{-0.2t}$. Encuentre el ingreso anual al final de 2 años y al final de 3 años.



65. Radiactividad Una sustancia radiactiva decae de acuerdo con la fórmula

$$N = 10e^{-0.41t},$$

donde N es el número de miligramos presentes después de t horas. (a) Determine la cantidad inicial. (b) Al décimo de miligramos más cercano, determine la cantidad presente después de 2 horas, (c) después de 10 horas. (d) A la décima de hora más cercana, determine la vida media de la sustancia, y (e) el número de horas para que quede un miligramo.

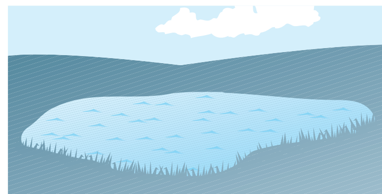
66. Radiactividad Si una sustancia radiactiva tiene una vida media de 10 días, ¿en cuántos días habrá $\frac{1}{8}$ de la cantidad inicial?

67. Mercadotecnia Una compañía de investigación de mercado necesita determinar cuántas personas se adaptan al sabor de unas nuevas pastillas para la tos. En un experimento, a una persona se le dio una pastilla para la tos y se le pidió que periódicamente asignara un número, en la escala de 0 a 10, al sabor percibido. Este número fue llamado *magnitud de la respuesta*. El número 10 fue asignado al sabor inicial. Después de llevar a cabo el experimento varias veces, la compañía estimó que la magnitud de la respuesta, R, está dada por

$$R = 10e^{-t/40},$$

donde t es el número de segundos después de que la persona tomó la pastilla para la tos. (a) Encuentre la magnitud de la respuesta después de 20 segundos. Redondee su respuesta al entero más cercano. (b) ¿Después de cuántos segundos la persona tiene una magnitud de respuesta de 5? Aproxime su respuesta al segundo más cercano.

68. Sedimento en agua El agua de un lago contiene un sedimento cuya presencia reduce la transmisión de la luz a través del agua. Los experimentos indican que la intensidad de la luz se reduce en un 10% al pasar a través de 20 cm de agua. Suponga que el lago es uniforme con respecto a la cantidad de sedimento que contiene. Un instrumento de medición puede detectar luz hasta de una intensidad de 0.17% de la luz solar total. Este instrumento se sumerge en el lago. ¿A qué profundidad dejará inicialmente de registrar la presencia de luz? Aproxime su respuesta a los 10 cm más cercanos.



69. Enfriamiento de cuerpos En un estudio de la velocidad de enfriamiento de partes aisladas de un cuerpo cuando se expone a bajas temperaturas, aparece la siguiente ecuación[15]

$$T_t - T_e = (T_t - T_e)_o e^{-at},$$

donde T_t es la temperatura de la parte del cuerpo en el instante t, T_e es la temperatura del medio ambiente, el subíndice o se refiere a la diferencia de temperaturas iniciales y a es una constante. Demuestre que

$$a = \frac{1}{t}\ln\frac{(T_t - T_e)_o}{T_t - T_e}.$$

70. Depreciación Una alternativa de la depreciación lineal es la depreciación por *saldo decreciente*. Este método supone que un artículo pierde su valor más rápido al inicio de su vida que posteriormente. Un porcentaje fijo del valor se resta cada año. Supóngase que el costo inicial de un artículo es C y su vida útil es de N años. Entonces el valor, V (en dólares), del artículo al final de n años está dado por

$$V = C\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n,$$

en donde cada año lleva una depreciación de $\frac{100}{N}$ por ciento (esto se denomina depreciación sencilla por saldo decreciente: si la depreciación anual fuese $\frac{200}{N}$ por ciento, sería depreciación doble por saldo decreciente). Si una fotocopiadora nueva se compró por $1495 y tiene una vida útil de 5 años, después de cuántos años su valor cae abajo de $800? Proporcione la respuesta redondeada al entero más cercano.

71. Si $y = f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, determine el rango de f. Redondee los valores a dos decimales.

72. Determine los puntos de intersección de las gráficas de $y = \ln(x + 2)$ y $y = x^2 - 7$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

73. Resuelva $\ln x = 4 - x$. Redondee su respuesta a dos decimales.

---

[15]R. W. Stacy et. al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

74. Resuelva $6^{3-4x} = 15$. Redondee su respuesta a dos decimales.

75. Muestre la gráfica de $y = \log_3 (x^2 + 1)$.

76. Despliegue la gráfica de la ecuación $(6)5^y + x = 2$. [*Sugerencia:* despeje a y como una función explícita de x.]

77. Grafique $y = 3^x$ y $y = \frac{3^x}{9}$ en la misma pantalla. Parece que la gráfica de $y = \frac{3^x}{9}$ es la gráfica de $y = 3^x$ recorrida dos unidades hacia la derecha. Pruebe de manera algebraica que en verdad esto es cierto.

Aplicación práctica

Dosis de medicamento[16]



La determinación y prescripción de la dosis de medicamento son aspectos extremadamente importantes en la profesión médica. Con frecuencia se debe tener precaución de posibles efectos secundarios o tóxicos de las medicinas.

Muchas medicinas son utilizadas por el cuerpo humano de tal manera que la cantidad presente sigue una ley de decaimiento exponencial. Esto es, si N es la cantidad de droga presente en el cuerpo en el instante t, entonces

$$N = N_0 e^{-kt}, \qquad \textbf{(1)}$$

donde k es una constante positiva y N_0 la cantidad presente en el instante $t = 0$. Si H *es* la vida media del medicamento, entonces, de la sección 5.2, $H = (\ln 2/k)$ o, en forma equivalente, $k = (\ln 2)/H$.

Suponga que quiere analizar el caso en que se administran dosis iguales a un paciente cada I unidades de tiempo hasta que se alcance un nivel terapéutico, y después la dosis se reduce lo suficiente para mantener el nivel terapéutico. La razón para mantener dosis *reducidas* está relacionada frecuentemente con los efectos tóxicos de las drogas.

En particular, suponga que hay d dosis de P unidades cada una, una dosis se da en los tiempos $t = 0$, $I, 2I, \ldots,$ y $(d - 1)/I$, y que el nivel terapéutico, T es alcanzado en $t = dI$, el cual ocurre un intervalo de tiempo después de administrar la última dosis. Ahora veremos cómo determinar una fórmula que da el nivel terapéutico.

En el instante $t = 0$ el paciente recibe las primeras P unidades, de modo que la cantidad de droga en su cuerpo es P. En el instante $t = I$ la cantidad presente de la primera dosis es [de la ecuación (1)] Pe^{-kI}. Además, en $t = I$ las segundas P unidades son suministradas. Así que la cantidad total de droga presente es

$$P + Pe^{-kI}.$$

En el instante $t = 2I$, la cantidad que queda de la primera dosis es Pe^{-2kI}; de la segunda dosis, que ha estado en el sistema sólo durante un intervalo de tiempo, la cantidad presente es Pe^{-kI}. También, en $t = 2I$ la tercera dosis de P unidades es suministrada, de modo que la cantidad total presente es

$$P + Pe^{-kI} + Pe^{-2kI}.$$

Continuando de esta manera, la cantidad T de medicamento presente en el sistema en el tiempo dI, un intervalo de tiempo después de la última dosis, está dada por

$$T = Pe^{-kI} + Pe^{-2kI} + \cdots + Pe^{-dkI}. \qquad \textbf{(2)}$$

Puede expresar el lado derecho de la ecuación (2) de una forma diferente. Primero, multiplique ambos lados de la ecuación (2) Por e^{-kI}.

$$e^{-kI}T = e^{-kI}(Pe^{-kI} + Pe^{-2kI} + \cdots + Pe^{-dkI}),$$

$$e^{-kI}T = Pe^{-2kI} + Pe^{-3kI} + \cdots + Pe^{-(d+1)kI}. \qquad \textbf{(3)}$$

Restando los miembros de la ecuación (3) de los correspondientes de la ecuación (2), tenemos

$$T - e^{-kI}T = Pe^{-kI} - Pe^{-(d+1)kI}.$$

Simplificando y resolviendo para T se obtiene

$$(1 - e^{-kI})T = Pe^{-kI}(1 - e^{-dkI}),$$

$$T = \frac{Pe^{-kI}(1 - e^{-dkI})}{1 - e^{-kI}}, \qquad \textbf{(4)}$$

$$T = \frac{P(1 - e^{-dkI})}{e^{kI}(1 - e^{-kI})},$$

$$T = \frac{P(1 - e^{-dkI})}{e^{kI} - 1}. \qquad \textbf{(5)}$$

La ecuación (5) le permite determinar el nivel terapéutico, T, en términos de la dosis, P, los intervalos de tiempo de longitud I, el número de dosis, d, y la vida media H, de la medicina [ya que $k = (\ln 2)/\text{H}$]. Entre

[16] Este estudio está adaptado de Gerald M. Armstrong y Calvin P. Midgley, "The Exponential-Decay Law Applied to Medical Dosages", *The Mathematics Teacher,* 80, núm. 3 (febrero de 1987), 110-113. Con permiso de National Council of Teachers of Mathematics.

otras posibilidades, puede determinar la dosis P si T, H, I y d son conocidas.

Ahora el objetivo es mantener el nivel terapéutico en el paciente. Para hacer esto, se suministra una dosis reducida R en los instantes $t = dI, (d+1)I, (d+2)I$ y así sucesivamente. Puede determinarse una fórmula para R de la manera siguiente.

En el instante $t = (d+1)I$, pero antes de suministrar la segunda dosis reducida, la cantidad de medicamento en el sistema proveniente de la primera dosis reducida es Re^{-kI}, y la cantidad que permanece del nivel terapéutico es Te^{-kI}. Suponga que se requiere que la suma de estas cantidades sea el nivel terapéutico, T; esto es,

$$T = Re^{-kI} + Te^{-kI}.$$

Resolviendo para R se obtiene

$$Re^{-kI} = T - Te^{-kI},$$

$$R = T(1 - e^{-kI})e^{kI}.$$

Reemplazando T por el lado derecho de la ecuación (4) se obtiene

$$R = \frac{Pe^{-kI}(1 - e^{-dkI})}{1 - e^{-kI}}(1 - e^{-kI})e^{kI},$$

o, de manera más sencilla,

$$R = P(1 - e^{-dkI}). \qquad (6)$$

Continuando las dosis reducidas a intervalos de tiempo de longitud I, se asegura que el nivel terapéutico nunca esté por debajo de T. Además, observe que $-dkI < 0$, entonces $0 < e^{-dkI} < 1$. En consecuencia, el factor $1 - e^{-dkI}$ en la ecuación (6) está entre 0 y 1. Esto asegura que R sea menor que P, de aquí que R sea en realidad una dosis *reducida*.

Es interesante observar que Armstrong y Midgley establecen que "la cantidad terapéutica T debe seleccionarse de un rango de valores determinados de manera empírica. El juicio y la experiencia médica son necesarios para seleccionar los intervalos apropiados y su duración, para administrar un medicamento. Incluso la vida media de éste puede variar un poco entre los pacientes". Información adicional sobre drogas médicas y su uso seguro pueden encontrarse en `www.fda.gov/cder`.

Ejercicios

1. De la ecuación (5), despeje (a) P y (b) d.

2. Si I es igual a la vida media de la droga, demuestre que la ecuación (5) puede escribirse como

$$T = \left(1 - \frac{1}{2^d}\right)P.$$

Observe que $0 < 1 - (1/2^d) < 1$ para $d > 0$. Esta ecuación implica que cuando se administran dosis de P unidades a intervalos de tiempo iguales a la vida media de la droga, en un intervalo de tiempo después de que cualquier dosis es administrada, pero antes de que la siguiente se suministre, el nivel en el paciente es menor que P.

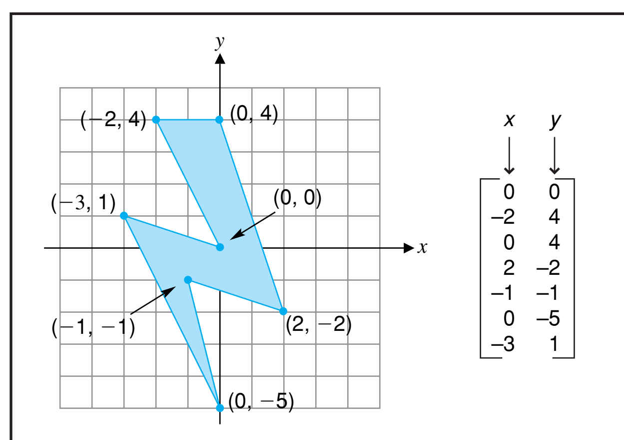
3. La Teofilina es una droga utilizada en el tratamiento del asma bronquial, tiene una vida media de 8 horas en el sistema de un paciente relativamente sano y no fumador. Suponga que tal paciente alcanza el nivel terapéutico deseado en 12 horas cuando se le suministran 100 miligramos cada 4 horas. Aquí $d = 3$. A causa de la toxicidad, la dosis debe reducirse más adelante. Al miligramo más cercano, determine (a) el nivel terapéutico y (b) la dosis reducida.

4. Utilice una calculadora gráfica para generar una gráfica de la concentración de droga y verifique que la ecuación (6) proporciona de manera correcta la dosis de mantenimiento. Introduzca en la calculadora 0.5 → K, 3 → D, 1 → I y 1 → P. Después introduzca Y1 = P(1 − e^ − (D*K*I)) para representar R. Por último, introduzca Y2 = P e^−(K X) + P e^−(K(X − I))*(X ≥ I) + P e^−(K(X − 2I)*(X ≥ 2I) + Y1 e^−(K(X − 3I))*(X ≥ 3I) + Y1 e^−(K(X − 4I))*(X ≥ 4I). Después, sólo seleccione Y2 para que sea graficada y grafique la función. Experimente con diferentes valores para k, d, I y P. ¿Qué ajuste es necesario en la expresión para Y2 cuando cambia d?

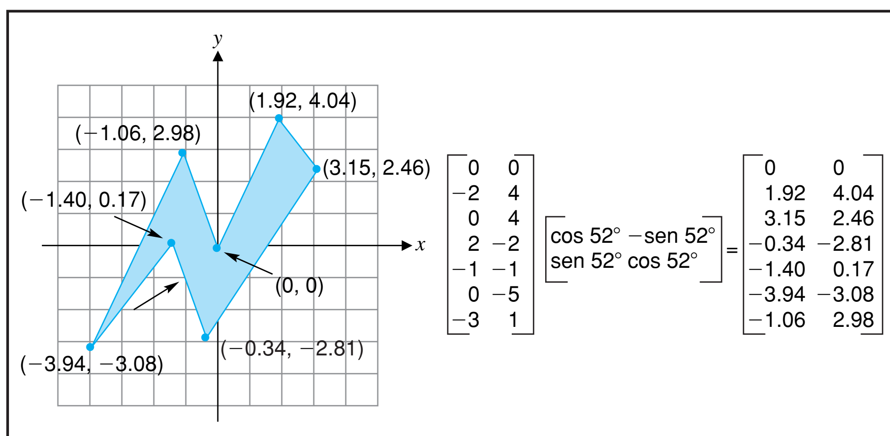
Álgebra de matrices

Las matrices, tema de este capítulo, son arreglos de números. Las matrices y su álgebra respectiva tienen una aplicación potencial siempre que una información numérica se pueda acomodar de manera significativa en bloques rectangulares.

Un área de aplicación del álgebra matricial son las gráficas por computadora. En un sistema de coordenadas, un objeto puede representarse por medio de una matriz que contenga las coordenadas de cada vértice o esquina. Por ejemplo, podríamos configurar un esquema de conexión por puntos en el que el rayo que se muestra esté representado por la matriz de la derecha.



Con frecuencia las gráficas por computadora muestran objetos que giran en el espacio. En una computadora, la rotación se realiza por medio de una multiplicación de matrices. El rayo se gira 52 grados en contra del sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen, esto por medio de la multiplicación de matrices, que incluye una matriz cuyas entradas son funciones trigonométricas del ángulo de rotación:



OBJETIVO Introducir el concepto de matriz y considerar tipos especiales de matrices.

6.1 Matrices

La búsqueda de formas para describir situaciones en matemáticas y economía, condujo al estudio de arreglos rectangulares de números. Por ejemplo, considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \\ 9x - 6y + 2z = 0. \end{cases}$$

Lo que caracteriza a este sistema son los coeficientes numéricos en las ecuaciones, junto con sus posiciones relativas. Por esta razón, el sistema puede describirse por el arreglo rectangular

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 9 & -6 & 2 \end{bmatrix},$$

que es llamado *matriz* (plural: *matrices*). Consideraremos a tales arreglos rectangulares como objetos por sí mismos; se acostumbra encerrarlos entre corchetes, y también es común que se utilicen paréntesis. En la representación simbólica de matrices usaremos letras mayúsculas en negritas como **A, B, C,** etcétera.



Advertencia No utilice barras verticales, | |, en lugar de corchetes o paréntesis, ya que ellas tienen un significado diferente.

Con frecuencia, en economía es conveniente utilizar matrices en la formulación de problemas y para exhibir datos. Por ejemplo, un fabricante que manufactura los productos A, B y C, podría representar las unidades de mano de obra y material involucrados en una semana de producción de estos artículos, como se muestra en la tabla 6.1. De manera más sencilla, estos datos pueden representarse por la matriz

TABLA 6.1

	Producto		
	A	**B**	**C**
Mano de obra	10	12	16
Material	5	9	7

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 16 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Los renglones de una matriz están numerados de manera consecutiva de arriba hacia abajo, y las columnas están numeradas de manera consecutiva de izquierda a derecha. Para la matriz A anterior, tenemos

$$\begin{matrix} & \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} \\ \text{renglón 1} & 10 & 12 & 16 \\ \text{renglón 2} & 5 & 9 & 7 \end{matrix} = \mathbf{A}.$$

Ya que **A** tiene dos renglones y tres columnas, decimos que A tiene *orden* o *tamaño*, 2×3 (se lee "2 por 3"), donde el número de renglones se especifica primero. De manera semejante, las matrices

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

tienen órdenes 3×3 y 4×2, respectivamente.

Los números en una matriz se conocen como **entradas** o **elementos.** Para denotar las entradas arbitrarias de una matriz, digamos de una de orden 2×3, existen dos métodos comunes. Primero, podemos utilizar letras diferentes:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

Segundo, una sola letra se puede usar, digamos a, junto con un subíndice *doble* apropiado para indicar su posición:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

El subíndice del renglón aparece a la izquierda del subíndice de la columna. En general $a_{ij} \neq a_{ji}$.

Para la entrada a_{12} se lee "a subíndice uno-dos", o sólo "a uno-dos", el primer subíndice, 1, especifica el renglón, y el segundo, 2, la columna en la que aparece la entrada. De manera similar, la entrada a_{23} (se lee "a dos-tres") es la que se encuentra en el segundo renglón y la tercera columna. Generalizando, decimos que el símbolo a_{ij} denota la entrada en el renglón i y en la columna j.

Nuestra atención en este capítulo estará en la operación y aplicación de varios tipos de matrices. Ahora daremos una definición formal de una matriz.

Definición

Un arreglo rectangular de números que consiste en m renglones y n columnas,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

se conoce como *matriz de* $m \times n$ o *matriz de orden* $m \times n$. Para la entrada a_{ij}, llamamos a i el subíndice del renglón y a j el subíndice de la columna.

El número de entradas en una matriz de $m \times n$ *es mn*. Por brevedad, una matriz de $m \times n$ puede denotarse por el símbolo $[a_{ij}]_{m \times n}$ o de manera más sencilla $[a_{ij}]$, donde el orden se entiende que es el apropiado para el contexto dado. Esta notación sólo indica qué tipos de símbolos se utilizan para denotar la entrada general.


Advertencia No confunda la entrada general a_{ij} con la matriz $[a_{ij}]$.

Una matriz que tiene exactamente un renglón, tal como la matriz de 1×4

$$\mathbf{A} = [1 \quad 7 \quad 12 \quad 3],$$

se llama **matriz renglón** o **vector renglón.** Una matriz que consiste en una sola columna como la matriz de 5×1

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 15 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix},$$

se llama **matriz columna** o **vector columna.**

Principios en práctica 1
Orden (o tamaño) de una matriz

Una fabricante que utiliza las materias primas A y B, está interesada en hacer un seguimiento de los costos de estos materiales que provienen de tres fuentes diferentes. ¿Cuál es el orden de la matriz que ella debe utilizar?

EJEMPLO 1 Orden (o tamaño) de una matriz

a. La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ tiene orden 1×3.

b. La matriz $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ tiene tamaño 3×2.

c. La matriz $[7]$ tiene orden 1×1.

d. La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & -2 & 4 \\ 9 & 11 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ tiene orden 3×5 y $3(5) = 15$ entradas.

Principios en práctica 2
Construcción de matrices

Un análisis de un lugar de trabajo utiliza una matriz de 3×5 para describir el tiempo empleado en cada una de las tres fases de cinco diferentes proyectos. El proyecto 1 requiere de 1 hora en cada fase, el proyecto 2 requiere el doble de tiempo que el proyecto 1, el proyecto 3 requiere el doble de tiempo que el proyecto 2, . . . , y así sucesivamente. Construya esta matriz de análisis de tiempo.

EJEMPLO 2 Construcción de matrices

a. *Construir una matriz columna de tres entradas tal que* $a_{21} = 6$ *y* $a_{i1} = 0$ *en los otros casos.*

Solución: como $a_{11} = a_{31} = 0$, la matriz es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b. *Si* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *tiene orden* 3×4 *y* $a_{ij} = i + j$, *determinar* $\mathbf{A}$.

Solución: aquí $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3, 4$ y $\mathbf{A}$ tiene $(3)(4) = 12$ entradas. Ya que $a_{ij} = i + j$, la entrada en el renglón i y columna j se obtiene sumando los números i y j. De aquí $a_{11} = 1 + 1 = 2$, $a_{12} = 1 + 2 = 3$, $a_{13} = 1 + 3 = 4$, etc. Por tanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & 1+4 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 & 2+4 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

c. *Construir la matriz* $\mathbf{I}$ de 3×3, *dado que* $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$ *y* $a_{ij} = 0$ *en cualquier otro caso.*

Solución: la matriz está dada por:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Igualdad de matrices

Ahora definimos lo que significa decir que dos matrices son *iguales*.

Definición

Las matrices $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ son ***iguales*** si y sólo si tienen el mismo orden y $a_{ij} = b_{ij}$ para cada i y cada j (esto es, entradas correspondientes son iguales).

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} 1+1 & \frac{2}{2} \\ 2 \cdot 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix},$$

pero,

$$[1 \quad 1] \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [1 \quad 1] \neq [1 \quad 1 \quad 1] \qquad \text{(diferentes tamaños).}$$

Una ecuación matricial puede definir un sistema de ecuaciones. Por ejemplo, suponga que

$$\begin{bmatrix} x & y+1 \\ 2z & 5w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Igualando las entradas correspondientes, debemos tener

$$\begin{cases} x = 2, \\ y + 1 = 7, \\ 2z = 4, \\ 5w = 2. \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene $x = 2$, $y = 6$, $z = 2$ y $w = \frac{2}{5}$. Es un hecho significativo que una ecuación matricial puede definir un sistema de ecuaciones lineales.

Transpuesta de una matriz

Si **A** es una matriz, la matriz que se forma a partir de **A** por intercambio de sus renglones con sus columnas se conoce como la *transpuesta* de **A**.

Definición

La ***transpuesta*** de una matriz **A** de $m \times n$, denotada $\mathbf{A}^T$, es la matriz de $n \times m$ cuyo i-ésimo renglón es la i-ésima columna de **A**.

EJEMPLO 3 Transpuesta de una matriz

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, *encontrar* $\mathbf{A}^T$.

Solución: la matriz **A** es de 2×3, de modo que $\mathbf{A}^T$ es de 3×2. La columna 1 de **A** se convierte en el renglón 1 de $\mathbf{A}^T$, la columna 2 se convierte en el renglón 2 y la columna 3 se convierte en el renglón 3. Por tanto,

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Observe que las columnas de $\mathbf{A}^T$ son los renglones de **A.** Debe darse cuenta de que si tomamos la transpuesta de nuestra respuesta, obtendremos la matriz original **A.** Esto es, la operación transpuesta tiene la propiedad de que

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}.$$

Tecnología

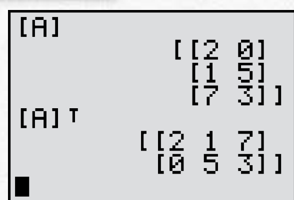


FIGURA 6.1 **A** y $\mathbf{A}^T$

Las calculadoras gráficas tienen la capacidad de manipular matrices. Por ejemplo, la figura 6.1 muestra el resultado de aplicar la operación de transposición a la matriz **A.**

Matrices especiales

Cierto tipo de matrices desempeñan funciones importantes en la teoría de matrices. Ahora consideraremos algunos de estos tipos especiales.

Una matriz de $m \times n$ cuyas entradas son todas iguales a cero, se conoce como **matriz cero** de $m \times n$ y se denota por $\mathbf{O}_{m \times n}$ o, de manera más sencilla, por **O** si se sobreentiende su tamaño. Así, la matriz cero de 2×3 es

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y en general,

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$



Advertencia No confunda la matriz **O** con el número real 0.

Una matriz que tiene el mismo número de columnas que de renglones, por ejemplo n renglones y n columnas, es llamada **matriz cuadrada** de orden n. Esto es, una matriz $m \times n$ es cuadrada si y sólo si $m = n$. Por ejemplo, las matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [3]$$

son cuadradas con órdenes 3 y 1, respectivamente.

En una matriz cuadrada de orden n, las entradas $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$, las cuales están sobre la diagonal "principal" que va desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha se llaman entradas de la *diagonal principal*, o simplemente la **diagonal principal.** Así, en la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

la diagonal principal (véase la región resaltada) consiste en $a_{11} = 1, a_{22} = 5$ y $a_{33} = 9$.

Una matriz cuadrada **A** es llamada **matriz diagonal** si todas las entradas que se encuentran fuera de la diagonal principal son cero; esto es, si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Ejemplos de matrices diagonales son

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Una matriz cuadrada A se dice que es una **matriz triangular superior** si todas las entradas *debajo de* la diagonal principal son cero; esto es, si $a_{ij} = 0$ para $i > j$. De manera análoga, una matriz **A** se dice que es una **matriz triangular inferior** si todas las entradas *por arriba* de la diagonal principal son cero; esto es, si $a_{ij} = 0$ para $i < j$. Cuando una matriz es triangular superior o triangular inferior se conoce como una **matriz triangular.** Así, las matrices

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una matriz diagonal es tanto triangular superior como triangular inferior.

son matrices triangular superior y triangular inferior, respectivamente y, por tanto, son matrices triangulares.

Ejercicio 6.1

1. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = [6 \quad 2], \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = [4].$$

a. Establezca el orden de cada matriz.
b. ¿Cuáles matrices son cuadradas?
c. ¿Cuáles matrices son triangulares superiores? ¿Triangulares inferiores?
d. ¿Cuáles son vectores renglón?
e. ¿Cuáles son vectores columna?

En los problemas del 2 al 9 sea

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 14 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. ¿Cuál es el orden de **A**?

Determine las entradas siguientes.

3. a_{43}.

4. a_{12}.

5. a_{32}.

6. a_{34}.

7. a_{44}.

8. a_{55}.

9. ¿Cuáles son las entradas de la diagonal principal?

10. Escriba la matriz triangular superior de orden 5, dado que todas las entradas que no se requiere que sean cero, son iguales a uno.

11. Construya una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ si **A** es 3×4 y $a_{ij} = 4i + 2j$.

12. Construya la matriz $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ si $\mathbf{B}$ es 2×2 y $b_{ij} = (-1)^{i+j}(i^2 + j^2)$.

13. Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es de 12×10, ¿cuántas entradas tiene $\mathbf{A}$? Si $a_{ij} = 1$ para $i = j$ y $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, encuentre a_{33}, a_{52}, $a_{10,10}$, y $a_{12,10}$.

14. Liste la diagonal principal de

a. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 7 & 0 & 4 & -1 \\ -6 & 6 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, **b.** $\begin{bmatrix} x & 1 & y \\ 9 & y & 7 \\ y & 0 & z \end{bmatrix}$.

15. Escriba la matriz cero de orden (a) 4 y (b) 6.

16. Si $\mathbf{A}$ es una matriz de 4×5, ¿cuál es el orden de $\mathbf{A}^T$?

En los problemas del 17 al 20 encuentre $\mathbf{A}^T$.

17. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

18. $\mathbf{A} = [2 \quad 4 \quad 6 \quad 8]$.

19. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

20. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

---

21. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

a. ¿Cuáles son matrices diagonales?
b. ¿Cuáles son matrices triangulares?

22. Una matriz es *simétrica* si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. ¿La matriz del problema 20 es simétrica?

23. Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

verifique la propiedad general de que $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ encontrando $\mathbf{A}^T$ y después $(\mathbf{A}^T)^T$.

En los problemas del 24 al 27 resuelva la ecuación matricial.

24. $\begin{bmatrix} 2x & y \\ z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.

25. $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ x & 7 \\ 3y & 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$.

26. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3x & y & 3z \\ 0 & w & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 9 \\ 0 & 9 & 8 \end{bmatrix}$.

27. $\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 7 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 7 \\ 7 & y \end{bmatrix}$.

---

28. Acciones Un agente de bolsa vendió a un cliente 200 acciones de tipo A, 300 de tipo B, 500 de tipo C y 300 de tipo D. Escriba un vector renglón que dé el número de acciones vendidas de cada tipo. Si las acciones se venden en \$20, \$30, \$45 y \$100 por acción, respectivamente, escriba esta información como un vector columna.

29. Análisis de ventas La compañía Widget tiene sus reportes de ventas mensuales dados por medio de matrices cuyos renglones, en orden, representan el número de modelos regular, de lujo y de extra lujo vendidos, mientras que las columnas dan el número de unidades rojas, blancas, azules y púrpuras vendidas. Las matrices para enero ($\mathbf{E}$) y febrero ($\mathbf{F}$) son

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

En enero, ¿cuántas unidades de los modelos de extra lujo blancos se vendieron? (b) En febrero, ¿cuántos modelos de lujo azules se vendieron? (c) ¿En qué mes se vendieron más modelos regulares púrpuras? (d) ¿De qué modelo y color se vendió el mismo número de unidades en ambos meses? (e) ¿En qué mes se vendieron más modelos de lujo? (f) ¿En qué mes se vendieron más artículos rojos? (g) ¿Cuántos artículos se vendieron en enero?

30. Matriz de insumo-producto Las matrices de insumo-producto desarrolladas por W. W. Leontief, indican las interrelaciones que existen entre los diferentes sectores de una economía durante algún periodo. Un ejemplo hipotético para una economía simplificada está dado por la matriz $\mathbf{M}$ presentada al final de este problema. Los sectores consumidores son los mismos que los productores y pueden considerarse como fabricantes, gobierno, acero, agricultura, doméstico, etc. Cada renglón

muestra cómo el producto de un sector dado es consumido por los cuatro sectores. Por ejemplo, del total de la producción de la industria A, 50 unidades fueron para la propia industria A, 70 para la B, 200 para C y 360 para todos los demás consumidores. La suma de las entradas en el renglón 1, es decir 680, da la producción total de A para un periodo dado. Cada columna da la producción de cada sector que consume un sector dado. Por ejemplo, en la producción de 680 unidades, la industria A consume 50 unidades de A, 90 de B, 120 de C y 420 de todos los demás productores. Para cada columna, encuentre la suma de las entradas. Haga lo mismo con cada renglón. ¿Qué observa al comparar esos totales? Suponga que el sector A aumenta su producción en 20%, es decir, en 136 unidades. En el supuesto que esto tiene como consecuencia un aumento uniforme de 20% en todos sus insumos, ¿en cuántas unidades el sector B aumentará su producción? Responda la misma pregunta para C y para todos los demás productores.

	CONSUMIDORES			
PRODUCTORES	Industria A	Industria B	Industria C	Todos los demás consumidores
Industria A	50	70	200	360
Industria B	90	30	270	320
Industria C	120	240	100	1050
Todos los demás productores	420	370	940	4960

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 50 & 70 & 200 & 360 \\ 90 & 30 & 270 & 320 \\ 120 & 240 & 100 & 1050 \\ 420 & 370 & 940 & 4960 \end{bmatrix}$$

31. Encuentre todos los valores de x para los cuales

$$\begin{bmatrix} x^2 + 2000x & \sqrt{x^2} \\ x^2 & \ln(e^x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2001 & -x \\ 2001 - 2000x & x \end{bmatrix}.$$

En los problemas 32 y 33 encuentre $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

32. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

33. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

OBJETIVO Definir la suma de matrices y la multiplicación por un escalar, además de considerar las propiedades relacionadas con estas operaciones.

6.2 Suma de matrices y multiplicación por un escalar

Suma de matrices

Considere un comerciante de vehículos para nieve que vende dos modelos: Deluxe y Super. Cada uno está disponible en uno de dos colores, rojo y azul. Suponga que las ventas para enero y febrero están representadas por las matrices de ventas

$$\mathbf{E} = \begin{array}{c} \\ \text{rojo} \\ \text{azul} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Deluxe} & \text{Super} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \quad 2 \\ 3 & \quad 5 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Cada renglón de **E** y **F** proporciona el número vendido de cada modelo para un color dado. Cada columna proporciona el número vendido de cada color para un modelo dado. Una matriz que represente las ventas totales para cada modelo y color durante los dos meses, puede obtenerse sumando las correspondientes entradas en **E** y **F:**

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

Esta situación proporciona la oportunidad para introducir la operación de suma de matrices para dos matrices del mismo orden.

Definición

Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ son matrices de $m \times n$, entonces la ***suma*** $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es la matriz de $m \times n$ que se obtiene sumando las correspondientes entradas de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$; esto es, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$.

Principios en práctica 1
Suma de matrices

Una compañía de muebles de oficina fabrica escritorios y mesas en dos plantas, A y B. La matriz **E** representa la producción de las dos plantas en enero y la matriz **F** representa la producción de las dos plantas en febrero. Escriba una matriz que represente la producción total en las dos plantas para los dos meses. **E** y **F** son como sigue:

$$\mathbf{E} = \begin{matrix} \text{escritorios} \\ \text{mesas} \end{matrix} \overset{\begin{matrix} \text{A} & \text{B} \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 120 & 80 \\ 105 & 130 \end{bmatrix}};$$

$$\mathbf{F} = \begin{matrix} \text{escritorios} \\ \text{mesas} \end{matrix} \begin{bmatrix} 110 & 140 \\ 85 & 125 \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Como **A** y **B** son del mismo tamaño (2×3), su suma está definida. Tenemos

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3+5 & 0+(-3) & -2+6 \\ 2+1 & -1+2 & 4+(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 1 Suma de matrices

a. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+7 & 2-2 \\ 3-6 & 4+4 \\ 5+3 & 6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 8 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ no está definida, ya que las matrices no son del mismo tamaño.

Si **A, B, C** y **O** tienen el mismo orden, entonces las propiedades siguientes se cumplen para la suma de matrices:

Estas propiedades de la suma de matrices son semejantes a las propiedades correspondientes de los números reales.

Propiedades para la suma de matrices

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (propiedad conmutativa),
2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (propiedad asociativa),
3. $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$ (propiedad del neutro aditivo).

La propiedad 1 establece que las matrices pueden sumarse en cualquier orden, y la propiedad 2 permite que las matrices se agrupen para la operación de suma. La propiedad 3 establece que la matriz cero desempeña la misma función en la suma de matrices que el número cero en la suma de números reales. Estas propiedades se ilustran en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Propiedades de la suma de matrices

Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. *Demostrar que* $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

Solución:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

b. *Demostrar que* $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.

Solución:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ -1 & -3 & 2\end{bmatrix}+\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 2\\ -1 & -5 & 3\end{bmatrix}.$$

c. *Demostrar que* $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$.

Solución:

$$\mathbf{A}+\mathbf{O}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{A}.$$

EJEMPLO 3 Vectores de demanda para una economía

Considere una economía hipotética simplificada que tiene tres industrias, digamos, carbón, electricidad y acero, y tres consumidores 1, 2 y 3. Suponga que cada consumidor puede utilizar parte de la producción de cada industria y cada industria utiliza parte de la producción de cada una de las otras industrias. Entonces, las necesidades de cada consumidor y de cada industria pueden representarse por un vector (renglón) de demanda, cuyas entradas, en orden, dan la cantidad de carbón, electricidad y acero necesarios para el consumidor o industria en algunas unidades convenientes. Por ejemplo, los vectores de demanda para los consumidores podrían ser:

$$\mathbf{D}_1=[3\quad 2\quad 5],\qquad \mathbf{D}_2=[0\quad 17\quad 1],\qquad \mathbf{D}_3=[4\quad 6\quad 12],$$

y para las industrias, podrían ser:

$$\mathbf{D}_C=[0\quad 1\quad 4],\qquad \mathbf{D}_E=[20\quad 0\quad 8],\qquad \mathbf{D}_S=[30\quad 5\quad 0],$$

donde los subíndices C, E y S son para carbón, electricidad y acero, respectivamente. La demanda total de los consumidores para estos bienes está dada por la suma

$$\mathbf{D}_1+\mathbf{D}_2+\mathbf{D}_3=[3\quad 2\quad 5]+[0\quad 17\quad 1]+[4\quad 6\quad 12]=[7\quad 25\quad 18].$$

La demanda industrial total está dada por la suma

$$\mathbf{D}_C+\mathbf{D}_E+\mathbf{D}_S=[0\quad 1\quad 4]+[20\quad 0\quad 8]+[30\quad 5\quad 0]=[50\quad 6\quad 12].$$

Por tanto, la demanda global total está dada por

$$[7\quad 25\quad 18]+[50\quad 6\quad 12]=[57\quad 31\quad 30].$$

Así, la industria del carbón vende un total de 57 unidades, el total de unidades de electricidad vendidas es de 31 y el total de unidades de acero que fueron vendidas es de 30.[1]

Multiplicación por un escalar

Retomemos al vendedor de vehículos para nieve, recuerde que en febrero las ventas estaban dadas por la matriz

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}.$$

[1]Este ejemplo, así como los demás de este capítulo, es de John G. Kemeny, J. Laurie Snell y Gerald L. Thompson, *Introduction to Finite Mathematics*, tercera edición, © 1974. Reimpreso con permiso de Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey.

Si en marzo el vendedor duplica las ventas de febrero de cada modelo y color de vehículos para nieve, la matriz de ventas para marzo podría obtenerse multiplicando cada entrada de **F** por 2

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2(3) & 2(1) \\ 2(4) & 2(2) \end{bmatrix}.$$

Parece razonable escribir esta operación como

$$\mathbf{M} = 2\mathbf{F} = 2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix},$$

que se considera como la multiplicación de una matriz por un número real. De hecho, tenemos la definición siguiente.

Definición

Si **A** es una matriz $m \times n$ y k es un número real (también llamado escalar), entonces con $k\mathbf{A}$ denotamos a la matriz $m \times n$ obtenida al multiplicar cada entrada de **A** por k. La operación se llama **multiplicación por un escalar,** y $k\mathbf{A}$ se llama ***múltiplo escalar*** de **A.**

Por ejemplo,

$$-3\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(1) & -3(0) & -3(-2) \\ -3(2) & -3(-1) & -3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ -6 & 3 & -12 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 4 Multiplicación por un escalar

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcular lo siguiente.

a. $5\mathbf{A}$.

Solución:

$$5\mathbf{A} = 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(1) & 5(2) \\ 5(4) & 5(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}.$$

b. $-\frac{2}{3}\mathbf{B}$.

Solución:

$$-\frac{2}{3}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}(3) & -\frac{2}{3}(-4) \\ -\frac{2}{3}(7) & -\frac{2}{3}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{8}{3} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

c. $\frac{1}{2}\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.

Solución:

$$\frac{1}{2}\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ 21 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{2} & -11 \\ 23 & 2 \end{bmatrix}.$$

d. $0\mathbf{A}$.

Solución:

$$0\mathbf{A} = 0\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

e. $k\mathbf{O}$.

Solución:

$$k\mathbf{O} = k\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

Si **A, B** y **O** son del mismo tamaño, entonces para cualesquiera escalares, k, k_1 y k_2 tenemos las propiedades siguientes de multiplicación por un escalar:

Propiedades de la multiplicación por un escalar

1. $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$.
2. $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$.
3. $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{A}$.
4. $0\mathbf{A} = \mathbf{O}$.
5. $k\mathbf{O} = \mathbf{O}$.

Recuerde que $\mathbf{O} \neq 0$, ya que 0 es un *escalar* y **O** es una *matriz* cero.

Las propiedades 4 y 5 se ilustraron en los ejemplos 4(d) y (e); las otras se ilustran en los ejercicios.

También tenemos las propiedades siguientes de la operación de transposición, donde **A** y **B** son del mismo tamaño y k es cualquier escalar:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}.$$
$$(k\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = k\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

La primera propiedad establece que *la transpuesta de una suma es la suma de las transpuestas*.

Sustracción de matrices

Si A es cualquier matriz, entonces el múltiplo escalar $(-1)\mathbf{A}$ se escribe simplemente como $-\mathbf{A}$ y se denomina **negativo de A:**

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}.$$

Así, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix},$$

entonces

$$-\mathbf{A} = (-1)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Observe que $-\mathbf{A}$ es la matriz que se obtiene multiplicando cada entrada de **A** por -1.

La resta (o sustracción) de matrices se define en términos de la suma de matrices:

Definición

Si **A** y **B** tienen el mismo tamaño, entonces por **A** − **B** queremos decir **A** + (−**B**).

EJEMPLO 5 Resta de matrices

a.
$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -4 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2-6 & 6+2 \\ -4-4 & 1-1 \\ 3+0 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -8 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar **A** − **B**, con mayor facilidad, podemos restar cada entrada de **B** de la correspondiente entrada de **A**.

b. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, entonces

$$\mathbf{A}^T - 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Principios en práctica 2

Ecuación matricial

Una fabricante de puertas, ventanas y armarios escribe su utilidad anual (en miles de dólares) para cada categoría, en un vector como $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 248 \\ 319 \\ 532 \end{bmatrix}$. Sus costos fijos de producción pueden describirse por medio del vector $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix}$. Ella calcula que, con una nueva estructura de precios que genere un ingreso de 80% del ingreso de su competidor, puede duplicar su utilidad, en el supuesto que sus costos fijos permanezcan constantes. Este cálculo puede representarse por medio de

$$0.8\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 248 \\ 319 \\ 532 \end{bmatrix}.$$

Resuelva para x_1, x_2, y x_3, las cuales representan los ingresos de su competidor para cada categoría.

EJEMPLO 6 Ecuación matricial

Resolver la ecuación $2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Solución:

Estrategia: primero simplificamos cada lado en una matriz. Después, por la igualdad de matrices, igualamos las entradas correspondientes.

Tenemos

$$2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -20 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 2x_1 - 3 \\ 2x_2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -20 \end{bmatrix}.$$

Por la igualdad de matrices debemos tener $2x_1 - 3 = 25$, que da $x_1 = 14$; a partir de $2x_2 - 4 = -20$ obtenemos $x_2 = -8$.

Tecnología

Las operaciones matriciales de suma, resta y multiplicación por un escalar pueden realizarse en una calculadora gráfica. Por ejemplo, la figura 6.2 muestra $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

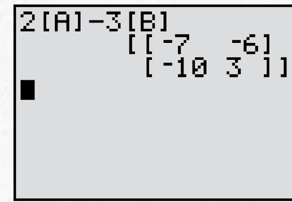


FIGURA 6.2 Operaciones matriciales con calculadoras gráficas.

Ejercicio 6.2

En los problemas del 1 al 12 realice las operaciones indicadas.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -6 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \\ 9 & 11 & -2 \end{bmatrix}.$

2. $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}.$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 7 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

4. $2\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

5. $3[1 \quad -3 \quad 1] + 2[-6 \quad 1 \quad 4] - 0[-2 \quad 7 \quad 4].$

6. $[7 \quad 7] + 66.$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}.$

8. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

9. $-6\begin{bmatrix} 2 & -6 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$

10. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -6 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$

11. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ -4 & 0 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 9 \end{bmatrix}.$

12. $2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right).$

En los problemas del 13 al 24 calcule las matrices requeridas si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. $-\mathbf{B}.$

14. $-(\mathbf{A} - \mathbf{B}).$

15. $2\mathbf{O}.$

16. $\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}.$

17. $2(\mathbf{A} - 2\mathbf{B}).$

18. $0(\mathbf{A} + \mathbf{B}).$

19. $3(\mathbf{A} - \mathbf{C}) + 6.$

20. $\mathbf{A} + (\mathbf{C} + \mathbf{B}).$

21. $2\mathbf{B} - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{C}.$

22. $3\mathbf{C} - 2\mathbf{B}.$

23. $\frac{1}{2}\mathbf{A} - 2(\mathbf{B} + 2\mathbf{C}).$

24. $2\mathbf{A} - \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{C}).$

En los problemas del 25 al 28 verifique las ecuaciones para las matrices **A, B** *y* **C** *anteriores.*

25. $3(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 3\mathbf{A} + 3\mathbf{B}.$

26. $(2 + 3)\mathbf{A} = 2\mathbf{A} + 3\mathbf{A}.$

27. $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{A}$.

28. $k(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} + k\mathbf{C}$.

En los problemas del 29 al 34 sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule, si es posible, las matrices indicadas.

29. $3\mathbf{A}^T + \mathbf{D}$.

30. $(\mathbf{B} - \mathbf{C})^T$.

31. $2\mathbf{B}^T - 3\mathbf{C}^T$.

32. $2\mathbf{B} + \mathbf{B}^T$.

33. $\mathbf{C}^T - \mathbf{D}$.

34. $(\mathbf{D} - 2\mathbf{A}^T)^T$.

---

35. Exprese la ecuación matricial

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - y\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

como un sistema de ecuaciones lineales y resuélvalo.

36. En forma inversa a la que utilizó en el problema 35, escriba el sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y = 16 \\ 2x - 6y = -4 \end{cases}$$

como una ecuación matricial.

En los problemas del 37 al 40 resuelva las ecuaciones matriciales.

37. $3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$.

38. $3\begin{bmatrix} x \\ 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 7 \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ 2y \end{bmatrix}$.

39. $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -24 \\ 14 \end{bmatrix}$.

40. $x\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 3x + 12 - 3y \end{bmatrix}$.

---

41. Producción Una compañía de artículos electrónicos fabrica televisores, VCR y reproductores de CD en dos plantas, A y B. La matriz **X** representa la producción de las dos plantas para el minorista X, y la matriz **Y** representa la producción de las dos plantas para el minorista Y. Escriba una matriz que represente la producción total en las dos plantas para ambos minoristas. Las matrices **X** y **Y** son como sigue:

$$\mathbf{X} = \begin{array}{c} \\ \text{TV} \\ \text{VCR} \\ \text{CD} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 40 \\ 45 & 30 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} \end{array}; \quad \mathbf{Y} = \begin{array}{c} \\ \text{TV} \\ \text{VCR} \\ \text{CD} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 15 & 25 \\ 30 & 25 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \end{array}.$$

42. Ventas Sea **A** la matriz que representa las ventas (en miles de dólares) de una compañía de juguetes para tres ciudades en 1998, y sea **B** la matriz que representa las ventas para las mismas ciudades en el año 2000, en donde **A** y **B** están dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{array}{r} \text{Acción} \\ \text{Educativo} \end{array}\begin{bmatrix} 400 & 350 & 150 \\ 450 & 280 & 850 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{array}{r} \text{Acción} \\ \text{Educativo} \end{array}\begin{bmatrix} 380 & 330 & 220 \\ 460 & 320 & 750 \end{bmatrix}.$$

Si la compañía compra un competidor, y en 2001 duplica las ventas que consiguió el año 2000, ¿cuál es el cambio de las ventas entre 1998 y 2001?

43. Suponga que el precio de los productos A, B y C está dado, en ese orden, por el vector de precios

$$\mathbf{P} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3].$$

Si los precios se incrementan en 10%, el vector de los nuevos precios puede obtenerse multiplicando **P,** ¿por qué escalar?

44. Demuestre que $(\mathbf{A} - \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T$. [*Sugerencia:* utilice la definición de resta y las propiedades de la operación de transposición.]

En los problemas del 45 al 47 calcule las matrices dadas si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & -6 \end{bmatrix}.$$

45. $4\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.

46. $-2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \mathbf{C}$.

47. $2(3\mathbf{C} - \mathbf{A}) + 2\mathbf{B}$.

OBJETIVO Definir la multiplicación de matrices y considerar las propiedades asociadas. Expresar un sistema como una sola ecuación matricial por medio de la multiplicación de matrices.

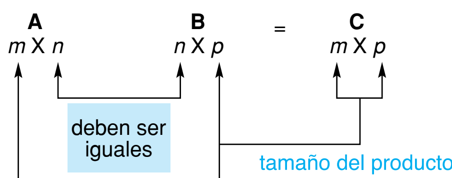
6.3 MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Además de las operaciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar, bajo ciertas circunstancias puede definirse el producto **AB** de las matrices **A** y **B.** Esta circunstancia es que el número de columnas de **A** sea igual al número de renglones de **B.** Aunque la siguiente definición de multiplicación de matrices no parece ser muy natural (parecería más natural sólo multiplicar las entradas correspondientes), un estudio más minucioso de las matrices lo convencerán de que nuestra definición es apropiada y extremadamente práctica para aplicaciones.

Definición

Sea **A** una matriz de $m \times n$ y **B** una matriz $n \times p$. Entonces el producto **AB** es la matriz **C** de $m \times p$ cuya entrada c_{ij}, en el renglón i y la columna j, se obtiene como sigue: sume los productos formados al multiplicar, en orden, cada entrada (esto es, primera, segunda, etc.) del renglón i de **A** por la "correspondiente" entrada (esto es, primera, segunda, etc.) de la columna j de **B.**

Tres puntos concernientes a la definición anterior de **AB** deben comprenderse en su totalidad. Primero, la condición de que **A** sea de $m \times n$ y **B** sea de $n \times p$, es equivalente a decir que el número de columnas de **A** debe ser igual al número de renglones de **B.** Segundo, el producto será una matriz de orden $m \times p$, tendrá tantos renglones como **A** y tantas columnas como **B.**



Tercero, la definición se refiere al producto **AB,** *en ese orden;* **A** es el factor izquierdo y **B** el factor derecho. Para **AB,** decimos que **B** está *premultiplicado* por **A,** o bien, que **A** está *posmultiplicado* por **B.**

Para aplicar la definición, encontremos el producto

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz **A** tiene tamaño 2×3 $(m \times n)$ y la matriz **B** tiene tamaño 3×3 $(n \times p)$. El número de columnas de **A** es igual al número de renglones de **B** $(n = 3)$, de modo que el producto **C** está definido y será una matriz de 2×3 $(m \times p)$; esto es,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}.$$

La entrada c_{11} se obtiene sumando los productos de cada entrada en el renglón 1 de **A** por la "correspondiente" entrada en la columna 1 de **B.** Así,

entradas del renglón 1 de **A**

$$c_{11} = (2)(1) + (1)(0) + (-6)(-2) = 14.$$

entradas de la columna 1 de **B**

En este paso tenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}.$$

De manera similar, para c_{12}, usamos las entradas del renglón 1 de **A** y las de la columna 2 de **B:**

entradas del renglón 1 de **A**

$$c_{12} = (2)(0) + (1)(4) + (-6)(1) = -2.$$

entradas de la columna 2 de **B**

Ahora tenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}.$$

Para las restantes entradas de **AB,** obtenemos

$$c_{13} = (2)(-3) + (1)(2) + (-6)(1) = -10,$$

$$c_{21} = (1)(1) + (-3)(0) + (2)(-2) = -3,$$

$$c_{22} = (1)(0) + (-3)(4) + (2)(1) = -10,$$

$$c_{23} = (1)(-3) + (-3)(2) + (2)(1) = -7.$$

Así,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -10 \\ -3 & -10 & -7 \end{bmatrix}.$$

Observe que si invertimos el orden de los factores, entonces el producto

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

La multiplicación de matrices no es conmutativa.

no está definido, ya que el número de columnas de **B** *no* es igual al número de renglones de **A.** Esto muestra que la multiplicación de matrices no es conmutativa. Esto es, para cualesquier matrices **A** y **B** en general $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (aun si ambos productos están definidos), de modo que el orden en el que las matrices estén escritas en un producto es extremadamente importante.

EJEMPLO 1 Tamaños de matrices y su producto

Sea **A** una matriz de 3×5 y **B** una matriz de 5×3. Entonces **AB** está definida y es una matriz de 3×3. Además, **BA** también está definida y es una matriz de 5×5.

Si **C** es una matriz de 3×5 y **D** es una matriz de 7×3, entonces **CD** no está definida, pero **DC** está definida y es una matriz de 7×5.

EJEMPLO 2 Producto de matrices

Calcular el producto de matrices

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución: como **A** es de 2×3 y **B** es de 3×2, el producto **AB** está definido y tendrá orden de 2×2. Moviendo de manera simultánea el dedo índice de la mano izquierda a lo largo de los renglones de **A,** y el dedo índice de la mano derecha a lo largo de las columnas de **B,** no le debe ser difícil determinar mentalmente las entradas del producto. Con esto obtenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Principios en práctica 1
Producto de matrices

Una librería tiene 100 diccionarios, 70 libros de cocina y 90 diccionarios ideológicos en existencia. Si el valor de cada diccionario es $28, cada libro de cocina cuesta $22 y cada diccionario ideológico $16, utilice un producto de matrices para determinar el valor total del inventario de la librería.

EJEMPLO 3 Producto de matrices

a. *Calcular* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$

Solución: el producto tiene orden 1×1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = [32].$$

b. *Calcular* $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}.$

Solución: el producto tiene orden 3×2:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 12 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}.$$

c. $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -3 & 11 \\ 10 & -1 & 0 \\ -7 & -4 & 10 \end{bmatrix}.$$

d. $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

El ejemplo 4 muestra que aunque los productos **AB** y **BA** estén definidos, no necesariamente son iguales.

EJEMPLO 4 Producto de matrices

Calcular **AB** *y* **BA** *si*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución: tenemos

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 14 & 3 \end{bmatrix}.$$

Observe que aunque ambos productos **AB** y **BA** están definidos, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Tecnología

La figura 6.3 muestra los resultados obtenidos con una calculadora gráfica para determinar el producto **AB** del ejemplo 4.

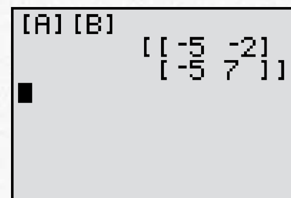


FIGURA 6.3 Solución mediante una calculadora del producto de matrices del ejemplo 4.

■ ***Principios en práctica 2***
Vector de costos

Los precios (en dólares por unidad) para tres libros de texto están representados por el vector de precios $\mathbf{P} = [26.25 \quad 34.75 \quad 28.50]$. Una librería universitaria hace un pedido de estos libros en las cantidades dadas por el vector columna $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 250 \\ 325 \\ 175 \end{bmatrix}$. Determine el costo total (en dólares) de la compra.

EJEMPLO 5 Vector de costos

Suponga que los precios, en dólares por unidad, para los productos A, B y C están representados por el vector de precios

$$\begin{matrix} & \text{Precio de} \\ & \text{A} \quad \text{B} \quad \text{C} \\ \mathbf{P} = & [2 \quad 3 \quad 4]. \end{matrix}$$

Si las cantidades (en unidades) de A, B y C que se compran están dadas por el vector columna

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{unidades de A} \\ \text{unidades de B} \\ \text{unidades de C,} \end{matrix}$$

entonces, el costo total en dólares de las compras está dado por la entrada en el vector de costos **PQ**

$$\mathbf{PQ} = [2 \quad 3 \quad 4]\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} = [(2 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (4 \cdot 11)] = [73].$$

EJEMPLO 6 Utilidad para una economía

En el ejemplo 3 de la sección 6.2, suponga que en la economía hipotética el precio del carbón es de \$10,000 por unidad, el de la electricidad de \$20,000 por unidad y el precio del acero es de \$40,000 por unidad. Estos precios pueden representarse por medio del vector (columna) de precios:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 10{,}000 \\ 20{,}000 \\ 40{,}000 \end{bmatrix}.$$

Considere la industria del acero. En total vende 30 unidades de acero en \$40,000 por unidad y, por tanto, su ingreso total es de \$1,200,000. Sus costos por los diferentes bienes están dados por el producto matricial

$$\mathbf{D}_S\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 30 & 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10{,}000 \\ 20{,}000 \\ 40{,}000 \end{bmatrix} = [400{,}000].$$

De aquí que la ganancia de la industria del acero es \$1,200,000 − \$400,000 = \$800,000.

La multiplicación de matrices satisface las propiedades siguientes, siempre y cuando todas las sumas y productos estén definidos:

Propiedades de la multiplicación de matrices

1. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ (propiedad asociativa),
2. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, (propiedades distributivas).
   $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$

EJEMPLO 7 Propiedad asociativa

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

calcular **ABC** *de dos maneras.*

Solución: agrupando **BC** se obtiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}.$$

De manera alterna, agrupando **AB** se obtiene

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -5 & 4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 19 \end{bmatrix}.$$

Observe que $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$.

EJEMPLO 8 Propiedad distributiva

Verificar que $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ *si*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución: en el lado izquierdo tenemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 17 \end{bmatrix}.$$

En el lado derecho,

$$\mathbf{AB}+\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 17 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$.

EJEMPLO 9 Materia prima y costos

Suponga que un contratista ha aceptado pedidos para cinco casas con estilo rústico, siete con estilo moderno y 12 con estilo colonial. Entonces, sus pedidos pueden representarse por el vector renglón

$$\mathbf{Q} = [5 \quad 7 \quad 12].$$

Además, suponga que las "materias primas" que se utilizan en cada tipo de casa son acero, madera, vidrio, pintura y mano de obra. Las entradas de la matriz **R** siguiente, dan el número de unidades de cada materia prima que se utilizará en cada tipo de casa (las entradas no necesariamente reflejan la realidad, pero se eligieron así por conveniencia).

	Acero	Madera	Vidrio	Pintura	Mano de obra
Rústico	5	20	16	7	17
Moderno	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

$= \mathbf{R}.$

Cada renglón indica la cantidad de materia prima necesaria para una clase dada de casa; cada columna indica la cantidad de una materia prima dada necesaria para cada tipo de casa. Ahora suponga que el contratista desea calcular la cantidad de cada materia prima necesaria para satisfacer todos sus pedidos. Entonces, tal información está dada por la matriz **QR**

$$\mathbf{QR} = [5 \quad 7 \quad 12]\begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$= [146 \quad 526 \quad 260 \quad 158 \quad 388].$$

Así, el contratista debe ordenar 146 unidades de acero, 526 de madera, 260 de vidrio, etcétera.

El contratista también está interesado en conocer los costos que tendrá que pagar por estas materias primas. Suponga que el acero cuesta $2500 por unidad, la madera $1200 por unidad, y el vidrio, la pintura y la mano de obra cuestan $800, $150 y $1500 por unidad, respectivamente. Estos datos pueden escribirse como el vector columna de costo **C**

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2500 \\ 1200 \\ 800 \\ 150 \\ 1500 \end{bmatrix}.$$

Entonces el costo de cada tipo de casa está dado por la matriz **RC**

$$\mathbf{RC} = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2500 \\ 1200 \\ 800 \\ 150 \\ 1500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75{,}850 \\ 81{,}550 \\ 71{,}650 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, el costo de los materiales para la casa rústica es de $75,850, para la casa estilo moderno $81,550 y para la estilo colonial $71,650.

El costo total de la materia prima para todas las casas está dado por

$$\mathbf{QRC} = \mathbf{Q}(\mathbf{RC}) = [5 \quad 7 \quad 12] \begin{bmatrix} 75{,}850 \\ 81{,}550 \\ 71{,}650 \end{bmatrix} = [1{,}809{,}900].$$

El costo total es $1,809,900.

Otra propiedad de las matrices incluye la multiplicación por un escalar y la multiplicación de matrices. Si k es un escalar y el producto **AB** está definido, entonces

$$k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}).$$

El producto $k(\mathbf{AB})$ puede escribirse simplemente como $k\mathbf{AB}$. Así

$$k\mathbf{AB} = k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}).$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} &= \left(3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Existe una propiedad interesante que concierne a la transpuesta de un producto de matrices:

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

En palabras, la transpuesta de un producto de matrices es igual al producto de sus transpuestas en orden *inverso*.

Aquí utilizamos el hecho de que $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Esta propiedad puede extenderse para el caso de más de dos factores. Por ejemplo,

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{BC})^T = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}.$$

EJEMPLO 10 Transpuesta de un producto

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Demostrar que $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Solución: tenemos

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{de modo que} \quad (\mathbf{AB})^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ahora

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = (\mathbf{AB})^T,$$

por lo que $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Al igual que la matriz cero desempeña una función importante como identidad en la suma de matrices, existe una matriz especial, llamada *matriz identidad*, que desempeña una función correspondiente en la multiplicación de matrices.

La **matriz identidad** de $n \times n$, denotada por $\mathbf{I}_n$, es la matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal principal son números uno.

Por ejemplo, las matrices identidad $\mathbf{I}_3$ e $\mathbf{I}_4$ son

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cuando el tamaño de una matriz identidad se entienda que debe ser el apropiado para que una operación esté definida, omitiremos el subíndice y sólo la denotaremos por **I.** Debe ser claro que

$$\mathbf{I}^T = \mathbf{I}.$$

La matriz identidad desempeña la misma función en la multiplicación de matrices, que el número 1 en la multiplicación de números reales. Esto es, así como el producto de un número real por 1 es igual al mismo número, el producto de una matriz y la matriz identidad es la misma matriz. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{I}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

En general, si **I** es de $n \times n$ y **A** tienen n columnas, entonces $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$. Si **B** tiene n renglones, entonces $\mathbf{IB} = \mathbf{B}$. Además, si **A** es de $n \times n$, entonces

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}.$$

EJEMPLO 11 Operaciones con matrices que incluyen a I y a O

Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

calcular cada una de las matrices siguientes.

a. $\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

Solución:

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

b. $3(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$.

Solución:

$$\begin{aligned} 3(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) &= 3\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= 3\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

c. $\mathbf{AO}$.

Solución:

$$\mathbf{AO} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

En general, si **AO** y **OA** están definidos, entonces

$$\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}.$$

d. $\mathbf{AB}$.

Solución:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

Si **A** es una matriz cuadrada, podemos hablar de una *potencia* de **A**:

> Si **A** es una matriz cuadrada y p es un entero positivo, entonces la ***p*-ésima potencia** de **A**, escrita $\mathbf{A}^p$, es el producto de p factores de **A**:
>
> $$\mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot \cdot \mathbf{A}}_{p \text{ factores}}.$$
>
> Si **A** es de tamaño $n \times n$, definimos $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$.

Hacemos notar que $\mathbf{I}^p = \mathbf{I}$.

EJEMPLO 12 Potencia de una matriz

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, *calcular* $\mathbf{A}^3$.

Solución: como $\mathbf{A}^3 = (\mathbf{A}^2)\mathbf{A}$ y

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

tenemos

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Tecnología

Los resultados del cálculo de $\mathbf{A}^4$ mediante una calculadora gráfica, donde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, se muestran en la figura 6.4.

```
[A]
          [[2  -3]
           [1  4 ]]
[A]^4
    [[-107  -252]
     [84    61  ]]
```

FIGURA 6.4 Potencia de una matriz.

Ecuaciones matriciales

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden representarse por medio de la multiplicación de matrices. Por ejemplo, considere la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

El producto del lado izquierdo tiene orden 2×1, así que es una matriz columna. Por tanto,

$$\begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Por la igualdad de matrices, las entradas correspondientes deben ser iguales, de modo que obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

De aquí que este sistema de ecuaciones lineales puede definirse por la ecuación matricial (1). En general, describimos la ecuación (1) diciendo que tiene la forma

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

donde **A** es la matriz obtenida de los coeficientes de las variables, **X** es una matriz columna constituida por las variables, y **B** es una matriz columna obtenida de las constantes (o términos independientes). La matriz **A** es llamada *matriz de coeficientes* del sistema.

Principios en práctica 3

Forma matricial de un sistema utilizando la multiplicación de matrices

Escriba el siguiente par de líneas en forma matricial, utilizando la multiplicación de matrices.

$y = -\frac{8}{5}x + \frac{8}{5}, y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$

EJEMPLO 13 Forma matricial de un sistema utilizando la multiplicación de matrices

Escribir el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 4, \\ 8x_1 + 3x_2 = 7, \end{cases}$$

en forma matricial utilizando la multiplicación de matrices.

Solución: si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix},$$

entonces el sistema dado es equivalente a la ecuación matricial

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

o bien

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6.3

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ *y* $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, *encuentre cada uno de los elementos siguientes.*

1. c_{11}. **2.** c_{23}. **3.** c_{32}.
4. c_{33}. **5.** c_{22}. **6.** c_{13}.

Si **A** *es de* 2×3, **B** *de* 3×1, **C** *de* 2×5, **D** *de* 4×3, **E** *de* 3×2 *y* **F** *de* 2×3, *encuentre el orden y número de entradas en cada uno de los siguientes incisos.*

7. **AE.** **8.** **DE.** **9.** **EC.** **10.** **DB.**
11. **FB.** **12.** **BA.** **13.** **EA.** **14.** **E(AE).**
15. **E(FB).** **16.** **(F + A)B.**

Escriba la matriz identidad que tiene el orden siguiente:

17. 4.

18. 6.

En los problemas del 19 al 36 realice las operaciones indicadas.

19. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

20. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

21. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

22. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

23. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

24. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

25. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

26. $\begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$.

27. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

28. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

29. $3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

30. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$.

31. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right)$.

32. $3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - 4\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

33. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

34. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

35. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

36. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

En los problemas del 37 al 44 calcule las matrices requeridas si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

37. $\mathbf{DI} - \frac{1}{3}\mathbf{E}$.

38. $\mathbf{DD}$.

39. $3\mathbf{A} - 2\mathbf{BC}$.

40. $\mathbf{B}(\mathbf{D} + \mathbf{E})$.

41. $2\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{EF}$.

42. $\mathbf{E}(2\mathbf{D} - 3\mathbf{I})$.

43. $(\mathbf{DC})\mathbf{A}$.

44. $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

En cada uno de los problemas del 45 *al* 58 *calcule la matriz requerida, si existe, dado que*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

45. $\mathbf{A}^2$.
46. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$.
47. $\mathbf{B}^3$.
48. $\mathbf{A}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^2$.
49. $(\mathbf{AC})^2$.
50. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(2\mathbf{C}^{\mathrm{T}})$.
51. $(\mathbf{BA}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.
52. $(2\mathbf{B})^{\mathrm{T}}$.
53. $(2\mathbf{I})^2 - 2\mathbf{I}^2$.
54. $\mathbf{IA}^0$.
55. $\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{O})$.
56. $\mathbf{I}^{\mathrm{T}}\mathbf{O}$.
57. $(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}$.
58. $\mathbf{B}^2 - 3\mathbf{B} + 2\mathbf{I}$.

En los problemas del 59 al 61 represente el sistema dado, por medio de la multiplicación de matrices.

59. $\begin{cases} 3x + y = 6, \\ 2x - 9y = 5. \end{cases}$

60. $\begin{cases} 8x + y + z = 6, \\ x - y + z = 2, \\ 2x - y + 3z = 11. \end{cases}$

61. $\begin{cases} 4r - s + 3t = 9, \\ 3r - t = 7, \\ 3s + 2t = 15. \end{cases}$

62. Mensajes secretos Los mensajes secretos pueden codificarse por medio de un código y una matriz de codificación. Supóngase que tenemos el código siguiente:

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

n	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*	*y*	*z*
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Sea $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, la matriz de codificación. Entonces podemos codificar un mensaje tomando cada dos letras del mensaje, convertirlas a sus números correspondientes creando una matriz de 2×1 y luego multiplicar cada matriz por **E.** Utilice este código para codificar el mensaje "el/halcón/ha/aterrizado", dejando las diagonales para separar palabras.

63. Inventario Una tienda de mascotas tiene 6 gatitos, 10 perritos y 7 loros en exhibición. Si el valor de un gatito es de \$55, el de cada perrito es de \$150 y el de cada loro es de \$35, por medio de la multiplicación de matrices, determine el valor total del inventario de la tienda de mascotas.

64. Acciones Un agente de bolsa vendió a un cliente 200 acciones tipo A, 300 tipo B, 500 tipo C y 250 tipo D. Los precios por acción de A, B, C y D son \$100, \$150, \$200 y \$300, respectivamente. Escriba un vector renglón que represente el número de acciones compradas de cada tipo. Escriba un vector columna que represente el precio por acción de cada tipo. Utilizando la multiplicación de matrices, encuentre el costo total de las acciones.

65. Costo de construcción En el ejemplo 9, suponga que el contratista tiene que construir siete casas con estilo rústico, tres con estilo moderno y cinco con estilo colonial. Utilizando la multiplicación de matrices, calcule el costo total de la materia prima.

66. Costos En el ejemplo 9 suponga que el contratista desea tomar en cuenta el costo de transportar la materia prima al lugar de la construcción, así como el costo de compra. Suponga que los costos están dados en la matriz que se da a continuación:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2500 & 45 \\ 1200 & 20 \\ 800 & 30 \\ 150 & 5 \\ 1500 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Acero} \\ \text{Madera} \\ \text{Vidrio} \\ \text{Pintura} \\ \text{Mano de obra.} \end{matrix}$$

(Columnas: Compra, Transporte)

a. A partir del cálculo de **RC,** encuentre una matriz cuyas entradas proporcionen los costos de compra y de transporte de los materiales para cada tipo de casa.
b. Encuentre la matriz **QRC** cuya primera entrada dé el precio de compra total y cuya segunda entrada dé el costo total de transporte.
c. Sea $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcule **QRCZ,** que proporciona el costo total de materiales y transporte para todas las casas que serán construidas.

67. Realice los siguientes cálculos para el ejemplo 6.
a. Calcule la cantidad que cada industria y cada consumidor tienen que pagar por los bienes que reciben.
b. Calcule la utilidad recibida por cada industria.
c. Encuentre la cantidad total de dinero que es pagada por todas las industrias y todos los consumidores.
d. Calcule la proporción de la cantidad total de dinero que se determinó en (c) pagada por las industrias.

Encuentre la proporción de la cantidad total de dinero que se determinó en (c) que es pagada por los consumidores.

68. Si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, demuestre que $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$.

69. demuestre que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{AB} = \mathbf{O}$. Observe que como ni **A** ni **B** son la matriz cero, la regla algebraica para los número reales "si $ab = 0$, entonces alguno de a o b es cero" no se cumple para las matrices. También puede demostrarse que la ley de cancelación tampoco es cierta para las matrices. Esto es, si $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, entonces no necesariamente es cierto que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

70. Sean $\mathbf{D}_1$ y $\mathbf{D}_2$ dos matrices diagonales de 3×3. Calcule $\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2$ y $\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1$ y demuestre que

a. $\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2$ y $\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1$ son matrices diagonales.
b. $\mathbf{D}_1$ y $\mathbf{D}_2$ conmutan.

En los problemas del 71 al 74 calcule las matrices requeridas dado que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3.2 & -4.1 & 5.1 \\ -2.6 & 1.2 & 6.8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1.1 & 4.8 \\ -2.3 & 3.2 \\ 4.6 & -1.4 \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1.2 & 1.5 \\ 2.4 & 6.2 \end{bmatrix}.$$

71. $\mathbf{A}(2\mathbf{B})$.

72. $-2(\mathbf{BC})$.

73. $(-\mathbf{C})(3\mathbf{A})\mathbf{B}$.

74. $\mathbf{C}^3$.

OBJETIVO Mostrar cómo reducir una matriz y utilizar la reducción de matrices para resolver un sistema lineal.

6.4 MÉTODO DE REDUCCIÓN

En esta sección ilustraremos un método por el cual las matrices pueden utilizarse para resolver un sistema de ecuaciones lineales. En el desarrollo del método el *método de reducción*, primero resolveremos un sistema por medio del método usual de eliminación. Después obtendremos la misma solución utilizando matrices.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 1, & (1) \\ x + 2y = 5, & (2) \end{cases}$$

que consiste en dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, x y y. Aunque este sistema puede resolverse por varios métodos algebraicos, lo resolveremos por un método que es adaptable con facilidad a matrices.

Por razones que más adelante serán obvias, empezamos por reemplazar la ecuación (1) por la ecuación (2) y la ecuación (2) por la (1), así obtenemos el sistema equivalente,[2]

$$\begin{cases} x + 2y = 5, & (3) \\ 3x - y = 1. & (4) \end{cases}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (3) por –3, se obtiene $-3x - 6y = -15$. Sumando los miembros izquierdo y derecho de esta ecuación a los correspondientes de la ecuación (4), se obtiene un sistema equivalente en el que x se elimina de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} x + 2y = 5, & (5) \\ 0x - 7y = -14. & (6) \end{cases}$$

Ahora eliminaremos y de la primera ecuación. Multiplicando ambos miembros de la ecuación (6) por $-\frac{1}{7}$, se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y = 5, & (7) \\ 0x + y = 2. & (8) \end{cases}$$

[2]Recuerde de la sección 4.4 que dos o más sistemas son equivalentes si tienen la misma solución.

De la ecuación (8), $y = 2$ y de aquí que $-2y = -4$. Sumando los miembros de $-2y = -4$ a los correspondientes de la ecuación (7), obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 0y = 1, \\ 0x + \quad y = 2. \end{cases}$$

Por tanto, $x = 1$ y $y = 2$, de modo que el sistema original está resuelto.

Observe que en la solución del sistema original, estuvimos reemplazando de manera sucesiva a éste por un sistema equivalente, que se obtenía al realizar una de las tres operaciones siguientes (llamadas *operaciones elementales*) que dejan la solución sin cambio:

1. Intercambio de dos ecuaciones.

2. Suma de un múltiplo constante de los miembros de una ecuación a los correspondientes miembros de otra ecuación.

3. Multiplicación de una ecuación por una constante diferente de cero.

Antes de mostrar un método matricial para resolver el sistema original,

$$\begin{cases} 3x - \quad y = 1, \\ x + 2y = 5, \end{cases}$$

primero necesitamos definir algunos términos. Recuerde de la sección 6.3, que la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

es la **matriz de coeficientes** de este sistema. Las entradas en la primera columna corresponden a los coeficientes de las x en las ecuaciones. Por ejemplo, la entrada en el primer renglón y la primera columna corresponde al coeficiente de x en la primera ecuación, y la entrada en el segundo renglón y la primera columna corresponde al coeficiente de x en la segunda ecuación. En forma análoga, las entradas en la segunda columna corresponden a los coeficientes de las y.

Otra matriz asociada con este sistema es la llamada **matriz aumentada,** que está dada por

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right].$$

La primera y segunda columnas son la primera y segunda columnas, respectivamente, de la matriz de coeficientes. Las entradas en la tercera columna corresponden a los términos constantes del sistema: la entrada en el primer renglón de esta columna es el término constante de la primera ecuación, mientras que la entrada en el segundo renglón es el término constante de la segunda ecuación. Aunque no es necesario incluir la línea vertical en la matriz aumentada, sirve para recordarnos que el 1 y el 5 son los términos constantes que aparecen en el lado derecho de las ecuaciones. La matriz aumentada describe por completo el sistema de ecuaciones.

El procedimiento que se utilizó para resolver el sistema original incluye varios sistemas equivalentes. A cada uno de estos sistemas podemos asociar su matriz aumentada. A continuación se listan los sistemas implicados, junto con su correspondiente matriz aumentada, las que hemos marcado como **A, B, C, D** y **E.**

$$\begin{cases} 3x - \quad y = 1, \\ x + 2y = 5. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right] = \mathbf{A}.$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x - \quad y = 1. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right] = \mathbf{B}.$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 0x - 7y = -14. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{array}\right] = \mathbf{C}.$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 0x + \quad y = 2. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = \mathbf{D}.$$

$$\begin{cases} x + 0y = 1, \\ 0x + \quad y = 2. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = \mathbf{E}.$$

Veamos ahora cómo están relacionadas estas matrices.

B puede obtenerse a partir de **A** por intercambio del primero y segundo renglones de **A.** Esta operación corresponde al intercambio de dos ecuaciones en el sistema original.

C puede obtenerse a partir de **B,** sumando a cada entrada del segundo renglón de **B** -3 veces la correspondiente entrada del primer renglón de **B:**

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 + (-3)(1) & -1 + (-3)(2) & 1 + (-3)(5) \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{array}\right].$$

Esta operación se describe como la suma de –3 veces el primer renglón de **B** con el segundo renglón de **B.**

D puede obtenerse a partir de **C** multiplicando cada entrada del segundo renglón de **C** por $-\frac{1}{7}$. Esta operación se describe como la multiplicación del segundo renglón de **C** por $-\frac{1}{7}$.

E puede obtenerse a partir de **D,** sumando –2 veces el segundo renglón de **D** al primer renglón de **D.**

Observe que **E,** que en esencia proporciona la solución, se obtuvo a partir de **A** al realizar de manera sucesiva una de las tres operaciones matriciales, llamadas **operaciones elementales sobre renglones:**

Operaciones elementales sobre renglones

1. Intercambio de dos renglones de una matriz.
2. Suma de un múltiplo de un renglón de una matriz a un renglón diferente de esa matriz.
3. Multiplicación de un renglón de una matriz por un escalar diferente de cero.

Estas operaciones elementales sobre renglones corresponden a las tres operaciones elementales utilizadas en el método algebraico de eliminación. Cuando una matriz pueda obtenerse a partir de otra por una o más de las operaciones elementales sobre renglones, decimos que las matrices son **equivalentes.** Así, **A** y **E** son equivalentes (también podríamos obtener **A** a partir de **E,** realizando operaciones similares sobre renglones en el sentido opuesto, de modo que el término *equivalentes* es apropiado). Cuando se describan operaciones elementales sobre renglones, por conveniencia utilizaremos la notación siguiente:

Notación	Operación sobre renglón correspondiente
$R_i \leftrightarrow R_j$	Intercambiar los renglones R_i y R_j
kR_i	Multiplicar el renglón R_i por la constante k
$kR_i + R_j$	Sumar k veces el renglón R_i al renglón R_j (pero el renglón R_i permanece igual)

Por ejemplo, escribir

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

significa que la segunda matriz se obtuvo a partir de la primera al sumar -4 veces el primer renglón al segundo. Observe que podemos escribir $(-k)R_i$ como $-kR_i$.

Ahora estamos preparados para describir un procedimiento matricial para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Primero, formamos la matriz aumentada del sistema; después, por medio de operaciones elementales sobre renglones, determinamos una matriz equivalente que indique claramente la solución. Seremos más específicos en lo que queremos decir por una matriz que indique claramente la solución. Ésta es una matriz, llamada *matriz reduci-*

Matriz reducida

Una matriz se dice que es una **matriz reducida**[3] si se satisface lo siguiente:

1. Si un renglón no consiste solamente en ceros, entonces la primera entrada diferente de cero en el renglón, llamada la **entrada principal,** es 1, mientras que todas las demás entradas en la columna en la que el 1 aparece son ceros.
2. En cada renglón, la primera entrada diferente de cero está a la derecha de la primera entrada diferente de cero de cada renglón arriba de él.
3. Todos los renglones que consistan únicamente en ceros están en la parte inferior de la matriz.

En otras palabras, para resolver el sistema debemos encontrar la matriz reducida tal que la matriz aumentada del sistema sea equivalente a ella. En nuestro estudio anterior de operaciones elementales sobre renglones, la matriz

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

es una matriz reducida.

EJEMPLO 1 Matrices reducidas

Determinar si cada matriz que se muestra a continuación es reducida o no.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. **b.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **c.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

d. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **e.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **f.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución:

a. No es una matriz reducida porque la entrada principal en el segundo renglón no es 1.

b. Matriz reducida.

c. No es una matriz reducida porque la entrada principal en el segundo renglón, no se encuentra a la derecha de la primera entrada diferente de cero en el primer renglón.

[3]O en la *forma escalonada por renglones reducida*.

d. Matriz reducida.

e. No es una matriz reducida porque el segundo renglón, que consiste solamente en ceros, no está en la parte inferior de la matriz.

f. Matriz reducida.

EJEMPLO 2 Reducción de una matriz

Reducir la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -3 & 0 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{bmatrix}.$$

Estrategia: para reducir la matriz, debemos hacer que la entrada principal sea 1 en el primer renglón, un 1 en el segundo renglón y así sucesivamente, hasta llegar a renglones de ceros, si los hay. Además, debemos trabajar de izquierda a derecha ya que el 1 inicial en cada renglón debe encontrarse a la *izquierda* de los otros unos iniciales en los renglones de abajo.

Solución: ya que no existen renglones de ceros para moverlos a la parte inferior, procedemos a encontrar la primera columna que tenga una entrada diferente de cero; se trata de la columna 1. Esto significa que en la matriz reducida, el 1 inicial en el primer renglón estará en la columna 1. Para empezar, intercambiaremos los primeros dos renglones de modo que la entrada diferente de cero esté en el primer renglón de la columna 1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -3 & 0 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{bmatrix}.$$

Ahora multiplicamos el renglón 1 por $\frac{1}{3}$ de modo que la entrada principal sea un 1.

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -12 & 2 & 11 \end{bmatrix}.$$

Ahora, ya que debemos tener ceros abajo (y arriba) de cada 1 inicial, sumamos -6 veces el renglón 1 al renglón 3:

$$\xrightarrow{-6R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}.$$

Nos movemos a la derecha de la columna 1 para encontrar la primera columna que tenga una entrada diferente de cero en el renglón 2, o bien debajo de él; se trata de la columna 3. Esto significa que en la matriz reducida, el 1 inicial en el segundo renglón debe estar en la columna 3. La matriz anterior ya tiene el 1 ahí. Así, que todo lo que necesitamos para obtener ceros abajo y arriba del 1 es sumar una vez el renglón 2 al renglón 1, y sumar –8 veces el renglón 2 al renglón 3:

$$\xrightarrow[-8R_2 + R_3]{(1)R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Otra vez nos movemos a la derecha para encontrar la primera columna que tenga una entrada diferente de cero en el renglón 3; se trata de la columna 4. Para hacer la entrada principal igual a 1, multiplicamos el renglón 3 por $-\frac{1}{5}$:

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por último, para hacer todas las demás entradas de la columna 4 iguales a cero, sumamos -2 veces el renglón 3 a los renglones 1 y 2:

La secuencia de pasos que se utiliza para reducir una matriz, no es única; sin embargo, la forma reducida sí es única.

$$\xrightarrow[-2R_3 + R_2]{-2R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La última matriz está en forma reducida.

Tecnología

Aunque las operaciones elementales sobre renglones pueden realizarse en una calculadora gráfica, el procedimiento es muy engorroso.

El método de reducción descrito para resolver nuestro sistema original puede generalizarse a sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Resolver un sistema tal como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

implica

1. Determinar la matriz aumentada del sistema, que es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right],$$

y

2. Determinar una matriz reducida tal que la matriz aumentada sea equivalente a ella.

Con frecuencia, el paso 2 es llamado *reducción de la matriz aumentada*.

Principios en práctica 1

Solución de un sistema por reducción

Una compañía de inversiones ofrece tres portafolios de acciones: A, B y C. El número de bloques de cada tipo de acciones en cada uno de estos portafolios se resume en la tabla siguiente:

		Portafolio		
		A	B	C
Riesgo:	Alto	6	1	3
	Moderado	3	2	3
	Bajo	1	5	3

Un cliente quiere 35 bloques de acciones de alto riesgo, 22 bloques de acciones de riesgo moderado y 18 bloques de acciones de bajo riesgo. ¿Cuántos bloques de acciones de cada portafolio deben sugerirse?

EJEMPLO 3 Solución de un sistema por reducción

Utilizando la reducción de matrices, resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 2x + y = 5, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Solución: reduciendo la matriz aumentada del sistema, tenemos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_1 + R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1)R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2 + R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2 + R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La última matriz está reducida y corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + 0y = 4, \\ 0x + y = -3, \\ 0x + 0y = 0. \end{cases}$$

Ya que el sistema original es equivalente a este sistema, tiene una solución única, a saber

$$x = 4,$$

$$y = -3.$$

EJEMPLO 4 Solución de un sistema por reducción

Utilizando la reducción de matrices, resolver

$$\begin{cases} x + 2y + 4z - 6 = 0, \\ 2z + y - 3 = 0, \\ x + y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Principios en práctica 2
Solución de un sistema por reducción

Un spa personaliza la dieta y suplementos vitamínicos de cada uno de sus clientes. El spa ofrece tres diferentes suplementos vitamínicos, cada uno con diferentes porcentajes de la cantidad diaria recomendada (CDR) de vitaminas A, C y D. Una tableta de suplemento X proporciona 40% de la CDR de A, 20% de la CDR de C y 10% de la CDR de D. Una tableta de suplemento Y proporciona 10% de la CDR de A, 10% de la CDR de C y 30% de la CDR de D. Una tableta de suplemento Z proporciona 10% de la CDR de A, 50% de la CDR de C y 20% de la CDR de D. El personal del spa determina que una cliente debe tomar 180% de la CDR de vitamina A, 200% de la CDR de la vitamina C y 190% de la CDR de la vitamina D, diariamente. ¿Cuántas tabletas de cada suplemento debe tomar ella diariamente?

Solución: al escribir nuevamente el sistema de modo que las variables estén alineadas y los términos constantes aparezcan en los miembros derechos de las ecuaciones, tenemos

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 6, \\ \quad\;\; y + 2z = 3, \\ x + \;\; y + 2z = 1. \end{cases}$$

Reduciendo la matriz aumentada, tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(1)R_2 + R_3]{-2R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La última matriz es reducida y corresponde a

$$\begin{cases} \qquad\quad x = 0, \\ y + 2z = 0, \\ \qquad\quad 0 = 1. \end{cases}$$

Cada vez que obtengamos un renglón con ceros del lado izquierdo de la línea vertical, y una entrada diferente de cero a la derecha, no existe solución.

Como $0 \neq 1$, no existen valores de x, y y z para los cuales todas las ecuaciones sean satisfechas de manera simultánea. Por tanto, el sistema original no tiene solución.

■

EJEMPLO 5 Forma paramétrica de una solución

Utilizando la reducción de matrices, resolver

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 10, \\ \qquad\quad x_2 + 2x_3 + \;\; x_4 = \;\; 2, \\ 3x_1 \qquad\quad - 3x_3 + 6x_4 = \;\; 9. \end{cases}$$

Solución: reduciendo la matriz aumentada, tenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 6 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 6 & 9 \end{array}\right]$$

Principios en práctica 3

Forma paramétrica de una solución

Una veterinaria zootecnista puede comprar alimento para animales de cuatro diferentes tipos: A, B, C y D. Cada alimento viene en el mismo tamaño de bolsa, y el número de gramos de cada uno de tres nutrimentos en cada bolsa se resume en la tabla siguiente:

		Alimento			
		A	B	C	D
	N_1	5	5	10	5
Nutrimento	N_2	10	5	30	10
	N_3	5	15	10	25

Para un animal, la veterinaria determina que necesita combinar las bolsas para obtener 10,000 g de N1, 20,000 g de N2 y 20,000 g de N3. ¿Cuántas bolsas de cada tipo de alimento debe ordenar ella?

$$\xrightarrow{-3R_1 + R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{9}{2} & -6 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{9}{2}R_2 + R_3]{-\frac{3}{2}R_2 + R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-2R_3 + R_2]{2R_3 + R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right].$$

Esta matriz es reducida y corresponde al sistema

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{2}x_4 = 4, \\ x_2 = 0, \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 1. \end{cases}$$

Por tanto,

$$x_1 = -\tfrac{5}{2}x_4 + 4, \qquad (9)$$

$$x_2 = 0, \qquad (10)$$

$$x_3 = -\tfrac{1}{2}x_4 + 1, \qquad (11)$$

$$x_4 = x_4. \qquad (12)$$

Si x_4 es cualquier número real, r, entonces las ecuaciones (9), (10), (11) y (12) determinan una solución particular para el sistema original. Por ejemplo, si $r = 0$ (esto es, $x_4 = 0$), entonces una solución *particular* es

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1 \quad \text{y} \quad x_4 = 0.$$

Si $r = 2$, entonces

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0 \quad \text{y} \quad x_4 = 2.$$

Recuerde [véase el ejemplo 3 de la sec. 4.4] que la variable r, de la cual dependen x_1, x_3 y x_4 se denomina **parámetro.** Existe un número infinito de soluciones para el sistema—una correspondiente a cada valor del parámetro. Decimos que la solución *general* del sistema original está dada por

$$x_1 = -\tfrac{5}{2}r + 4,$$

$$x_2 = 0,$$

$$x_3 = -\tfrac{1}{2}r + 1,$$

$$x_4 = r,$$

donde r es cualquier número real, y decimos que se tiene una *familia* de soluciones *con un parámetro*.

Los ejemplos 3 al 5 ilustran el hecho de que un sistema de ecuaciones lineales puede tener una solución única, ninguna solución o un número infinito de soluciones.

Ejercicio 6.4

En cada uno de los problemas del 1 al 6 determine si la matriz es reducida o no.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

En cada problema del 7 al 12 reduzca la matriz dada.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -6 \\ 4 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

12. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Por el método de reducción, resuelva los sistemas de los problemas del 13 al 26.

13. $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x - 3y = -11, \\ 4x + 3y = 9. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ 12x + 4y = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ -2x - 4y + 6z = 1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0, \\ 3x + 2z - 5 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x + 2y + 5z - 1 = 0, \\ x + y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 = 3, \\ 5x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6, \\ 2x_1 + x_2 = 7, \\ x_1 + x_2 = 4. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x - y - 3z = -5, \\ 2x - y - 4z = -8, \\ x + y - z = -1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x + y - z = 7, \\ 2x - 3y - 2z = 4, \\ x - y - 5z = 23. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x - 4z = 8, \\ x - 2y - 2z = 14, \\ x + y - 2z = -1, \\ 3x + y + z = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + 3z = -1, \\ 3x + 2y + 11z = 1, \\ x + y + 4z = 1, \\ 2x - 3y + 3z = -8. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Resuelva los problemas del 27 al 33 utilizando la reducción de matrices.

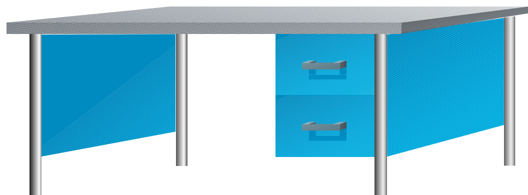
27. Impuestos Una compañía tiene ingresos gravables por $312,000. El impuesto federal es 25% de la parte que queda después que el impuesto estatal ha sido pagado. El impuesto estatal es 10% de la parte que queda después que el impuesto federal ha sido pagado. Encuentre el monto de los impuestos federal y estatal.

28. Toma de decisiones Un fabricante elabora dos productos, A y B. Por cada unidad que vende de A la ganancia es de $8 y por cada unidad que vende de B la ganancia es de $11. De la experiencia se ha encontrado que puede venderse 25% más de A que de B. Para el año siguiente el fabricante desea una ganancia total de $42,000. ¿Cuántas unidades de cada producto debe vender?

29. Planeación de producción Un fabricante produce tres artículos, A, B y C. La utilidad por cada unidad vendida de A, B y C es $1, $2 y $3, respectivamente. Los costos fijos son de $17,000 por año y los costos de producción por cada unidad son $4, $5 y $7, respectivamente. El año siguiente se producirán y venderán un total de 11,000 unidades entre los tres productos y se obtendrá una utilidad total de $25,000. Si el costo total será de $80,000, ¿cuántas unidades de cada producto deberán producirse el año siguiente?

30. Asignación de producción Escritorios Nacionales tiene plantas para la producción de escritorios en la costa del Atlántico y en la costa del Pacífico. En la planta de la costa del Atlántico, los costos fijos son de $16,000 por año y el costo de producción de cada escritorio es de

$90. En la planta del Pacífico, los costos fijos son de $20,000 por año y el costo de producción de cada escritorio es de $80. El año siguiente la compañía quiere producir un total de 800 escritorios. Determine la producción de cada planta para el año próximo si el costo total de cada una debe ser el mismo.



31. Vitaminas A una persona el doctor le prescribió tomar 10 unidades de vitamina A, 9 unidades de vitamina D y 19 unidades de vitamina E diariamente. La persona puede elegir entre tres marcas de píldoras vitamínicas. La marca X contiene 2 unidades de vitamina A, 3 de vitamina D y 5 de vitamina E; la marca Y tiene 1, 3 y 4 unidades, respectivamente; la marca Z tiene 1 unidad de vitamina A, ninguna de vitamina D y 1 unidad de vitamina E.



a. Encuentre todas las combinaciones posibles de píldoras que proporcionen de manera exacta las cantidades requeridas.
b. Si de la marca X cuesta 1 centavo cada píldora, de la marca Y 6 centavos y de la marca Z 3 centavos, ¿existe alguna combinación de la parte (a) que cueste exactamente 15 centavos por día?
c. ¿Cuál es la combinación menos cara de la parte (a)? ¿La más cara?

32. Producción Una compañía produce tres artículos, A, B y C, que requiere se procesen en tres máquinas I, II y III. El tiempo en horas requerido para el procesamiento de cada producto por las tres máquinas está dado en la siguiente tabla:

	I	II	III
A	3	1	2
B	1	2	1
C	2	4	1

La máquina I está disponible 850 horas, la II durante 1200 horas y la III durante 550 horas. Encuentre cuántas unidades de cada artículo deben producirse para utilizar todo el tiempo disponible de las máquinas.

33. Inversiones Una compañía de inversiones vende tres tipos de fondos de inversión, estándar (E), de lujo (D) y Gold Star (G).

Cada unidad de E tiene 12 acciones tipo A, 16 tipo B y 8 tipo C.

Cada unidad de D tiene 20 acciones tipo A, 12 tipo B y 28 de C.

Cada unidad de G tiene 32 acciones tipo A, 28 tipo B y 36 de C.

Suponga que un inversionista desea comprar exactamente 220 acciones tipo A, 176 tipo B y 264 tipo C, comprando unidades de los tres fondos.

a. Determine las combinaciones de unidades E, D y G que satisfagan los requerimientos del inversionista.
b. Suponga que cada unidad de E cuesta al inversionista $300 (las de D y G, $400 y $600, respectivamente). ¿Cuáles de las combinaciones de la parte (a) minimizarán el costo total del inversionista?

34. La matriz $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ representa al segmento de recta que va de $(-3, 5)$ a $(2, -1)$. El segmento se rota θ grados en contra del sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen, por medio de la multiplicación

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen} & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 - 3\sqrt{3} & 3 + 5\sqrt{3} \\ -1 + 2\sqrt{3} & -2 - \sqrt{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.10 & 5.83 \\ 1.23 & -1.87 \end{bmatrix},$$

para obtener el segmento de $(-0.10, 5.83)$ a $(1.23, -1.87)$. Determine sen θ y cos θ.

OBJETIVO Centrar la atención en sistemas no homogéneos que incluyan más de un parámetro en su solución general, y resolver y considerar la teoría de sistemas homogéneos.

6.5 MÉTODO DE REDUCCIÓN (CONTINUACIÓN)[4]

Como vimos en la sección 6.4, un sistema de ecuaciones lineales puede tener una solución única, ninguna solución o bien un número infinito de soluciones. Cuando existe un número infinito de soluciones, la solución general se expresa en términos de al menos un parámetro. Por ejemplo, la solución general en el ejemplo 5 se dio en términos del parámetro r:

[4]Esta sección puede omitirse.

$$x_1 = -\tfrac{5}{2}r + 4,$$
$$x_2 = 0,$$
$$x_3 = -\tfrac{1}{2}r + 1,$$
$$x_4 = r.$$

En ocasiones, es necesario más de un parámetro,[5] como lo muestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Familia de soluciones con dos parámetros

Utilizando la reducción de matrices, resolver

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Solución: la matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right],$$

cuya forma reducida es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

De aquí,

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = -2, \end{cases}$$

a partir de lo cual

$$x_1 = 1 - x_3 - 3x_4,$$
$$x_2 = -2 - 2x_3 - x_4.$$

Ya que no hay restricción sobre x_3 ni sobre x_4, pueden ser cualesquiera números reales, para darnos una familia paramétrica de soluciones. Haciendo $x_3 = r$ y $x_4 = s$, podemos obtener la solución del sistema dado como

$$x_1 = 1 - r - 3s,$$
$$x_2 = -2 - 2r - s,$$
$$x_3 = r,$$
$$x_4 = s,$$

donde los parámetros r y s pueden ser cualquier número real. Asignando valores específicos a r y s, obtenemos soluciones particulares. Por ejemplo, si $r = 1$ y $s = 2$, entonces la solución particular correspondiente es $x_1 = -6$, $x_2 = -6$, $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$.

[5]Véase el ejemplo 7 de la sección 4.4.

Es común clasificar a un sistema lineal de ecuaciones como *homogéneo* o como *no homogéneo*, dependiendo de si todos los términos constantes son o no iguales a cero.

Definición

El sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

es llamado ***sistema homogéneo*** si $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$. El sistema es un ***sistema no homogéneo*** si al menos una de las c no es igual a cero.

EJEMPLO 2 Sistemas no homogéneos y homogéneos

El sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ 3x - 4y = 0, \end{cases}$$

es no homogéneo a causa del 4 en la primera ecuación. El sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ 3x - 4y = 0, \end{cases}$$

es homogéneo.

Si el sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ 3x - 4y = 0, \end{cases}$$

fuera resuelto por el método de reducción, primero la matriz aumentada sería escrita como:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right].$$

Observe que la última columna sólo es de ceros. Esto es común en la matriz aumentada de cualquier sistema homogéneo. Esta matriz se reduciría utilizando las operaciones elementales sobre renglones:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Asimismo, la última columna de la matriz reducida sólo tiene ceros. Esto no ocurre por casualidad. Cuando cualquiera de las operaciones elementales sobre renglones se realiza sobre una matriz que tiene una columna que consiste sólo en ceros, la columna correspondiente de la matriz resultante también tiene solamente ceros. Cuando resolvamos un sistema homogéneo por reducción de matrices, por conveniencia acostumbraremos eliminar la última columna de la matriz involucrada. Esto es, reduciremos sólo la *matriz de coeficientes* del sistema. Para el sistema anterior tendríamos

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aquí la matriz reducida, llamada *matriz de coeficientes reducida*, corresponde al sistema:

$$\begin{cases} x + 0y = 0, \\ 0x + \quad y = 0. \end{cases}$$

de modo que la solución es $x = 0$ y $y = 0$.

Ahora consideraremos el número de soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Una solución siempre ocurre cuando $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, ya que cada ecuación se satisface para estos valores. Esta solución, llamada **solución trivial,** es una solución de *todo* sistema homogéneo.

Existe un teorema que nos permite determinar si un sistema homogéneo tiene una solución única (la solución trivial) o un número infinito de soluciones. El teorema está basado en el número de renglones diferentes de cero que aparecen en la matriz reducida del sistema. Un *renglón diferente de cero* es un renglón que no consiste sólo en ceros.

Teorema

Sea **A** la matriz *reducida* de un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Si **A** tiene exactamente k renglones diferentes de cero, entonces $k \leq n$. Además,

a. Si $k < n$, el sistema tiene un número infinito de soluciones
y
b. Si $k = n$, el sistema tiene una única solución (la solución trivial).

Si un sistema homogéneo consiste en m ecuaciones con n incógnitas, entonces la matriz de coeficientes del sistema tiene orden $m \times n$. Por tanto, si $m < n$ y k es el número de renglones diferentes de cero en la matriz reducida, entonces $k \leq m$, y así $k < n$. Por el teorema, el sistema debe tener un número infinito de soluciones. En consecuencia tenemos lo siguiente.

Corolario

Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que incógnitas tiene un número infinito de soluciones.



Advertencia El teorema anterior y el corolario sólo se aplican a sistemas **homogéneos** de ecuaciones lineales, por ejemplo, considere el sistema

$$\begin{cases} x + \quad y - 2z = 3, \\ 2x + 2y - 4z = 4, \end{cases}$$

que consiste en dos ecuaciones lineales con tres incógnitas. No **podemos** concluir que este sistema tiene un número infinito de soluciones, ya que no es homogéneo. En realidad, debe verificar que este sistema no tiene solución.

EJEMPLO 3 Número de soluciones de un sistema homogéneo

Determinar si el sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ 2x + 2y - 4z = 0, \end{cases}$$

tiene solución única o un número infinito de soluciones.

Solución: hay dos ecuaciones en este sistema homogéneo y este número es menor que el número de incógnitas (tres). Por tanto, por el corolario anterior, el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Principios en práctica 1

Solución de sistemas homogéneos

Un plano en el espacio de tres dimensiones puede escribirse como $ax + by + cz = d$. Podemos determinar las posibles intersecciones de planos en esta forma, escribiéndolos como sistemas de ecuaciones lineales y utilizando la reducción para resolverlos. Si en cada ecuación $d = 0$ entonces tenemos un sistema homogéneo con solución única, o bien con un número infinito de soluciones. Determine si la intersección de los planos

$$5x + 3y + 4z = 0,$$
$$6x + 8y + 7z = 0,$$
$$3x + 1y + 2z = 0$$

tiene solución única o un número infinito de soluciones; después resuelva el sistema.

EJEMPLO 4 Solución de sistemas homogéneos

Determinar si los sistemas homogéneos siguientes tienen solución única o un número infinito de soluciones, después resolver los sistemas.

a. $$\begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 2x - y + 5z = 0, \\ x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

Solución: reduciendo la matriz de coeficientes, tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El número de renglones diferentes de cero (2) en la matriz reducida, es menor que el número de incógnitas (3) en el sistema. Por el teorema anterior, existe un número infinito de soluciones.

Ya que la matriz reducida corresponde a

$$\begin{cases} x + 3z = 0, \\ y + z = 0, \end{cases}$$

la solución puede ser dada en forma paramétrica por

$$x = -3r,$$
$$y = -r,$$
$$z = r,$$

donde r es cualquier número real.

b. $$\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ x - 2y = 0, \\ 2x + y = 0, \\ 2x + 3y = 0. \end{cases}$$

Solución: reduciendo la matriz de coeficientes, tenemos

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El número de renglones diferentes de cero (2) en la matriz reducida es igual al número de incógnitas en el sistema. Por el teorema, el sistema debe tener solución única, a saber, la solución trivial $x = 0$, $y = 0$.

Ejercicio 6.5

En los problemas del 1 al 8 resuelva los sistemas por reducción de matrices.

1. $\begin{cases} w - x - y + 4z = 5, \\ 2w - 3x - 4y + 9z = 13, \\ 2w + x + 4y + 5z = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3w - x + 12y + 18z = -4, \\ w - 2x + 4y + 11z = -13, \\ w + x + 4y + 2z = 8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3w - x - 3y - z = -2, \\ 2w - 2x - 6y - 6z = -4, \\ 2w - x - 3y - 2z = -2, \\ 3w + x + 3y + 7z = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} w + x + 5z = 1, \\ w \quad\quad y + 2z = 1, \\ w - 3x + 4y - 7z = 1, \\ x - y + 3z = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} w + x + 3y - z = 2, \\ 2w + x + 5y - 2z = 0, \\ 2w - x + 3y - 2z = -8, \\ 3w + 2x + 8y - 3z = 2, \\ w \quad + 2y - z = -2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} w + x + y + 2z = 4, \\ 2w + x + 2y + 2z = 7, \\ w + 2x + y + 4z = 5, \\ 3w - 2x + 3y - 4z = 7, \\ 4w - 3x + 4y - 6z = 9. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 10x_4 + 11x_5 = -8, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \quad + 3x_5 = 6. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 \quad + 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 1, \\ x_2 + x_3 - 3x_4 \quad = -2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 13x_4 + 16x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 4x_5 = -3. \end{cases}$

Para cada uno de los problemas del 9 al 14 determine si el sistema tiene un número infinito de soluciones o sólo la solución trivial. No resuelva los sistemas.

9. $\begin{cases} 0.07x + 0.3y + 0.02z = 0, \\ 0.053x - 0.4y + 0.08z = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3w + 5x - 4y + 2z = 0, \\ 7w - 2x + 9y + 3z = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x - 4y = 0, \\ x + 5y = 0, \\ 4x - y = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x + 3y + 12z = 0, \\ 3x - 2y + 5z = 0, \\ 4x + y + 14z = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x \quad - z = 0, \\ x - 2y - 5z = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x + 5y - z = 0, \\ x + 4y - 2z = 0, \\ 3x - 2y + 6z = 0. \end{cases}$

Resuelva cada uno de los siguientes sistemas.

15. $\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - 4y = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x - 5y = 0, \\ 8x - 20y = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 6y - 2z = 0, \\ 2x - 3y + 4z = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x + 7y = 0, \\ 2x + 3y = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - 4y = 0, \\ 5x - 8y = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0, \\ x + 2y + 3z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 5x - 2y - 9z = 0, \\ 3x + y - z = 0, \\ 3x - 2y - 7z = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x + y + 7z = 0, \\ x - y - z = 0, \\ 2x - 3y - 6z = 0, \\ 3x + y + 13z = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} w + x + y + 4z = 0, \\ w + x + 5z = 0, \\ 2w + x + 3y + 4z = 0, \\ w - 3x + 2y - 9z = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} w + x + 2y + 7z = 0, \\ w - 2x - y + z = 0, \\ w + 2x + 3y + 9z = 0, \\ 2w - 3x - y + 4z = 0. \end{cases}$

OBJETIVO Determinar la inversa de una matriz invertible y utilizar las inversas para resolver sistemas.

6.6 Inversas

Hemos visto que el método de reducción es muy útil para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Pero eso no significa que sea el único método que utiliza matrices. En esta sección, estudiaremos un método diferente que se aplica a ciertos sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

En la sección 6.3 mostramos cómo un sistema de ecuaciones lineales puede escribirse en forma matricial como una sola ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde **A** es la matriz de coeficientes. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

puede escribirse en la forma matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si podemos determinar los valores de las entradas de la matriz de incógnitas **X**, tendremos una solución para el sistema. Así, nos gustaría encontrar un método para resolver la ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ para **X.** Una manera de hacerlo proviene de la inspección del procedimiento de solución de la ecuación algebraica $ax = b$. La última ecuación se resuelve simplemente al multiplicar ambos miembros por el inverso multiplicativo de a. [Recuerde que el inverso multiplicativo de un número, a, diferente de cero, está denotado por a^{-1} (que es $1/a$) y tiene la propiedad de que $a^{-1}a = 1$.] Por ejemplo, si $3x = 11$, entonces

$$3^{-1}(3x) = 3^{-1}(11), \quad \text{de modo que} \quad x = \frac{11}{3}.$$

Si podemos aplicar un procedimiento semejante a la ecuación *matricial*

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \tag{1}$$

entonces necesitamos un inverso multiplicativo de **A**, esto es, una matriz **C** tal que $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$. Entonces basta con multiplicar ambos miembros de la ecuación (1) por **C:**

$$\mathbf{C}(\mathbf{AX}) = \mathbf{CB},$$
$$(\mathbf{CA})\mathbf{X} = \mathbf{CB},$$
$$\mathbf{IX} = \mathbf{CB},$$
$$\mathbf{X} = \mathbf{CB}. \tag{2}$$

Por tanto, la solución es $\mathbf{X} = \mathbf{CB}$. Por supuesto, este método está basado en la existencia de una matriz **C** tal que $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$. Cuando tal matriz existe, decimos que es una *matriz inversa* (o simplemente *inversa*) de **A.**

Definición

Si **A** es una matriz cuadrada y existe una matriz **C** tal que $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$, entonces **C** se llama inversa de **A,** y se dice que **A** es ***invertible*** (o no singular).

Principios en práctica 1

Inversa de una matriz

Los mensajes secretos pueden codificarse por medio de un código y una matriz de codificación. Supóngase que tenemos el código siguiente:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Sea **E** la matriz de codificación. Entonces podemos codificar un mensaje tomando cada dos letras del mensaje, convertirlas a sus correspondientes números, creando una matriz de 2×1 y luego multiplicar cada matriz por **E.** El mensaje puede descifrarse con una matriz de decodificación, que es la inversa de la matriz de codificación, esto es, $\mathbf{E}^{-1}$. Determine si las matrices de codificación

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

son inversa una de la otra.

EJEMPLO 1 Inversa de una matriz

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Como

$$\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I},$$

la matriz **C** es una inversa de **A.**

Puede demostrarse que una matriz invertible tiene una y sólo una inversa; esto es, la inversa es única. Así, en el ejemplo 1, la matriz **C** es la *única* matriz tal que $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$. Por esta razón podemos hablar de *la* inversa de una matriz invertible **A,** que denotamos por el símbolo $\mathbf{A}^{-1}$. De acuerdo con esto, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Además, aunque la multiplicación matricial por lo general no es conmutativa, es un hecho que $\mathbf{A}^{-1}$ conmuta con **A:**

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Regresando a la ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, de la ecuación (2) podemos establecer lo siguiente:

Si **A** es una matriz invertible, entonces la ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ tiene la solución única $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Principios en práctica 2

Uso de la inversa para resolver un sistema

Supóngase que la matriz de codificación $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ se utilizó para codificar un mensaje. Utilice el código del principio en práctica 1 y la inversa $\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$ para decodificar el mensaje, que está dividido en las siguientes partes:

28, 46, 65, 90

61, 82

59, 88, 57, 86

60, 84, 21, 34, 76, 102

EJEMPLO 2 Uso de la inversa para resolver un sistema

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 3x_1 + 7x_2 = 18. \end{cases}$$

Solución: en forma matricial tenemos $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

En el ejemplo 1, mostramos que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo que,

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

de modo que $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$.

Con el fin de aplicar el método del ejemplo 2 a un sistema, se deben cumplir dos condiciones:

1. El sistema debe tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.
2. La matriz de coeficientes debe ser invertible.

Por lo que concierne a la condición 2, le advertimos que no todas las matrices cuadradas son invertibles. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+b \\ 0 & c+d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De aquí que no exista matriz que posmultiplicada por **A** produzca la matriz identidad. Por tanto, **A** no es invertible.

Antes de estudiar un procedimiento para encontrar la inversa de una matriz invertible, introducimos el concepto de ***matrices elementales.*** Una matriz elemental de $n \times n$ es una matriz que se obtiene a partir de la matriz identidad **I** de $n \times n$ por medio de una operación elemental sobre renglón. Existen tres tipos básicos de matrices elementales:

Matrices elementales

1. La que se obtiene por medio de intercambio de dos renglones de **I.**
2. La que se obtiene por medio de la multiplicación de cualquier renglón de **I** por un escalar diferente de cero.
3. La que se obtiene por medio de la suma de un múltiplo constante de un renglón de **I** a cualquier otro renglón.

EJEMPLO 3 Matrices elementales

Las matrices

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y } \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

son matrices elementales. $\mathbf{E}_1$ se obtiene a partir de la matriz identidad de 3×3, intercambiando el segundo y el tercer renglones. $\mathbf{E}_2$ se obtiene a partir de la matriz identidad de 2×2 multiplicando el primer renglón por -4. $\mathbf{E}_3$ se obtiene a partir de la matriz identidad de 2×2, sumando 3 veces el primer renglón al segundo.

Suponga que **E** es una matriz elemental de $n \times n$, obtenida a partir de **I** por cierta operación elemental sobre renglón, y **A** es una matriz de $n \times n$. Entonces puede demostrarse que el producto **EA** es igual a la matriz obtenida a partir de **A** aplicando la misma operación elemental sobre renglón a **A.** Por ejemplo, sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ y $\mathbf{E}_3$ son matrices elementales, $\mathbf{E}_1$ se obtiene intercambiando el primero y segundo renglones de **I.** Del mismo modo, el producto

$$\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

es la matriz obtenida de **A** al intercambiar el primero y segundo renglones de **A.** La matriz $\mathbf{E}_2$ se obtiene multiplicando el segundo renglón de **I** por 2. De acuerdo con esto, el producto

$$\mathbf{E}_2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

es la matriz obtenida al multiplicar el segundo renglón de **A** por 2. La matriz $\mathbf{E}_3$ se obtiene sumando –2 veces el segundo renglón de **I** al primer renglón. El producto

$$\mathbf{E}_3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

es la matriz obtenida a partir de **A** por medio de la misma operación elemental sobre renglón.

Si queremos reducir la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

debemos seguir una secuencia de pasos como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que **A** se reduce a **I.** Ya que nuestro proceso de reducción incluye operaciones elementales sobre renglones, parece natural que las matrices elementales puedan utilizarse para reducir **A.** Si **A** es premultiplicada por la matriz elemental $\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $\mathbf{E}_1\mathbf{A}$ es la matriz que se obtiene a partir de **A** sumando -2 veces el primer renglón al segundo renglón:

$$\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La premultiplicación de $\mathbf{E}_1\mathbf{A}$ por la matriz elemental $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ da la matriz obtenida al multiplicar el segundo renglón de $\mathbf{E}_1\mathbf{A}$ por $\frac{1}{2}$:

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

Así hemos reducido **A** multiplicándola por un producto de matrices elementales.

Como $(\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)\mathbf{A} = \mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{A}) = \mathbf{I}$, el producto $\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$ es $\mathbf{A}^{-1}$. Así que,

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 = (\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)\mathbf{I} = \mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1\mathbf{I}).$$

En consecuencia, $\mathbf{A}^{-1}$ puede obtenerse aplicando las mismas operaciones elementales sobre renglones, empezando con **I,** que se utilizaron para reducir **A** a **I:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Nuestro resultado puede verificarse demostrando que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

En resumen, para encontrar $\mathbf{A}^{-1}$ aplicamos las operaciones elementales sobre renglones, empezamos con **I** y procedemos en el mismo orden en que se utilizaron estas operaciones para reducir **A** a **I.** Determinar $\mathbf{A}^{-1}$ por esta técnica puede hacerse de manera conveniente usando el formato siguiente. Primero escribimos la matriz

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Después aplicamos las operaciones elementales sobre renglones hasta que $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ sea equivalente a una matriz que tenga a **I** en sus primeras dos columnas. Las últimas dos columnas de esta matriz serán $\mathbf{A}^{-1}$. De esta manera

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] = [\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}].$$

Observe que las primeras dos columnas de $[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}]$ forman una matriz reducida.

Este procedimiento puede extenderse para encontrar la inversa de *cualquier* matriz invertible:

Una matriz es invertible si y sólo si es equivalente a la matriz identidad.

Método para encontrar la inversa de una matriz

Si **M** *es una matriz invertible de $n \times n$, formar la matriz de $n \times (2n)$,* $[\mathbf{M} \mid \mathbf{I}]$. *Después realizar operaciones elementales sobre renglones hasta que las primeras n columnas formen una matriz reducida igual a* **I.** *Las últimas n columnas serán* M^{-1}. *En forma simbólica,*

$$[\mathbf{M} \mid \mathbf{I}] \rightarrow \cdots \rightarrow [\mathbf{I} \mid \mathbf{M}^{-1}].$$

Si una matriz **M** *no se reduce a* **I,** *entonces* $\mathbf{M}^{-1}$ *no existe.*

Principios en práctica 3

Determinación de la inversa de una matriz

Podríamos ampliar el esquema de codificación utilizado en el principio en práctica 1 a una matriz de 3×3 codificando tres letras del mensaje a la vez. Determine las inversas de las siguientes matrices 3×3 de codificación:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 4 Determinación de la inversa de una matriz

Determinar $\mathbf{A}^{-1}$ *si* **A** *es invertible.*

a. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}$.

Solución: siguiendo el procedimiento anterior, tenemos

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-1R_1 + R_3]{-4R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{9}{2}R^3 + R_2]{2R_3 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Las tres primeras columnas de la última matriz forman a **I.** Por lo que **A** es invertible y

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$

Solución: tenemos

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Las primeras dos columnas de la última matriz forman una matriz reducida diferente de **I.** Por tanto, **A** no es invertible.

Tecnología

La determinación de la inversa de una matriz invertible con una calculadora gráfica en verdad que puede ahorrarnos tiempo. La figura 6.5 muestra la inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Además, en la calculadora TI–83 podemos desplegar nuestra respuesta con entradas que tengan números fraccionarios.

```
[A]-1
     [[.4   -.2]
      [-.1  .3 ]]
Ans▸Frac
   [[2/5    -1/5]
    [-1/10 3/10]]
```

FIGURA 6.5 Inversa de **A** con entradas decimales y con entradas en forma de fracciones.

Ahora resolveremos un sistema utilizando la inversa.

EJEMPLO 5 Uso de la inversa para resolver un sistema

Resolver el sistema

Principios en práctica 4

Uso de la inversa para resolver un sistema

Un grupo de inversionistas tiene $500,000 para invertir en las acciones de tres compañías. La compañía A vende a $50 cada acción y tiene un rendimiento esperado de 13% al año. La compañía B vende en $20 la acción y tiene un rendimiento esperado de 15% anual. La compañía C vende en $80 una acción y tiene un rendimiento esperado de 10% anual. El grupo planea comprar el doble de acciones de la compañía A que de la compañía C. Si la meta del grupo es 12% de rendimiento anual, ¿cuántas acciones de cada compañía deben comprar los inversionistas?

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -1, \end{cases}$$

por determinación de la inversa de la matriz de coeficientes.

Solución: en la forma matricial el sistema es $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

es la matriz de coeficientes. Del ejemplo 4(a),

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La solución está dada por $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -\frac{41}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -17 \\ -4 \end{bmatrix},$$

de modo que $x_1 = -7$, $x_2 = -17$, y $x_3 = -4$.

Puede demostrarse que un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene solución única si y sólo si la matriz de coeficientes es invertible. En efecto, en el ejemplo anterior la matriz de coeficientes es invertible y existe una solución única para el sistema. Cuando la matriz de coeficientes no es invertible, el sistema tiene un número infinito de soluciones, o bien, ninguna solución.

EJEMPLO 6 Una matriz de coeficientes que no es invertible

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 2x - y + 5z = 0, \\ x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

Solución: la matriz de coeficientes es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right],$$

la matriz de coeficientes no es invertible. De aquí que el sistema *no puede* resolverse por medio de inversas. En este caso debe utilizarse otro método. En el ejemplo 4(a) de la sección 6.5, la solución que se determinó fue $x = -3r$, $y = -r$ y $z = r$.

Tecnología

Para resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ x + 4y = -8, \end{cases}$$

con una calculadora gráfica, introducimos la matriz de coeficientes como [A] y la matriz columna de constantes como [B]. El producto $[A]^{-1}[B]$ en la figura 6.6 proporciona la solución $x = 4$, $y = -3$.

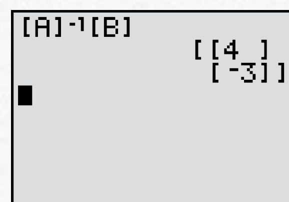


FIGURA 6.6 $[A]^{-1}[B]$ proporciona la solución $x = 4$, $y = -3$ para el sistema de ecuaciones.

Ejercicio 6.6

En los problemas del 1 al 18, si la matriz dada es invertible, encuentre su inversa.

1. $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

12. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

13. $\begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

14. $\begin{bmatrix} 7 & -8 & 5 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

15. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

16. $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

17. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$.

18. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

19. Resuelva $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ si

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

20. Resuelva $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ si

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Para cada uno de los problemas del 21 al 34, si la matriz de coeficientes del sistema es invertible, resuelva el sistema utilizando la inversa. Si no es así, resuelva el sistema por el método de reducción.

21. $\begin{cases} 6x + 5y = 2, \\ x + y = -3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ -x + 5y = -2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 3x - y = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x + 2y = 26, \\ 4x + 3y = 37. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x + 6y = 2, \\ 3x + 9y = 3. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x + 8y = 3, \\ 3x + 12y = 6. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x + z = 2, \\ x - y + z = 1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x - y + z = -2, \\ x - y - z = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x - y + z = 1, \\ x - y - z = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x + 8z = 8, \\ -x + 4y = 36, \\ 2x + y = 9. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x + 3y + 3z = 7, \\ 2x + y + z = 4, \\ x + y + z = 4. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x + 3y + 3z = 7, \\ 2x + y + z = 4, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

33. $\begin{cases} w + 2y + z = 4, \\ w - x + 2z = 12, \\ 2w + x + z = 12, \\ w + 2x + y + z = 12. \end{cases}$

34. $\begin{cases} w + x + z = 2, \\ w + y = 0, \\ x + y + z = 4, \\ y + z = 1. \end{cases}$

Para cada uno de los problemas 35 *y* 36, *encuentre* $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ *para la matriz* **A** *dada.*

35. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$

36. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$

---

37. Producción de automóviles Resuelva los problemas siguientes utilizando la inversa de la matriz implicada.

a. Una fábrica de automóviles produce dos modelos, A y B. El modelo A requiere 1 hora de mano de obra para pintarlo y $\frac{1}{2}$ hora de mano de obra para pulirlo, el modelo B requiere de 1 hora de mano de obra para cada uno de los dos procesos. Durante cada hora que la línea de ensamblado está funcionando, existen 100 horas de mano de obra disponibles para pintura y 80 horas de mano de obra para pulido. ¿Cuántos automóviles de cada modelo pueden terminarse cada hora si se utilizan todas las horas de mano de obra?



b. Suponga que cada modelo A requiere 10 partes de tipo 1 y 14 de tipo 2, mientras que cada modelo B requiere 7 partes tipo 1 y 10 de tipo 2. La fábrica puede obtener 800 partes tipo 1 y 1130 de tipo 2. ¿Cuántos automóviles de cada modelo se producen, si se utilizan todas las partes disponibles?

38. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, donde $a, b, c \neq 0$, demuestre que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}.$$

39. a. Si **A** y **B** son matrices invertibles con el mismo orden, demuestre que $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. [*Sugerencia:* demuestre que

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{I},$$

y utilice el hecho de que la inversa es única.]

b. Si

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

encuentre $(\mathbf{AB})^{-1}$.

40. Si **A** es invertible, puede demostrarse que $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$. Verifique esta relación si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

41. Una matriz **P** se dice que es *ortogonal* si $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$. ¿La matriz $\mathbf{P} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ es ortogonal?

42. Mensaje secreto Un amigo le ha enviado un mensaje secreto que consiste en tres matrices renglón de números como sigue:

$$\mathbf{R}_1 = [33 \quad 87 \quad 70], \qquad \mathbf{R}_2 = [57 \quad 133 \quad 20],$$

$$\mathbf{R}_3 = [38 \quad 90 \quad 33].$$

Entre los dos han diseñado la siguiente matriz (utilizada por su amigo para codificar el mensaje):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Descifre el mensaje procediendo de la manera siguiente:

a. Calcule los tres productos matriciales $\mathbf{R}_1\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{R}_2\mathbf{A}^{-1}$, y $\mathbf{R}_3\mathbf{A}^{-1}$.

b. Suponga que las letras del alfabeto corresponden a los números del 1 al 26, reemplace los números en estas tres matrices por letras y determine el mensaje.

43. Inversión Un grupo de inversionistas decide invertir \$500,000 en las acciones de tres compañías. La compañía D vende en \$60 una acción y tiene un rendimiento esperado de 16% anual. La compañía E vende en \$80 cada acción y tiene un rendimiento esperado de 12% anual. La compañía F vende cada acción en \$30 y tiene un rendimiento esperado de 9% anual. El grupo planea comprar cuatro veces más acciones de la compañía F que de la compañía E. Si la meta del grupo es 13.68% de rendimiento anual, ¿cuántas acciones de cada compañía deben comprar los inversionistas?

44. Inversión Los inversionistas del problema 43 deciden tratar una nueva estrategia de inversión con las mismas compañías. Ellos desean comprar el doble de acciones de la compañía F que de la compañía E, y tienen la meta de 14.52% de rendimiento anual. ¿Cuántas acciones de cada tipo deben comprar?

En los problemas 45 y 46 utilice una calculadora gráfica para (a) encontrar $\mathbf{A}^{-1}$; *exprese sus entradas en forma decimal redondeando a dos decimales. (b) Exprese las entradas de* $\mathbf{A}^{-1}$ *en forma de fracciones, si su calculadora tiene esa capacidad. [Precaución: para la parte (b), utilice la matriz* $\mathbf{A}^{-1}$ *de la calculadora para convertir las entradas a forma de fracciones: no utilice la matriz de valores redondeados de la parte (a).]*

45. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{10} & \frac{13}{15} \end{bmatrix}.$

46. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 4 & 8 & 9 \\ -7 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$

47. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & -0.3 \\ 0.2 & 0.1 & -0.1 \\ 0.3 & 0.2 & -0.4 \end{bmatrix}$, encuentre $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de orden 3. Redondee las entradas a dos decimales.

En los problemas 48 y 49 utilice una calculadora gráfica para resolver el sistema utilizando la inversa de la matriz de coeficientes.

48. $\begin{cases} 0.9x + 3y - 4.7z = 13, \\ 2x - 0.4y + 2z = 4.7, \\ x - 0.8y - 0.5z = 7.2. \end{cases}$

49. $\begin{cases} \frac{2}{5}w + 4x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{7}z = \frac{14}{13}, \\ \frac{5}{9}w - \frac{2}{3}x - 4y - z = \frac{7}{8}, \\ x - \frac{4}{9}y + \frac{5}{6}z = 9, \\ \frac{1}{2}w + 4y - \frac{1}{3}z = \frac{4}{7}. \end{cases}$

OBJETIVO Encontrar el determinante de una matriz cuadrada por medio del uso de menores y cofactores, y considerar algunas propiedades que simplifiquen la evaluación de un determinante.

El determinante de **A** también se denota como det **A**.

6.7 Determinantes

Ahora introducimos una nueva función, la *función determinante*. Aquí las entradas serán matrices *cuadradas*, pero las salidas serán números reales. Si **A** es una matriz cuadrada, entonces la función determinante asocia con **A** exactamente un número real llamado *determinante* de **A.** Al denotar el determinante de **A** con $|\mathbf{A}|$ (esto es, utilizando líneas verticales), podemos pensar en la función determinante como una correspondencia:

$$\mathbf{A} \rightarrow |\mathbf{A}|$$

matriz cuadrada — número real = determinante de **A**

El uso de los determinantes en la solución de sistemas lineales se estudiará posteriormente. Veamos cómo un número real es asignado a una matriz cuadrada; primero consideraremos los casos especiales de matrices de orden 1 y 2. Después extenderemos la definición a matrices de orden n.

Definición

Si $\mathbf{A} = [a_{11}]$ es una matriz cuadrada de orden 1, entonces $|\mathbf{A}| = a_{11}$.

Esto es, la función determinante asigna a la matriz cuadrada de una entrada $[a_{11}]$ el número a_{11}. De aquí que si $\mathbf{A} = [6]$ entonces $|\mathbf{A}| = 6$.

Definición

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2, entonces

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Esto es, el determinante de una matriz de 2×2, se obtiene tomando el producto de las entradas de la diagonal principal y restándole el producto de las entradas de la otra diagonal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Hablamos del determinante de 2×2, como un *determinante de orden* 2.

EJEMPLO 1 Evaluación de determinantes de orden 2

a. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (2)(-4) - (1)(3) = -8 - 3 = -11.$

b. $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(1) - (-2)(0) = -3 - 0 = -3.$

c. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (0)(0) = 1.$

d. $\begin{vmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{vmatrix} = (x)(1) - (0)(y) = x.$

El determinante de una matriz cuadrada **A** de orden n ($n > 2$), está definido de la manera siguiente. Con una entrada dada de **A,** asociamos la matriz cuadrada de orden $n - 1$, obtenida al eliminar las entradas en el renglón y columna a los que la entrada pertenece. Por ejemplo, dada la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

para la entrada a_{21} eliminamos las entradas del renglón 2 y de la columna 1, sombreada en la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Esto deja la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

de orden 2. El *determinante* de esta matriz se conoce como el **menor** de a_{21}. En forma análoga, el menor de a_{22} es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

y para a_{23} es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Con cada entrada a_{ij} asociamos también un número determinado por los subíndices de la entrada:

$$(-1)^{i+j},$$

donde $i + j$ es la suma del número de renglón i y del número de columna j en los que se encuentra la entrada. Con la entrada a_{21} asociamos $(-1)^{2+1} = -1$, con a_{22} el número $(-1)^{2+2} = 1$ y con a_{23} asociamos $(-1)^{2+3} = -1$. El **cofactor**

c_{ij} de la entrada a_{ij} es el producto de $(-1)^{i+j}$ y el menor de a_{ij}. Por ejemplo, el cofactor de a_{21} es

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

La única diferencia entre un cofactor y un menor es el factor $(-1)^{i+j}$.

Determinante de una matriz cuadrada

Para encontrar el determinante de cualquier matriz cuadrada **A** de orden n ($n > 2$), seleccione *cualquier* renglón (o columna) de **A** y multiplique cada entrada en el renglón (columna) por su cofactor. La suma de estos productos será el determinante de **A,** llamado **determinante de orden *n*.**

Por ejemplo, encontraremos el determinante de

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

aplicando la regla anterior al primer renglón (algunas veces indicado como "desarrollo con respecto al primer renglón"). Para la entrada a_{11} obtenemos

$$(2)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1)(5) = 10.$$

Para a_{12}, obtenemos

$$(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(13) = 13,$$

y para a_{13}, obtenemos

$$(3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3(1)(3) = 9.$$

De aquí,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 13 + 9 = 32.$$

De manera análoga, si hubiésemos desarrollado con respecto a la segunda columna, entonces

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 13 + 0 + 19 = 32,$$

como antes.

Puede demostrarse que el determinante de una matriz es único y no depende del renglón o columna seleccionados para su evaluación. En el problema anterior, la segunda expansión es preferible por el cero en la columna 2, el cual no contribuye a la suma, lo que simplifica, por tanto, el cálculo.

Principios en práctica 1

Evaluación de un determinante de orden 3 por medio de cofactores

Una botánica cultiva tres tipos diferentes de algas en el mismo medio ambiente de su laboratorio. Ella proporciona diariamente a las algas una mezcla que contiene tres diferentes nutrimentos (1, 2 y 3). Los requerimientos de cada nutrimento de los tres tipos de algas (A, B y C) pueden representarse por medio de la matriz siguiente:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 10 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Encuentre el determinante de esta matriz.

EJEMPLO 2 Evaluación de un determinante de orden 3 por medio de cofactores

Encontrar $|\mathbf{A}|$ *si*

a. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ -10 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Solución: al desarrollar a lo largo del primer renglón, tenemos

$$|\mathbf{A}| = 12(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 12(1)(-1) + (-1)(-1)(-1) + 3(1)(4) = -1.$$

b. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución: al desarrollar por conveniencia con respecto a la primera columna, tenemos

$$|\mathbf{A}| = 0 + 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0 = 2(-1)(4) = -8.$$

EJEMPLO 3 Evaluación de un determinante de orden 4

Evaluar $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ *desarrollando con respecto al primer renglón.*

Solución:

$$|\mathbf{A}| = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ahora hemos expresado $|\mathbf{A}|$ en términos de determinantes de orden 3. Al desarrollar cada uno de estos determinantes con respecto al primer renglón, tenemos

$$|\mathbf{A}| = 2(1)\left[1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right] + 1(-1)\left[1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right]$$

$$= 2[1(1)(-6) + 3(1)(-2)] + (-1)[(1)(-1)(-1)] = -25.$$

También podemos evaluar un determinante de orden 3 como sigue. Copie la primera y la segunda columnas del determinante a su derecha, para obtener

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}. \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Ahora tome la suma de los tres productos de las entradas sobre las flechas que apuntan a la derecha y reste de ésta la suma de los tres productos de las entradas sobre las flechas que apuntan hacia la izquierda. El resultado es

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

Verifique este método para los determinantes del ejemplo 2. Es importante destacar que no hay una forma semejante para la evaluación de determinantes de orden mayor que tres.

La evaluación de determinantes con frecuencia se simplifica utilizando varias propiedades, algunas de las cuales ahora listamos. En cada caso **A** denota una matriz cuadrada:

1. Si cada una de las entradas de un renglón (o columna) de A es 0, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.

Por tanto

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Si dos renglones (o columnas) de A son idénticos, $|\mathbf{A}| = 0$.

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ ya que la columna } 1 = \text{columna } 3.$$

3. Si A es triangular superior (o inferior), entonces $|\mathbf{A}|$ es igual al producto de las entradas de la diagonal principal.

De aquí que,

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2)(5)(-2)(1) = -20.$$

De esta propiedad concluimos que el determinante de una matriz identidad es 1.

4. Si B es la matriz que se obtiene sumando un múltiplo de un renglón (o columna) de A a otro renglón (columna), entonces $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$.

Por tanto, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

y **B** es la matriz obtenida a partir de **A,** sumando -2 veces el renglón 3 al renglón 1, entonces

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = |\mathbf{B}|.$$

Por la propiedad 1, $|\mathbf{B}| = 0$ y así $|\mathbf{A}| = 0$.

5. Si B es la matriz que se obtiene al intercambiar dos renglones (o columnas) de A, entonces $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$, o en forma equivalente, $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{B}|$.

Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

al intercambiar los renglones 2 y 4, por la propiedad 3 tenemos

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2)(1)(2)(1) = -4.$$

6. Si B es la matriz que se obtiene multiplicando cada entrada de un renglón (o columna) de A por el mismo número k, entonces $|\mathbf{B}| = k|\mathbf{A}|$.

En esencia, con esta propiedad un número puede ser "factorizado" ("sacado") de un renglón o columna. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 15 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(3) & 2(5) & 2(7) \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 15 & 21 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 15 & 21 \end{vmatrix}.$$

Así,

$$\begin{vmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 15 & 21 \end{vmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_1}{=} 2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 15 & 21 \end{vmatrix},$$

donde la notación $\frac{1}{2}R_1$ indica que multiplicamos el renglón 1 por $\frac{1}{2}$ e insertamos un factor 2 al frente. Continuando, tenemos

$$2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 15 & 21 \end{vmatrix} \overset{\frac{1}{3}R_3}{=} 2(3)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2(3)(0) = 0,$$

ya que los renglones 1 y 3 son iguales.

7. Si k es una constante y A tiene orden n, entonces $|k\mathbf{A}| = k^n|\mathbf{A}|$. Esto es una consecuencia de la propiedad 6, ya que cada uno de los n renglones de $k\mathbf{A}$ tiene un factor común de k.

Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

entonces $|\mathbf{A}| = -2$, de modo que $|4\mathbf{A}| = 4^2|\mathbf{A}| = 16(-2) = -32$.

8. El determinante del producto de dos matrices de orden n es el producto de sus determinantes. Esto es, $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$.

Por tanto, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

entonces

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-2)(3) = -6.$$

El hecho de que las propiedades 1 a la 6 sean verdaderas para columnas, así como para renglones, es resultado de otra propiedad: *el determinante de una matriz cuadrada y el determinante de su transpuesta son iguales*, que en forma simbólica es

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|.$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{y} \quad \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Las propiedades 1 a la 6 son útiles en la evaluación de $|\mathbf{A}|$, ya que nos dan una manera de expresar $\mathbf{A}$ en forma triangular (decimos que "triangulamos"); entonces, por la propiedad 3, tomamos el producto de la diagonal principal.

EJEMPLO 4 Evaluación de un determinante por triangulación

Evaluar

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}.$$

Solución: tenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} \overset{\frac{1}{3}R_2}{=} 3\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{-2R_1 + R_2}{=} -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} \overset{-4R_1 + R_3}{=} -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix}$$

$$= -3(1)(-7)(-11) = -231.$$

EJEMPLO 5 Evaluación de un determinante por triangulación

Evaluar

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Solución: tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \overset{-R_1 + R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{-3R_1 + R_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -19 \end{vmatrix} \overset{-2R_2 + R_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & -3 & 0 & -19 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3R_2 + R_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -34 \end{vmatrix} \overset{3R_3 + R_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(1)(-1)(-1) = 1.$$

Tecnología

La figura 6.7 muestra el resultado de evaluar $|\mathbf{A}|$ con una calculadora gráfica, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.8 & 1 & -0.3 \\ 0.4 & 2 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

La evaluación da $|\mathbf{A}| = 0.34$

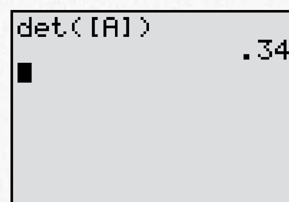


FIGURA 6.7 Al evaluar det **A** se obtiene 0.34.

Ejercicio 6.7

En los problemas del 1 al 6 evalúe los determinantes.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ -4 & -6 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -a & b \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} -2 & -a \\ -a & 9 \end{vmatrix}$.

En los problemas 7 y 8 evalúe las expresiones dadas.

7. $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}$.

8. $\dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}$.

9. Resuelva para k si $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & k \end{vmatrix} = 12$.

En los problemas del 10 al 13, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

determine cada expresión.

10. El menor de a_{31}.

11. El menor de a_{22}.

12. El cofactor de a_{23}.

13. El cofactor de a_{32}.

14. Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es 50×50 y el menor de $a_{43,47}$ es igual a 20, ¿cuál es el valor del cofactor de $a_{43,47}$?

En los problemas del 15 al 18, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

escriba cada expresión.

15. El menor de a_{32}.

16. El menor de a_{24}.

17. El cofactor de a_{13}.

18. El cofactor de a_{43}.

En los problemas del 19 al 38 evalúe el determinante. Si es posible, utilice las propiedades de los determinantes.

19. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 4 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{8} & -2 \\ -\frac{1}{8} & \frac{9}{2} & 1 \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

31. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

32. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

33. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

34. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 13 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$.

35. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

36. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & -1 & -7 \\ 1 & 5 & -4 & 3 \end{vmatrix}$.

37. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

38. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

En los problemas 39 y 40 resuelva para x.

39. $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 7 & 7-x \end{vmatrix} = 26.$

40. $\begin{vmatrix} 3 & x & 2x \\ 0 & x & 99 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 60.$

---

41. Si **A** es de orden 4×4 y $|\mathbf{A}| = 12$, ¿cuál es el valor del determinante de la matriz obtenida al multiplicar cada entrada de **A** por 2?

42. Suponga que **A** es una matriz cuadrada de orden 5 y $|\mathbf{A}| = \frac{1}{2}$. Sea **B** la matriz obtenida al multiplicar el tercer renglón de **A** por 7 (los otros renglones permanecen sin cambio). Encuentre $|2\mathbf{B}|$.

43. Puede demostrarse que una matriz cuadrada **A** es invertible si y sólo si $|\mathbf{A}| \neq 0$.

a. Si **A** es invertible, demuestre que

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}.$$

b. Si $|\mathbf{A}| = 3$, encuentre $|\mathbf{A}^{-1}|$.

44. Si la matriz **A** tiene orden 4×4 y $|\mathbf{A}| = 2$, encuentre los valores de (a) $|3\mathbf{A}|$, (b) $|-\mathbf{A}|$ y (c) $|\mathbf{A}^{-1}|$. [*Sugerencia:* para la parte (c), consulte el problema 43.]

45. Determine el(los) valor(es) de la constante c, para el (los) cual(es) el sistema siguiente tiene un número infinito de soluciones:

$$\begin{cases} x = -2z - 3y, \\ cy + x = -4z, \\ 2y + cz = 0. \end{cases}$$

[*Sugerencia:* véanse los dos párrafos que preceden al ejemplo 6 de la sección 6.6 y el inicio del enunciado del problema 43 anterior].

En los problemas del 46 al 48 utilice una calculadora gráfica para evaluar el determinante.

46. $\begin{vmatrix} 40 & 85 & 7 \\ -23 & 46 & 18 \\ 15 & 10 & -9 \end{vmatrix}$.

47. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

48. $\begin{vmatrix} 0.3 & -9.1 & 7.4 & 4.7 \\ -6.2 & 3.4 & 9.6 & 3.2 \\ 5.2 & 0.2 & 8.0 & 1.6 \\ 5.1 & 7.2 & 9.6 & -0.4 \end{vmatrix}$.

---

49. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -8 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, encuentre $|2\mathbf{A} - \mathbf{B}^2|$.

OBJETIVO Emplear una fórmula, denominada regla de Cramer, para la resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, y generalizar la regla a n ecuaciones lineales con n incógnitas.

6.8 Regla de Cramer

Los determinantes pueden aplicarse para resolver ciertos tipos de sistemas de ecuaciones lineales. De hecho, es a partir del análisis de tales sistemas que surgió el estudio de los determinantes. Primero consideraremos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Después los resultados se extenderán para incluir situaciones más generales.

Resolvamos

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2. \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

Para encontrar una fórmula explícita para x, examinamos $x\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$:

$$x\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x & a_{12} \\ a_{21}x & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{(propiedad 6 de la sec. 6.7)}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y & a_{12} \\ a_{21}x + a_{22}y & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{(sumando } y \text{ veces la columna 2 a la columna 1)}$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{[de la ecu. (1)].}$$

Por tanto,

$$x\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

así

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad \textbf{(2)}$$

Para encontrar una fórmula para y, examinamos $y\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$:

$$y\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}y \\ a_{21} & a_{22}y \end{vmatrix} \quad \text{(propiedad 6 de la sec. 6.7)}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21} & a_{21}x + a_{22}y \end{vmatrix} \quad \text{(sumando } x \text{ veces la columna 1 a la columna 2)}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{[de la ecu. (1)].}$$

Por tanto,

$$y\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix},$$

así

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad \textbf{(3)}$$

Observe que en las ecuaciones (2) y (3), los denominadores son iguales, a saber, el determinante de la matriz de coeficientes del sistema dado. Para encontrar x, el numerador en la ecuación (2) es el determinante que se obtiene reemplazando la "columna de las x" (esto es la columna 1) de la matriz de coeficientes, por la columna de constantes $\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}$. De manera análoga, el nume-

rador en la ecuación (3) es el determinante de la matriz que se obtiene a partir de la matriz de coeficientes cuando la "columna de las y" (esto es, la columna 2) es reemplazada por $\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}$. A condición de que el determinante de la matriz de coeficientes sea diferente de cero, el sistema original tendrá solución única. Sin embargo, si este determinante es cero, el procedimiento no es aplicable y el sistema puede tener un número infinito de soluciones, o bien ninguna solución. En tales casos se deben utilizar los métodos que vimos anteriormente para resolver el sistema.

Emplearemos los resultados anteriores para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 5 = 0, \\ \quad 3y + x = 6. \end{cases}$$

Primero, escribimos el sistema en la forma apropiada:

$$\begin{cases} 2x + y = -5, \\ x + 3y = 6. \end{cases}$$

El determinante Δ de la matriz de coeficientes es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - 1(1) = 5.$$

Ya que $\Delta \neq 0$, existe una única solución. Resolviendo para x, tenemos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-21}{5} = -\frac{21}{5}.$$

Resolviendo para y, obtenemos

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{17}{5}.$$

De este modo la solución es $x = -\frac{21}{5}$ y $y = \frac{17}{5}$.

El método que se acaba de describir puede extenderse a sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas; dicho método se conoce como la *regla de Cramer*.

Regla de Cramer

Sea un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n. \end{cases}$$

Si el determinante Δ de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es diferente de cero, entonces el sistema tiene una única solución. Además, la solución está dada por

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

donde Δ_k, el numerador de x_k, es el determinante de la matriz obtenida al reemplazar la k-ésima columna de $\mathbf{A}$ por la columna de constantes.

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla de Cramer

Resolver el sistema siguiente utilizando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ 4x + 3y + 2z = 2, \\ 2x - y - 3z = 0. \end{cases}$$

Solución: el determinante de la matriz de coeficientes es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -8.$$

Ya que $\Delta \neq 0$, existe una solución única. Si resolvemos para x, reemplazamos la primera columna de la matriz de coeficientes por la columna de constantes y obtenemos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2},$$

De manera análoga,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{8}{-8} = -1.$$

La solución es $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$ y $z = -1$.

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla de Cramer

Resolver el sistema siguiente para z utilizando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} x + y + 5w = 6, \\ x + 2y + z = 4, \\ 2y + z + w = 6, \\ 3x - 4w = 2. \end{cases}$$

Solución: tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Aquí transformamos a la forma triangular superior y determinamos el producto de las entradas de la diagonal principal (sec. 6.7, ejs. 4 y 5). De manera similar, obtenemos,

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{49}{5} \end{vmatrix} = -98.$$

La regla de Cramer nos permite resolver para hallar una incógnita sin tener que resolver para las otras.

De aquí, $z = \Delta_z/\Delta = -98/1 = -98$.

Ejercicio 6.8

En los problemas del 1 al 16 resuelva. Si es posible utilice la regla de Cramer.

1. $\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 4x + y = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + y = 6, \\ 7x - 2y = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x = 4 - 3y, \\ y = 6x - 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y - 6 = 0, \\ y - 1 = 3x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3(x + 2) = 5, \\ 6(x + y) = -8. \end{cases}$

6. $\begin{cases} w - 2z = 4, \\ 3w - 4z = 6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}z = 1, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}z = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 0.6x - 0.7y = 0.33, \\ 2.1x - 0.9y = 0.69. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x - y + z = 2, \\ 2x - y + 3z = 6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 13, \\ x + y - z = -4, \\ x + 2y - 3z = -12. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0, \\ x + y - 3z = 4, \\ 3x + 2y - z = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3r - t = 7, \\ 4r - s + 3t = 9, \\ 3s + 2t = 15. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x - 2y + z = 3, \\ 2x + y + 2z = 6, \\ x + 8y + z = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x + y + z = 1, \\ x - y + z = 4, \\ 5x + y + 3z = 5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x - 3y + z = -2, \\ x - 6y + 3z = -2, \\ 3x + 3y - 2z = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x - z = 14, \\ y + z = 21, \\ x - y + z = -10. \end{cases}$

En los problemas 17 y 18 utilice la regla de Cramer para resolver las incógnitas indicadas.

17. $\begin{cases} x - y + 3z + w = -14, \\ x + 2y - 3w = 12, \\ 2x + 3y + 6z + w = 1, \\ x + y + z + w = 6. \end{cases}$; y, w.

18. $\begin{cases} x + y + 5z = 6, \\ x + 2y + w = 4, \\ 2y + z + w = 6, \\ 3x - 4z = 2. \end{cases}$; x, y.

19. Demuestre que la regla de Cramer *no* se aplica a

$$\begin{cases} 2 - y = x, \\ 3 + x = -y, \end{cases}$$

pero que, a partir de consideraciones geométricas, el sistema no tiene solución.

20. Determine todos los valores de c tales que la regla de Cramer no pueda utilizarse para resolver el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + cy + 8z = -4, \\ cx - z = 1, \\ -53x - 6y + z = 2. \end{cases}$$

21. Eventos especiales Una estudiante determinó que tiene suficiente tiempo disponible para asistir a 24 eventos especiales durante el año escolar. Entre los eventos están conciertos, juegos de hockey y producciones teatrales. Ella siente que un balance ideal se alcanzaría si fuera el doble de veces a conciertos que a juegos de hockey, y si el número de conciertos a los que asistiera fuera igual al *promedio* del número de juegos de hockey y el número de obras de teatro. Utilice la regla de Cramer para determinar el número de juegos de hockey a los que asistirá para alcanzar este balance ideal.

22. Utilice la regla de Cramer para resolver el sistema siguiente, para y:

$$\begin{cases} 3w + 2x - 7y + z = 11, \\ \quad - 5x - 6y + 3z = 8, \\ 4w \quad + 2y + 9z = 3, \\ 7w - 2x + 4y + 5z = 9. \end{cases}$$

Redondee su respuesta a dos decimales.

23. Utilice la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{4}{7}x - \frac{7}{3}y + \frac{2}{5}z = \frac{14}{9}, \\ -8x + \frac{5}{8}y - 6z = \frac{13}{9}, \\ 2x + \frac{3}{5}y + \frac{4}{3}z = \frac{10}{3}. \end{cases}$$

Redondee su respuesta a dos decimales.

OBJETIVO Utilizar los métodos de este capítulo para analizar la producción de sectores industriales de una economía.

6.9 Análisis de insumo-producto con una calculadora gráfica

Las matrices de insumo-producto, desarrolladas por Wassily W. Leontief,[1] indican las interrelaciones que se dan entre la oferta y la demanda en los diferentes sectores de una economía durante algún periodo. La frase "insumo-producto" se utiliza porque las matrices muestran los valores de los productos de cada industria que son vendidos como insumo, tanto a las industrias como a los consumidores finales.

Un ejemplo hipotético para una economía muy simplificada que consta de dos industrias, está dado por la matriz de insumo-producto siguiente. Antes de que expliquemos la matriz, digamos que los sectores *industriales* puede suponerse que son los de manufactura, acero, agricultura, carbón, etc. Los *otros factores de producción* del sector consisten en los costos para las respectivas industrias, como mano de obra, utilidad, etc. El sector de *demanda final* podría ser de consumo doméstico, gubernamental, etc. La matriz es como sigue:

	Consumidores (insumo)			
	Industria A	*Industria B*	*Demanda final*	*Totales*
Productores (producto):				
Industria A	240	500	460	1200
Industria B	360	200	940	1500
Otros factores de producción	600	800	—	
Totales	1200	1500		

Cada industria aparece en un renglón y en una columna. El renglón muestra las compras del producto de una industria por parte de los sectores industriales y por los consumidores finales (de aquí el término "demanda final"). Las entradas representan los valores de los productos y podrían estar en unidades de millones de dólares del producto. Por ejemplo, de la producción total de la industria A, 240 fueron como insumo para la propia industria (para uso interno),

[6]Leontief ganó el premio Nobel de economía en 1973 por el desarrollo del método de "insumo-producto" y sus aplicaciones a problemas económicos.

500 fueron para la industria B y 460 fueron directamente al sector de la demanda final. La producción total de A es la suma de la demanda industrial y la demanda final ($240 + 500 + 460 = 1200$).

La columna de cada industria da el valor de lo que ésta compró como insumo de cada una de las industrias, así como lo gastado por otros conceptos. Por ejemplo, a fin de producir 1200 unidades, la industria A compró 240 unidades de su producto, 360 de la producción de B y tiene gastos de mano de obra y otros por 600 unidades.

Observe que para cada industria, la suma de las entradas en su renglón es igual a la suma de las entradas en su columna. Esto es, el valor de la producción total de A es igual al valor de los insumos totales de A.

El análisis de insumo-producto nos permite estimar la producción total de cada sector *industrial* si existe un cambio en la demanda final, *mientras la estructura básica de la economía permanece igual*. Esta importante suposición significa que para cada industria, la cantidad gastada en cada insumo por cada dólar de producto, debe permanecer fija.

Por ejemplo, al tener una producción con un valor de 1200 unidades, la industria A compra 240 unidades de la industria A, 360 de la industria B y gasta 600 unidades en otros conceptos. Así, por cada dólar de producción, la industria A gasta $\frac{240}{1200} = \frac{1}{5}$ (= \$0.20) en A, $\frac{360}{1200} = \frac{3}{10}$ (= \$0.30) en B y $\frac{600}{1200} = \frac{1}{2}$ (= \$0.50) en otros conceptos. Combinando estas razones fijas de la industria A con aquellas de la industria B, podemos dar los requerimientos por dólar de producción para cada industria:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ \\ \text{Otros} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{240}{1200} & \frac{500}{1500} \\ \frac{360}{1200} & \frac{200}{1500} \\ \hdashline \frac{600}{1200} & \frac{800}{1500} \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \\ \hdashline \frac{1}{2} & \frac{8}{15} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ \\ \text{Otros} \end{array}$$

Las entradas en la matriz se llaman **coeficientes de insumo-producto.** La suma de cada columna es 1.

Ahora, suponga que el valor de la demanda final cambia de 460 a 500 para la industria A, y de 940 a 1200 para la industria B. Nos gustaría estimar el valor de la producción *total* que A y B deben alcanzar para satisfacer esta meta, a condición de que la estructura en la matriz precedente permanezca igual.

Sean X_A y X_B los nuevos valores de producción total para las industrias A y B, respectivamente. Ahora, para A.

$$\begin{array}{c}\text{valor total}\\ \text{de la}\\ \text{producción } A\end{array} = \begin{array}{c}\text{Valor}\\ \text{consumido}\\ \text{por } A\end{array} + \begin{array}{c}\text{Valor}\\ \text{consumido}\\ \text{por } B\end{array} + \begin{array}{c}\text{Valor consumido}\\ \text{por la demanda}\\ \text{final,}\end{array}$$

así, tenemos

$$X_A = \tfrac{1}{5}X_A + \tfrac{1}{3}X_B + 500.$$

Del mismo modo, para B,

$$X_B = \tfrac{3}{10}X_A + \tfrac{2}{15}X_B + 1200.$$

Utilizando la notación matricial podemos escribir

$$\begin{bmatrix} X_A \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ X_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 500 \\ 1200 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

En esta ecuación matricial, sean

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_A \\ X_B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}, \text{ y } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 500 \\ 1200 \end{bmatrix}.$$

Llamamos a **X** la **matriz de producción, A** es la **matriz de coeficientes** y **C** la **matriz de demanda final.** De la ecuación (1),

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{C},$$

$$\mathbf{X} - \mathbf{AX} = \mathbf{C}.$$

Si **I** es la matriz identidad de 2×2, entonces

$$\mathbf{IX} - \mathbf{AX} = \mathbf{C},$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{C}.$$

Si $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ existe, entonces

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C}.$$

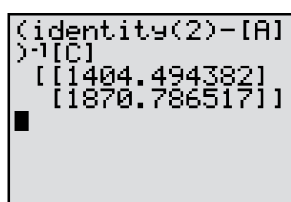


FIGURA 6.8 Evaluación de una matriz de producción.

La matriz $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ se conoce como la **matriz de Leontief.** Vamos a introducir las matrices **A** y **C** en una calculadora gráfica. Con una TI-83, la matriz identidad de orden 2 se obtiene con el comando "identity 2". La evaluación de $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C}$, como se muestra en la figura 6.8, da la matriz de producción

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1404.49 \\ 1870.79 \end{bmatrix}.$$

Aquí redondeamos las entradas de **X** a dos decimales. Así, para satisfacer la meta, la industria A debe producir 1404.49 unidades y la industria B debe producir 1870.79. Si estuviéramos interesados en el valor de los otros factores de producción para A, digamos, P_A, entonces

$$P_A = \tfrac{1}{2}X_A = 702.25.$$

EJEMPLO 1 Análisis de insumo-producto

Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

	Industria A	Industria B	Industria C	Demanda final
Industria: A	240	180	144	36
B	120	36	48	156
C	120	72	48	240
Otros	120	72	240	—

suponga que la demanda final cambia a 77 para A, 154 para B y 231 para C. Determine la matriz de producción para esta economía (las entradas están en millones de dólares).

Solución: sumamos por separado las entradas en los primeros tres renglones. Los valores totales de producción para las industrias A, B y C son 600, 360 y 480, respectivamente. Para obtener la matriz de coeficientes **A,** dividimos las entradas de las industrias en cada columna entre el valor total de la producción para esa industria:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{240}{600} & \frac{180}{360} & \frac{144}{480} \\ \frac{120}{600} & \frac{36}{360} & \frac{48}{480} \\ \frac{120}{600} & \frac{72}{360} & \frac{48}{480} \end{bmatrix}.$$

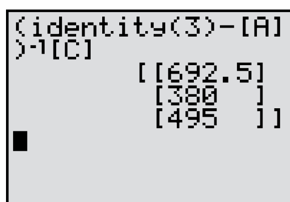


FIGURA 6.9 Evaluación de la matriz de producción del ejemplo 1.

La matriz de demanda final es

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 77 \\ 154 \\ 231 \end{bmatrix}.$$

La figura 6.9 muestra el resultado de evaluar $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C}$. Así, la matriz de producción es

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 692.5 \\ 380 \\ 495 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 6.9

1. Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

	Industria Acero	Carbón	*Demanda final*
Industria: *Acero*	200	500	500
Carbón	400	200	900
Otros	600	800	—

encuentre la matriz de producción, si la demanda final cambia a 600 para acero y 805 para carbón. Encuentre el valor total de los otros costos de producción que esto implica.

2. Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

	Industria Educación	Gobierno	*Demanda final*
Industria: *Educación*	40	120	40
Gobierno	120	90	90
Otros	40	90	—

encuentre la matriz de producción si la demanda final cambia a (a) 200 para educación y 300 para gobierno; (b) 64 para educación y 64 para gobierno.

3. Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

	Industria Grano	Fertilizante	Ganado vacuno	*Demanda final*
Industria: *Grano*	18	30	45	15
Fertilizante	27	30	60	3
Ganado vacuno	54	40	60	26
Otros	9	20	15	—

encuentre la matriz de producción (con entradas redondeadas a dos decimales), si la demanda final cambia a (a) 50 para granos, 40 para fertilizante y 30 para ganado vacuno; (b) 10 para grano, 10 para fertilizante y 24 para ganado vacuno.

4. Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

	Industria Agua	Electricidad	Agricultura	*Demanda final*
Industria: *Agua*	100	400	240	260
Electricidad	100	80	480	140
Agricultura	300	160	240	500
Otros	500	160	240	—

encuentre la matriz de producción, si la demanda final cambia a 300 para agua, 200 para electricidad y 400 para agricultura. Redondee sus entradas a dos decimales.

5. Dada la matriz de insumo-producto

	Industria Gobierno	Agricultura	Manufactura	*Demanda final*
Industria: *Gobierno*	400	200	200	200
Agricultura	200	400	100	300
Manufactura	200	100	300	400
Otros	200	300	400	—

con entradas en miles de millones de dólares, determine la matriz de producción para la economía, si la demanda final cambia a 300 para gobierno, 350 para agricultura y 450 para manufactura. Redondee las entradas al entero de miles de millones de dólares más cercano.

6. Dada la matriz de insumo-producto del problema 5, determine la matriz de producción para la economía si la demanda final cambia a 150 para gobierno, 200 para agricultura y 300 para manufactura. Redondee las entradas al entero de miles de millones de dólares más cercano.

7. Dada la matriz de insumo-producto del problema 5, determine la matriz de producción para la economía si la demanda final cambia a 250 para gobierno, 300 para agricultura y 350 para manufactura. Redondee las entradas al entero de miles de millones de dólares más cercano.

8. Dada la matriz de insumo-producto del problema 5, determine la matriz de producción para la economía si la demanda final cambia a 400 para gobierno, 500 para agricultura y 300 para manufactura. Redondee las entradas al entero de miles de millones de dólares más cercano.

6.10 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 6.1 matriz orden (o tamaño) entrada a_{ij}, de $[a_{ij}]$ matriz (o vector) renglón matriz (o vector) columna igualdad de matrices transpuesta de una matriz, $\mathbf{A}^T$ matriz cero, **O** matriz cuadrada diagonal principal matriz diagonal matriz triangular superior (inferior)

Sección 6.2 multiplicación por un escalar suma y resta de matrices

Sección 6.3 multiplicación de matrices matriz identidad, **I** potencia de una matriz ecuación matricial, $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$

Sección 6.4 matriz de coeficientes matriz aumentada operación elemental sobre renglón matrices equivalentes matriz reducida entrada principal parámetro

Sección 6.5 sistema homogéneo sistema no homogéneo solución trivial

Sección 6.6 matriz inversa matriz invertible (no singular) matriz elemental

Sección 6.7 determinante de una matriz menor de una entrada cofactor de una entrada

Sección 6.8 regla de Cramer

Sección 6.9 matriz de insumo-producto matriz de Leontief

Resumen

Una matriz es un arreglo rectangular de números encerrados entre corchetes. Hay tres tipos especiales de matrices: matriz cero **O,** matriz cuadrada y matriz identidad **I.** Además de la operación básica de multiplicación por un escalar, están definidas las operaciones de suma y resta de matrices, que se aplican a matrices del mismo orden. El producto **AB** está definido cuando el número de columnas de **A** es igual al número de renglones de **B.** Aunque la suma de matrices es conmutativa, la multiplicación no lo es. Utilizando la multiplicación matricial podemos expresar un sistema de ecuaciones lineales como la ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener una solución única, ninguna solución o bien un número infinito de soluciones. Tres métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales por medio de matrices son: (1) utilizar las tres operaciones elementales sobre renglones, (2) usar una matriz inversa, y (3) por medio de determinantes. El primer método implica aplicar las operaciones elementales sobre renglones a la matriz aumentada del sistema, hasta que se obtiene una matriz reducida equivalente. La matriz reducida hace que la solución o soluciones para el sistema sean obvias (suponiendo que existan). Si tiene un número infinito de soluciones, la solución general implica al menos un parámetro.

El segundo método de resolución de un sistema de ecuaciones lineales involucra inversas. La inversa (si existe) de una matriz cuadrada **A** es una matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Si **A** es invertible, podemos encontrar $\mathbf{A}^{-1}$ aumentando **A** con **I,** y aplicando operaciones elementales sobre renglones hasta que **A** sea reducida a **I.** El resultado de aplicar las mismas operaciones elementales sobre renglones a **I** es $\mathbf{A}^{-1}$. La inversa de una matriz puede utilizarse para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas dado por $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, a condición de que la matriz de coeficientes **A** sea invertible. La solución única está dada por $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Si **A** no es invertible, el sistema no tiene solución, o bien tiene un número infinito de soluciones.

El tercer método para resolver un sistema de ecuaciones lineales emplea determinantes, y se conoce como la regla de Cramer. Se aplica a sistemas de n ecuaciones con n incógnitas cuando el determinante de la matriz de coeficientes no es cero.

Nuestra aplicación final de matrices trata las relaciones que existen entre los diferentes sectores de una economía, lo que se conoce como análisis de insumo-producto.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 8 simplifique.

1. $2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$

2. $8\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -9 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}.$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\right).$

6. $-\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}\right).$

7. $2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$

8. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^2.$

En los problemas del 9 al 12 calcule la matriz requerida si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. $(2\mathbf{A})^{\mathrm{T}} - 3\mathbf{I}^2.$

10. $\mathbf{A}(2\mathbf{I}) - \mathbf{AO}^{\mathrm{T}}.$

11. $\mathbf{B}^4 + \mathbf{I}^4.$

12. $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$

En los problemas 13 y 14 resuelva para x y para y.

13. $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ y \end{bmatrix}.$

14. $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & y \end{bmatrix}.$

En los problemas del 15 al 18 reduzca las matrices dadas.

15. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$

16. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$

17. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$

18. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

En los problemas del 19 al 22 resuelva cada uno de los sistemas por el método de reducción.

19. $\begin{cases} 2x - 5y = 0, \\ 4x + 3y = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - y + 2z = 3, \\ 3x + y + z = 5. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + y + 2z = 1, \\ 3x - 2y - 4z = -7, \\ 2x - y - 2z = 2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x + z + 3 = 0. \end{cases}$

En los problemas del 23 al 26 encuentre las inversas de las matrices.

23. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$

24. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

25. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$

26. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$

En los problemas 27 y 28 resuelva el sistema dado utilizando la inversa de la matriz de coeficientes.

27. $\begin{cases} 3x + y + 4z = 1, \\ x + z = 0, \\ 2y + z = 2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 3x + z = 0, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$

En los problemas del 29 al 34 evalúe los determinantes.

29. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}.$

30. $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}.$

31. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

32. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

33. $\begin{vmatrix} r & p & q & a \\ 0 & i & j & m \\ 0 & 0 & c & n \\ 0 & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$.

34. $\begin{vmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ a & r & 0 & 0 \\ p & j & n & 0 \\ s & k & t & i \end{vmatrix}$.

Resuelva los sistemas de los problemas 35 y 36 utilizando la regla de Cramer.

35. $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ 2x + 3y = 8. \end{cases}$

36. $\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ y + 4z = 0, \\ x + 2y + 2z = 0. \end{cases}$

---

37. Dado que $|\mathbf{A}| = -2$, $|\mathbf{B}| = 4$ y $|\mathbf{A}^{-1}| = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$, encuentre $|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}|$.

38. Construya la matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3\times 3}$ si $a_{ij} = |i - j|$.

39. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Encuentre las matrices $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^{-1}$, y $\mathbf{A}^{2000}$.

40. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, demuestre que $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

41. Suponga que a, b y c son constantes diferentes de cero. Utilice la regla de Cramer para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + cz = a, \\ bx + by = b, \\ ax + ay + cz = c. \end{cases}$$

42. Demuestre que la regla de Cramer puede utilizarse para resolver el siguiente sistema, y después use esto para encontrar el valor de x que satisface el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + 2w + 1 = z, \\ 2w + z = 2x + 4y + 1, \\ x + 2y + 3z + 3w - 3 = 0, \\ 2x + 7y + 6z + 2w = 6. \end{cases}$$

43. Un consumidor desea completar su consumo vitamínico en *exactamente* 13 unidades de vitamina A, 22 de vitamina B y 31 de vitamina C por semana. Hay disponibles tres marcas de cápsulas vitamínicas. La marca I contiene 1 unidad de cada una de las vitaminas A, B y C por cápsula; la marca II contiene 1 unidad de vitamina A, 2 de B y 3 de C, y la marca III contiene 4 unidades de A, 7 de B y 10 de C.

a. ¿Cuál combinación de cápsulas de las marcas I, II y III producirá *exactamente* las cantidades deseadas?

b. Si las cápsulas de la marca I, cuestan 5 centavos cada una, de la marca II, 7 centavos cada una y de la marca III, 20 centavos cada una, ¿cuál combinación minimizará su costo semanal?

44. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz invertible de $n \times n$.

a. Demuestre que $\mathbf{A}^3$ es invertible.

b. Si $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son matrices de $n \times n$ tales que $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, demuestre que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

c. Si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ (decimos que $\mathbf{A}$ es *idempotente*), encuentre $\mathbf{A}$.

45. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$ encuentre $3\mathbf{AB} - 4\mathbf{B}^2$.

46. Utilizando la inversa de la matriz de coeficientes, resuelva el sistema

$$\begin{cases} 9.7x - 3.4y + 7.2z = 19.1, \\ 4.3x + 8.5y - 6.7z = 20.8, \\ 5.4x - 2.6y - 4.7z = 30.9, \end{cases}$$

Redondee su respuesta a dos decimales.

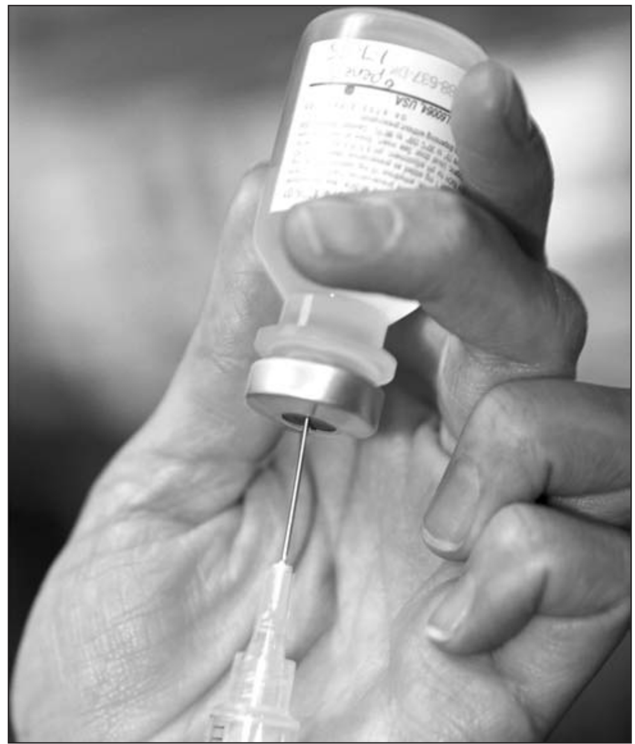
47. Dada la siguiente matriz de insumo-producto,

	Industria A	Industria B	Demanda final
Industria: A	10	20	4
B	15	14	10
Otros	9	5	—

encuentre la matriz de producción, si la demanda final cambia a 8 para A y 8 para B (los datos están en miles de millones de dólares).

Aplicación práctica

Requerimientos de insulina como un proceso lineal[7]



Una posada vacacional en las montañas del estado de Washington tiene una bien merecida reputación por la atención que brinda a las necesidades especiales de salud de sus huéspedes. La semana siguiente el administrador de la posada espera recibir cuatro huéspedes diabéticos dependientes de insulina.

Estos huéspedes planean permanecer en la posada durante 7, 14, 21 y 28 días, respectivamente.

La posada se encuentra muy alejada de la farmacia más cercana, de modo que antes de que lleguen los huéspedes, el administrador planea obtener la cantidad total de insulina que se necesitará. Se requieren tres tipos diferentes de insulina: lenta, semilenta y ultralenta. El administrador almacenará la insulina y después el personal de la posada administrará la dosis diaria de los tres tipos a cada uno de los huéspedes.

Los requerimientos diarios de los tres huéspedes son:

Huésped 1 20 unidades de insulina semilenta, 30 de lenta y 10 de ultralenta.
Huésped 2 40 unidades de insulina semilenta, 0 de lenta y 0 de ultralenta.
Huésped 3 30 unidades de insulina semilenta, 10 de lenta y 30 de ultralenta.
Huésped 4 10 unidades de insulina semilenta, 10 de lenta y 50 de ultralenta.

Esta información se representa en la siguiente matriz de "requerimientos" **A:**

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3\times 4}, \qquad \text{donde } \mathbf{A} \text{ está dada por}$$

	Huésped 1	Huésped 2	Huésped 3	Huésped 4
Insulina semilenta	20	40	30	10
Insulina lenta	30	0	10	10
Insulina ultralenta	10	0	30	50

[7]Adaptado de Richard F. Baum, "Insulin Requirements as a Linear Process", en R.M. Thrall, J.A. Mortimer, K.R. Rebman y R.F. Baum, (editores), *Some Mathematical Models in Biology*, ed. rev. Reporte 40241-R-7. Preparado en la Universidad de Michigan, 1967.

Recuerde que el huésped 1 permanecerá 7 días, el 2 estará 14 días, el 3 durante 21 días y el huésped 4 durante 28 días. Puede hacer que el vector columna **T** represente el tiempo, en días, que cada huésped permanecerá en la posada:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \end{bmatrix}.$$

Para determinar las cantidades totales de los tres tipos de insulina necesarios para los cuatro huéspedes, calcule el producto matricial **AT.**

$$\mathbf{AT} = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 30 & 50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$= 10(7)\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= 70\begin{bmatrix} 23 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1610 \\ 700 \\ 2100 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

El vector **B** (o **AT**) indica que un total de 1610 unidades de insulina semilenta, 700 unidades de insulina lenta y 2100 unidades de insulina ultralenta serán requeridas en total por los cuatro huéspedes.

Ahora, cambiemos un poco el problema. Suponga que cada huésped decidió duplicar su tiempo de estan-

cia original. El vector que da la cantidad total de insulina necesaria de los tres tipos es

$$\mathbf{A}(2\mathbf{T}) = 2(\mathbf{AT}) = 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3220 \\ 1400 \\ 4200 \end{bmatrix}.$$

En efecto, si cada huésped planeó extender por un factor k ($k \geq 0$) su tiempo original en la posada (esto es, el huésped 1 planeó permanecer durante $k \cdot 7$ días, el huésped 2 por $k \cdot 14$ días, y así sucesivamente), entonces los requerimientos de insulina serán

$$\mathbf{A}(k\mathbf{T}) = k(\mathbf{AT}) = k\mathbf{B} = \begin{bmatrix} k \cdot 1610 \\ k \cdot 700 \\ k \cdot 2100 \end{bmatrix}.$$

Del mismo modo, si los huéspedes decidieran agregar 1, 3, 4 y 6 días, respectivamente, a los tiempos que originalmente proyectaron permanecer, entonces las cantidades de insulina requeridas serán

$$\mathbf{A}(\mathbf{T} + \mathbf{T}_1) = \mathbf{AT} + \mathbf{AT}_1, \qquad \text{donde } \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Con base en los resultados hasta aquí obtenidos, es obvio que la siguiente ecuación matricial generaliza la situación.

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

o

$$\begin{bmatrix} 20 & 40 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 30 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

que representa al sistema lineal

$$\begin{cases} 20x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 10x_4 = b_1, \\ 30x_1 \qquad\qquad + 10x_3 + 10x_4 = b_2, \\ 10x_1 \qquad\qquad + 30x_3 + 50x_4 = b_3, \end{cases}$$

donde x_1 es el número de días que el huésped i permanece en la posada, y b_1, b_2 y b_3 dan, respectivamente, el número total de unidades de insulina semilenta, lenta y ultralenta necesarias para los cuatro huéspedes durante su estancia completa en la posada.

Por último, suponga una vez más que el vector **T** representa el número de días que cada huésped planeó permanecer originalmente en la posada. Además, suponga que el vector **C** proporciona el costo (en centavos) por unidad de insulina de los tres tipos, donde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \text{matriz de costo.}$$

Esto es, una unidad de insulina semilenta cuesta 9 centavos, una unidad de lenta cuesta 8 centavos y una unidad de ultralenta cuesta 10 centavos. Entonces la cantidad total pagada por la posada por toda la insulina para los cuatro huéspedes es

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{AT}) = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = [9 \quad 8 \quad 10] \begin{bmatrix} 1610 \\ 700 \\ 2100 \end{bmatrix} = [41{,}090],$$

esto es, 41,090 centavos o \$410.90.

Ejercicios

1. Suponga que el huésped 1 permanecerá en la posada por 7 días, el huésped 2 durante 10 días, el huésped 3 por 7 días y el huésped 4 por 5 días. Suponga que los requerimientos diarios de los cuatro y la matriz de costo son los mismos que los dados en el estudio anterior. Encuentre la cantidad total que la posada debe pagar por toda la insulina necesaria para los huéspedes.
2. Suponga que los requerimientos de insulina de los cuatro huéspedes ascienden a 1180 unidades de insulina semilenta, 580 de lenta y 1500 de ultralenta. Suponga que los requerimientos diarios para los cuatro huéspedes son los mismos que en el análisis. Utilizando el método de la matriz inversa en una calculadora gráfica, determine la duración de la estancia de cada huésped, si el número total de días para los cuatro huéspedes es de 52.
3. Suponga que los requerimientos diarios de los cuatro huéspedes y la matriz de costo son los mismos que los dados en el análisis. Dada solamente la cantidad total (en dólares), ¿es posible que la posada deba pagar por toda la insulina requerida, para determinar la duración de estancia de cada huésped? ¿Por qué sí o por qué no?



CAPÍTULO 7

Programación lineal

El término "programación lineal" suena como algo que implica la escritura de un código para una computadora. Pero aunque la programación lineal con frecuencia se realiza en computadoras, la parte de "programación" del nombre en realidad viene de la terminología militar de la era de la Segunda Guerra Mundial, en la cual el entrenamiento, el abastecimiento y los planes de despliegue de unidades eran llamados programas. Cada programa era, hablando de manera formal, una solución a un problema de asignación de recursos.

Por ejemplo, suponga que las unidades militares en un frente de combate necesitaban combustible diesel. Cada unidad tiene un cierto número de tanques, camiones y otros vehículos; cada unidad utiliza sus vehículos para realizar una misión asignada, y cada misión de la unidad tiene alguna relación con la meta global de ganar la campaña. ¿Qué programa de distribución de combustible contribuirá mejor a la victoria global?

La resolución de este problema requiere la cuantificación de sus diferentes elementos. Contar el número de galones de combustible y el número de cada tipo de vehículos es fácil, así como lo es la traducción de galones de combustible en millas que un vehículo puede recorrer. La cuantificación de la relación entre millas de vehículo y unidades de misión realizadas incluye la identificación de restricciones: el máximo de galones por carga que un camión tanque puede llevar, el número mínimo de millas que cada unidad debe recorrer para alcanzar su objetivo de combate, y así sucesivamente. Factores cuantitativos adicionales incluyen probabilidades, como las oportunidades que una unidad tiene de ganar un combate clave si realiza maniobras a lo largo de una ruta en un camino en lugar de otra.

La cuantificación de problemas complicados de la vida cotidiana con este enfoque es de la competencia de la llamada investigación de operaciones. La programación lineal, una de las más viejas y aún una de las más importantes herramientas de la investigación de operaciones, se utiliza cuando un problema se puede describir utilizando ecuaciones y desigualdades que son todas lineales.

OBJETIVO Representar en forma geométrica la solución de una desigualdad lineal con dos variables y ampliar esta representación a un sistema de desigualdades lineales.

7.1 Desigualdades lineales con dos variables

Suponga que un consumidor recibe un ingreso fijo de \$60 semanales que utiliza en la compra de los productos A y B. Si x kilogramos de A cuestan \$2 por kilogramo y y kilogramos de B cuestan \$3 por kilogramo, entonces

$$2x + 3y = 60, \quad \text{donde} \quad x, y \geq 0.$$

Las soluciones de esta ecuación, llamada *ecuación de presupuesto*, dan las posibles combinaciones de A y B que pueden comprarse con \$60. La gráfica de esta ecuación es la *recta de presupuesto* de la figura 7.1. Observe que (15, 10) pertenece a la recta. Esto significa que si se compran 15 kg de A, entonces deben comprarse 10 kg de B para tener un costo total de \$60.

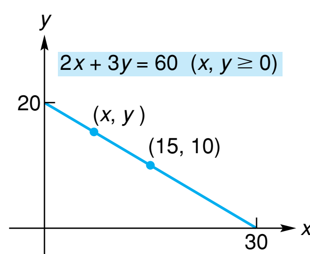


FIGURA 7.1 Recta de presupuesto.

Por otro lado, suponga que el consumidor no necesariamente desea gastar todos los \$60. En este caso, las posibles combinaciones están descritas por la desigualdad

$$2x + 3y \leq 60, \quad \text{donde} \quad x, y \geq 0. \tag{1}$$

Cuando se estudiaron las desigualdades con una variable en el capítulo 2, su solución se representó geométricamente por *intervalos* sobre la recta de números reales. Sin embargo, para una desigualdad con dos variables, como en la desigualdad (1), la solución por lo regular está representada por una *región* en el plano coordenado. Encontraremos la región correspondiente a la desigualdad (1) después de considerar a las desigualdades en general.

Definición

Una ***desigualdad lineal*** con dos variables x y y puede escribirse en la forma

$$ax + by + c < 0 \quad (o \leq 0, \ \geq 0, \ > 0),$$

donde a, b y c son constantes y a y b no son ambas cero.

En forma geométrica, la solución (o gráfica) de una desigualdad lineal en x y y consiste en todos los puntos (x, y) en el plano, cuyas coordenadas satisfacen dicha desigualdad. Por ejemplo, una solución de $x + 3y < 20$ es el punto $(-2, 4)$, ya que la sustitución da

$$-2 + 3(4) < 20,$$

$$10 < 20, \quad \text{la cual es verdadera.}$$

Es claro que existe un número infinito de soluciones, esto es común para toda desigualdad lineal.

Para considerar a las desigualdades lineales en general, primero notemos que la gráfica de una recta no vertical $y = mx + b$, separa al plano en tres partes distintas (véase la fig. 7.2):

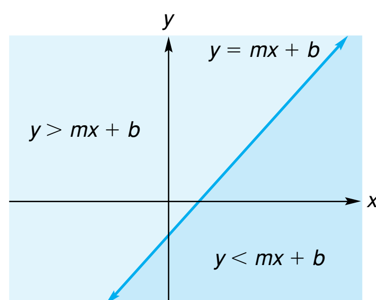


FIGURA 7.2 Una recta no vertical determina dos semiplanos.

1. La recta misma, que consiste en todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y = mx + b$.
2. La región *por encima* de la recta, que consiste en todos los puntos (x, y), cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad $y > mx + b$ (esta región se conoce como un **semiplano** *abierto*).
3. El semiplano abierto *por debajo* de la recta, que consiste en todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad $y < mx + b$.

En la situación donde la desigualdad estricta "<" es reemplazada por "≤", la solución de $y \leq mx + b$ consiste en la recta $y = mx + b$ así como el semiplano por debajo de ella. En este caso decimos que la solución es el semiplano *cerrado*. Se puede hacer una afirmación semejante cuando ">" se reemplaza por "≥". Para una recta vertical $x = a$ (véase la fig. 7.3), hablamos de un semiplano

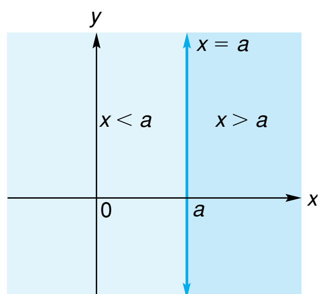


FIGURA 7.3 Una recta vertical determina dos semiplanos.

a la derecha ($x > a$) de la recta o a la izquierda ($x < a$). Como cualquier desigualdad lineal (con dos variables) puede expresarse en una de las formas que hemos estudiado, podemos decir que *la solución de una desigualdad lineal debe ser un semiplano*.

Para aplicar estos hechos resolveremos la desigualdad lineal

$$2x + y < 5.$$

De nuestro estudio anterior sabemos que la solución es un semiplano. Para encontrarlo empezamos reemplazando el símbolo de desigualdad por un signo de igualdad y después graficamos la *recta* resultante, $2x + y = 5$. Esto es fácil de hacer seleccionando dos puntos sobre la recta, por ejemplo, las intersecciones $(\frac{5}{2}, 0)$ y (0,5). [Véase la fig. 7.4.] Puesto que los puntos sobre la recta no satisfacen la desigualdad "<", utilizamos una línea *punteada* para indicar que la recta no es parte de la solución. Ahora debemos determinar si la solución es el semiplano *por encima* de la recta o el semiplano *por debajo* de la recta. Esto puede hacerse resolviendo la desigualdad para y. Una vez que y esté aislada, el semiplano apropiado será evidente. Tenemos que

$$y < 5 - 2x.$$

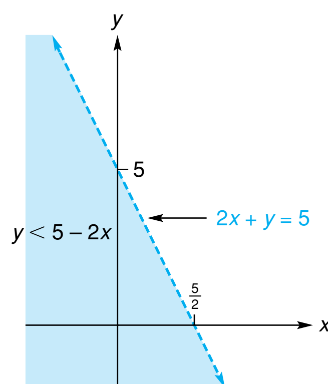


FIGURA 7.4 Gráfica de $2x + y < 5$.

En forma geométrica, la solución de una desigualdad lineal con dos variables es una *región* en el plano, no un intervalo en la recta de números reales.

Del enunciado (3) anterior, concluimos que la solución consiste en todo el semiplano *por debajo* de la recta. Parte de esta región está sombreada en la figura 7.4. Así, cuando (x_0, y_0) es *cualquier* punto en esta región, su ordenada y_0 es menor que el número $5 - 2x_0$ (véase la fig. 7.5). Por ejemplo, $(-2, -1)$ está en la región y

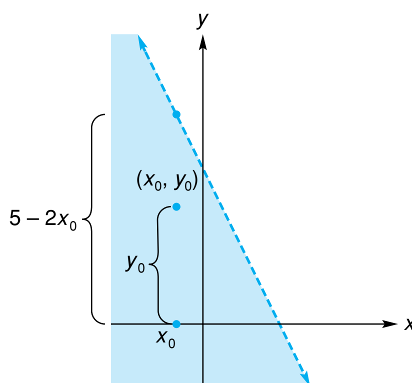


FIGURA 7.5 Análisis de un punto que satisface $y < 5 - 2x$.

$$-1 < 5 - 2(-2),$$

$$-1 < 9.$$

Si, por ejemplo, la desigualdad original hubiera sido $y \leq 5 - 2x$, entonces la recta $y = 5 - 2x$ también se habría incluido en la solución. Indicaríamos esto utilizando una línea continua en lugar de una línea punteada. Esta solución, que es un semiplano cerrado, se muestra en la figura 7.6. Recuerde que **una recta continua *está* incluida en la solución mientras que una recta punteada *no lo está*.**

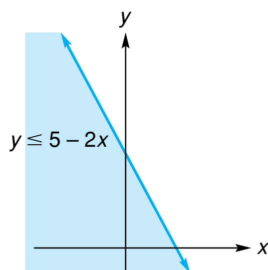


FIGURA 7.6 Gráfica de $y \leq 5 - 2x$.

EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad lineal

Encontrar la región definida por la desigualdad $y \leq 5$.

Solución: ya que x no aparece, la desigualdad se supone que es verdadera para todos los valores de x. La región consiste en la recta $y = 5$ junto con el semiplano por debajo de ella (véase la fig. 7.7).

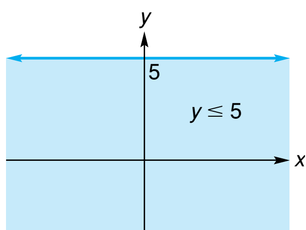


FIGURA 7.7 Gráfica de $y \leq 5$.

EJEMPLO 2 Solución de una desigualdad lineal

Resolver la desigualdad $2(2x - y) < 2(x + y) - 4$.

Solución: primero resolvemos la desigualdad para y de modo que el semiplano apropiado sea obvio. La desigualdad es equivalente a

$$4x - 2y < 2x + 2y - 4,$$

$$4x - 4y < 2x - 4,$$

$$-4y < -2x - 4,$$

$$y > \frac{x}{2} + 1$$ (dividiendo ambos miembros entre −4 e invirtiendo el sentido).

Mediante una recta punteada ahora hacemos el bosquejo de $y = (x/2) + 1$, notando que sus intersecciones son $(0, 1)$ y $(-2, 0)$. Puesto que el símbolo de la desigualdad es $>$, sombreamos el semiplano por arriba de la recta (véase la fig. 7.8). Cada punto en esta región es una solución.

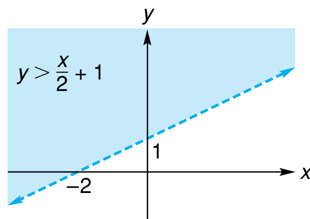


FIGURA 7.8 Gráfica de $y > \frac{x}{2} + 1$.

Principios en práctica 1
Solución de una desigualdad lineal

Para conseguir dinero extra, usted fabrica dos tipos de imanes para refrigeradores, tipo A y tipo B. Usted tiene una gasto de arranque de \$50. El costo de producción para los de tipo A es de \$0.90 por imán y el costo de producción para el tipo B es de \$0.70 por imán. El precio del tipo A es de \$2.00 por imán y el precio del imán tipo B es de \$1.50. Sea x el número de imanes de tipo A y y el número de tipo B que se producen y venden. Escriba una desigualdad que describa que el ingreso es mayor que el costo. Resuelva la desigualdad y describa la región. También describa qué significa este resultado en términos de imanes.

Sistemas de desigualdades

La solución de un *sistema* de desigualdades consiste en todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen de manera simultánea todas las desigualdades dadas. En forma geométrica, es la región común para todas las regiones determinadas por las desigualdades dadas. Por ejemplo, resolvamos el sistema

$$\begin{cases} 2x + y > 3, \\ x \geq y, \\ 2y - 1 > 0. \end{cases}$$

Primero escribimos de nuevo cada desigualdad de modo que y esté aislada. Esto da el sistema equivalente

$$\begin{cases} y > -2x + 3, \\ y \leq x, \\ y > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ahora hacemos el bosquejo de las rectas correspondientes $y = -2x + 3$, $y = x$ y $y = \frac{1}{2}$. Observamos que la primera y tercera desigualdades definen semiplanos *abiertos*, pero la segunda define un semiplano *cerrado*, entonces sombreamos la región que de manera simultánea está por encima de la primera recta, sobre y por debajo de la segunda recta y, al mismo tiempo, por encima de la tercera recta (véase la fig. 7.9). Cuando se está haciendo el bosquejo de las rectas, **es mejor dibujar siempre rectas punteadas hasta que sea claro cuáles partes estarán incluidas en la solución.**

EL punto en donde las gráficas de $y = x$ y $y = -2x + 3$ se intersecan no está incluido en la solución.

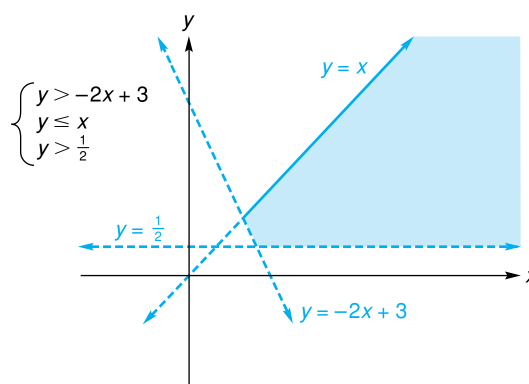


FIGURA 7.9 Solución de un sistema de desigualdades lineales.

Principios en práctica 2
Solución de un sistema de desigualdades lineales

Un almacén vende dos tipos de cámaras. Para cubrir los gastos generales, debe vender al menos 50 cámaras por semana, y para satisfacer los requerimientos de la distribución debe vender al menos el doble de tipo I que de tipo II. Escriba un sistema de desigualdades para describir la situación. Sea x el número de cámaras de tipo I que el almacén vende en una semana y y el número de cámaras de tipo II que vende en una semana. Determine la región descrita por el sistema lineal de desigualdades.

EJEMPLO 3 Solución de un sistema de desigualdades lineales

Resolver el sistema

$$\begin{cases} y \geq -2x + 10, \\ y \geq x - 2. \end{cases}$$

Solución: la solución consiste en todos los puntos que están simultáneamente sobre o por encima de la recta $y = -2x + 10$, y sobre o por encima de la recta $y = x - 2$. Es la región sombreada en la figura 7.10.

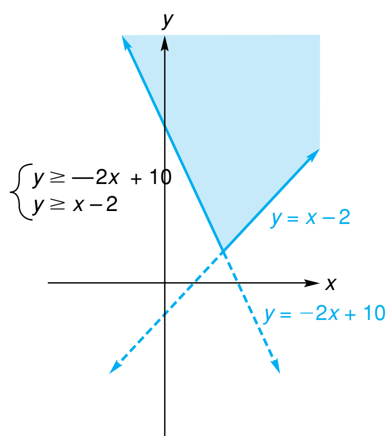


FIGURA 7.10 Solución de un sistema de desigualdades lineales.

EJEMPLO 4 Solución de un sistema de desigualdades lineales

Encontrar la región descrita por

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 60, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Solución: este sistema se relaciona con la desigualdad (1) del inicio de esta sección. La primera desigualdad es equivalente a $y \leq -\frac{2}{3}x + 20$. Las últimas dos desigualdades restringen la solución a los puntos que están sobre o a la derecha del eje y, y *al mismo tiempo*, sobre o por encima del eje x. La región deseada está sombreada en la figura 7.11.

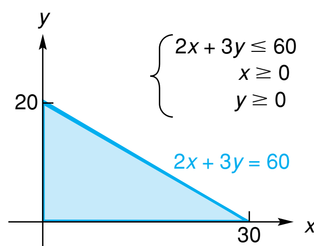


FIGURA 7.11 Solución de un sistema de desigualdades lineales.

Ejercicio 7.1

En los problemas del 1 al 24 resuelva las desigualdades.

1. $2x + 3y > 6$.

2. $3x - 2y \geq 12$.

3. $x + 2y \leq 7$.

4. $y > 6 - 2x$.

5. $-x \leq 2y - 4$.

6. $2x + y \geq 10$.

7. $3x + y < 0$.

8. $x + 5y < -5$.

9. $\begin{cases} 3x - 2y < 6, \\ x - 3y > 9. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x + 3y > -6, \\ 3x - y < 6. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x + 3y \leq 6, \\ x \geq 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2y - 3x < 6, \\ x < 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} y - 3x < 6, \\ x - y > -3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x - y < 1, \\ y - x < 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x - 2 \geq y, \\ 2x \leq 3 - 2y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2y < 4x + 2, \\ y < 2x + 1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - y > 4, \\ x < 2, \\ y > -5. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x + y < -1, \\ y > -x, \\ 2x + 6 < 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} y < 2x + 4, \\ x \geq -2, \\ y < 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x + 3y \geq 12, \\ y \geq x, \\ 2y \leq 3x + 6. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + y > 1, \\ 3x - 5 \leq y, \\ y < 2x. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x - 3y > -12, \\ 3x + y > -6, \\ y > x. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x + y > -6, \\ x - y > -5, \\ x \geq 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 5y - 2x \leq 10, \\ 4x - 6y \leq 12, \\ y \geq 0. \end{cases}$

Si un consumidor no quiere gastar más de P dólares en la compra de las cantidades x y y de dos productos que tienen precios p_1 y p_2 dólares por unidad, respectivamente, entonces $p_1x + p_2y \leq P$, en donde $x, y \geq 0$. En los problemas 25 y 26, encuentre geométricamente las posibles combinaciones de dichas compras determinando la solución de este sistema para los valores dados de p_1, p_2 y P.

25. $p_1 = 5, p_2 = 3, P = 15$.

26. $p_1 = 6, p_2 = 4, P = 24$.

27. Si un fabricante desea comprar un *total* de no más de 100 libras de producto Z de los proveedores A y B, establezca un sistema de desigualdades que describa las combinaciones posibles de las cantidades que pueden comprarse a cada proveedor. Haga el bosquejo de la solución en el plano.

28. Fabricación La compañía XYZ produce dos modelos de computadoras caseras: el modelo Alfa y el modelo Beta. Sea x el número de modelos Alfa y y el número de modelos Beta producidos a la semana en la fábrica de San Antonio. Si la fábrica puede producir semanalmente a lo más 650 modelos Alfa y Beta en forma

combinada, escriba las desigualdades que describen esta situación.

29. **Fabricación** Una compañía de sillas produce dos modelos de sillas. El modelo Secuoya toma 3 horas de trabajo para ensamblarlo y $\frac{1}{2}$ hora de trabajo para pintarlo. El modelo Saratoga toma 2 horas de trabajo para ensamblarlo y 1 hora de trabajo para pintarlo. El número máximo de horas de trabajo disponibles para ensamblar sillas es de 240 por día, y el número máximo de horas de trabajo disponibles para pintar sillas es de 80 diarias. Escriba un sistema de desigualdades lineales para describir la situación. Sea x el número de modelos Secuoya producidos en un día y y el número de modelos Saratoga producidos en un día. Determine la región descrita por este sistema de desigualdades lineales.

OBJETIVO Establecer la naturaleza de un problema de programación lineal, introducir la terminología asociada con él y resolverlo geométricamente.

7.2 Programación lineal

Algunas veces se desea maximizar o minimizar una función sujeta a algunas limitaciones (o *restricciones*). Por ejemplo, un fabricante puede querer maximizar una función de utilidad sujeta a las restricciones de producción, que imponen las limitaciones sobre el uso de la maquinaria y la mano de obra.

Ahora consideraremos cómo resolver tales problemas cuando la función que será maximizada o minimizada es *lineal*. Una **función lineal en *x* y *y*** tiene la forma

$$Z = ax + by,$$

donde a y b son constantes. También requeriremos que las correspondientes restricciones estén representadas por un sistema de desigualdades lineales (que incluyan "≤" o "≥") o ecuaciones lineales en x y y, además de que todas las variables sean no negativas. Un problema que involucra todas estas condiciones se llama *problema de programación lineal*.

La programación lineal fue desarrollada por George B. Dantzig al final de la década de l940, y la Fuerza Aérea de Estados Unidos fue quien la utilizó primero, esto como una ayuda en la toma de decisiones. Actualmente tiene una amplia aplicación en los análisis industrial y económico.

En el estudio de la programación lineal se utiliza una gran cantidad de terminología, por lo que se recomienda aprenderla conforme se introduce.

En un problema de programación lineal, la función por maximizar o minimizar se llama **función objetivo.** Aunque por lo regular existe un número infinito de soluciones para el sistema de restricciones (llamadas **soluciones factibles** o **puntos factibles**), la meta es encontrar una que sea una **solución óptima** (esto es, una que dé el valor máximo o mínimo de la función objetivo).

Ahora daremos un enfoque geométrico de la programación lineal. En la sección 7.4 se presentará un enfoque matricial que nos permitirá trabajar con más de dos variables y, por tanto, con una mayor variedad de problemas.

Consideremos el problema siguiente. Una compañía produce dos tipos de artículos, manuales y eléctricos. Cada uno requiere para su fabricación del uso de tres máquina, A, B y C. La tabla 7.1 da la información relacionada con la fabricación de estos artículos. Cada artículo manual requiere del uso de la máquina A durante 2 horas, de la máquina B por 1 hora y de la máquina C otra hora. Un artículo eléctrico requiere 1 hora de la máquina A, 2 horas de la B y 1 hora de la C. Además, supongamos que el número máximo de horas disponibles por mes para el uso de las máquinas A, B y C es de 180, 160 y 100, respectivamente. La utilidad por cada artículo manual es de \$4 y por cada artículo eléctrico es de \$6. Si la compañía vende todos los artículos que puede producir, ¿cuántos artículos de cada tipo debe producir con el fin de maximizar la utilidad mensual?

Para resolver el problema, establezcamos que x y y son el número de artículos manuales y eléctricos, respectivamente, fabricados en un mes. Ya que el número de artículos producidos no es negativo,

$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0.$$

TABLA 7.1

	A	B	C	Utilidad/unidad
Manual	2 hr	1 hr	1 hr	$4
Eléctrico	1 hr	2 hr	1 hr	6
Horas disponibles	180	160	100	

Para la máquina A, el tiempo necesario para trabajar sobre x artículos manuales es $2x$ horas y el tiempo para trabajar sobre y artículos eléctricos es $1y$ horas. La suma de estos tiempos no puede ser mayor que 180, de modo que

$$2x + y \leq 180.$$

De manera semejante, las restricciones para las máquinas B y C dan

$$x + 2y \leq 160 \quad \text{y} \quad x + y \leq 100.$$

La utilidad P es una función de x y y, y está dada por la *función de utilidad*

$$P = 4x + 6y.$$

En resumen, queremos maximizar la *función objetivo*

$$P = 4x + 6y, \tag{1}$$

sujeta a las condiciones de que x y y deben ser soluciones del sistema de restricciones

$$\begin{cases} x \geq 0, & (2) \\ y \geq 0, & (3) \\ 2x + y \leq 180, & (4) \\ x + 2y \leq 160, & (5) \\ x + y \leq 100. & (6) \end{cases}$$

Por tanto, tenemos un problema de programación lineal. Las restricciones (2) y (3) se llaman **condiciones de no negatividad.** La región que satisface de manera simultánea las restricciones de la (2) a la (6) está sombreada en la figura 7.12. Cada punto en esta región representa una solución factible, y dicha región se llama **región factible.** Aunque existe un número infinito de soluciones factibles, debemos encontrar una que maximice la función de utilidad.

Ya que la función objetivo, $P = 4x + 6y$, es equivalente a

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{P}{6},$$

define una familia de rectas paralelas, cada una con pendiente de $-2/3$ e intersección y $(0, P/6)$. Por ejemplo, si $P = 600$, entonces obtenemos la recta

$$y = -\frac{2}{3}x + 100$$

que se muestra en la figura 7.13. Esta recta, llamada de **isoutilidad** (isoganancia), da todas las combinaciones posibles de x y y con las que se obtiene la misma utilidad, $600. Observe que esta línea de isoutilidad no tiene puntos en común con la región factible, mientras que la línea de isoutilidad para $P = 300$ tiene un número infinito de puntos en común con la región factible. Busquemos un miembro de la familia que tenga un punto factible y cuyo valor de P sea máximo.

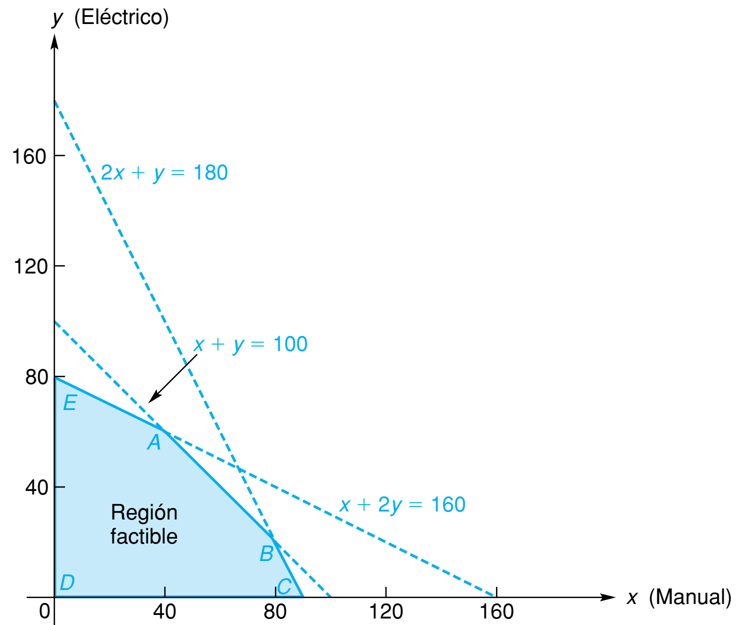


FIGURA 7.12 Región factible.

Éste será la recta cuya intersección y sea la más lejana del origen (esto da un valor máximo de P), y que al mismo tiempo tenga al menos un punto en común con la región factible. No es difícil observar que tal recta contendrá al vértice *(punto extremo, esquina) A*. Cualquier recta de isoutilidad con una utilidad mayor no contendrá puntos de la región factible.

A partir de la figura 7.12 vemos que A pertenece a las rectas $x + y = 100$ y $x + 2y = 160$. Sus coordenadas pueden hallarse resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x + y = 100, \\ x + 2y = 160. \end{cases}$$

Esto da $x = 40$ y $y = 60$. Sustituyendo estos valores en $P = 4x + 6y$, encontramos que la utilidad máxima sujeta a las restricciones es de \$520, que se obtiene al producir 40 artículos manuales y 60 eléctricos cada mes.

Si una región factible puede estar contenida dentro de un círculo, como la de la figura 7.13, se denomina entonces **región factible acotada.** De otra manera es **no acotada.** Cuando una región factible contiene al menos un punto, se dice que es **no vacía;** en caso contrario es **vacía.** Así, la región de la figura 7.13 es una región factible acotada no vacía.

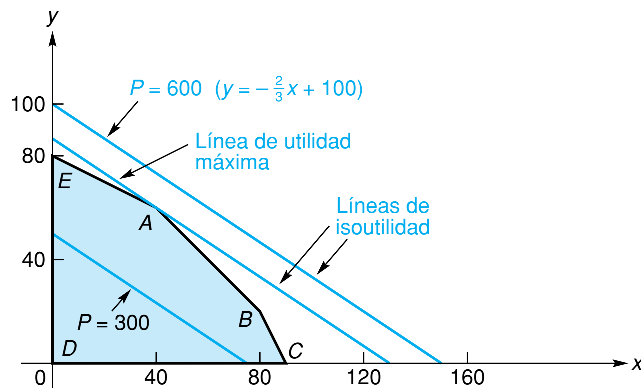


FIGURA 7.13 Líneas de isoutilidad y región factible.

Puede demostrarse que:

> Una función lineal definida sobre una región factible acotada no vacía, tiene un valor máximo (mínimo) que puede hallarse en un vértice (punto extremo, esquina).

Este enunciado nos da una forma de encontrar una solución óptima sin dibujar las rectas de isoutilidad como lo hicimos antes. Basta con evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible, y después seleccionar un vértice en el que la función sea óptima.

Por ejemplo, en la figura 7.13 los vértices son A, B, C, D y E. Encontramos como antes, que A es $(40, 60)$. Para encontrar B, de la figura 7.12 advertimos que debemos resolver de manera simultánea $2x + y = 180$ y $x + y = 100$. Esto da el punto $B = (80, 20)$. De manera similar obtenemos todos los vértices:

$$A = (40, 60), \qquad B = (80, 20), \qquad C = (90, 0),$$
$$D = (0, 0), \qquad E = (0, 80).$$

Ahora evaluamos la función objetivo $P = 4x + 6y$ en cada uno de los puntos:

$$P(A) = 4(40) + 6(60) = 520,$$
$$P(B) = 4(80) + 6(20) = 440,$$
$$P(C) = 4(90) + 6(0) = 360,$$
$$P(D) = 4(0) + 6(0) = 0,$$
$$P(E) = 4(0) + 6(80) = 480.$$

Así, P tiene un valor máximo de 520 en A, donde $x = 40$ y $y = 60$.

La solución óptima para un problema de programación lineal está dada por el valor óptimo de la función objetivo y el punto donde ocurre dicho valor.

EJEMPLO 1 Solución de un problema de programación lineal

Maximizar la función objetivo $Z = 3x + y$ *sujeta a las restricciones*

$$2x + y \leq 8,$$
$$2x + 3y \leq 12,$$
$$x \geq 0,$$
$$y \geq 0.$$

Solución: en la figura 7.14 la región factible es no vacía y acotada. Así que Z es máxima en uno de los cuatro vértices. Las coordenadas de A, B y D son evidentes por inspección. Para determinar C resolvemos de manera simultánea las ecuaciones $2x + y = 8$ y $2x + 3y = 12$, que dan $x = 3$, $y = 2$. Así,

$$A = (0, 0), \qquad B = (4, 0), \qquad C = (3, 2), \qquad D = (0, 4).$$

Evaluando Z en estos puntos, obtenemos

$$Z(A) = 3(0) + 0 = 0,$$
$$Z(B) = 3(4) + 0 = 12,$$
$$Z(C) = 3(3) + 2 = 11,$$
$$Z(D) = 3(0) + 4 = 4.$$

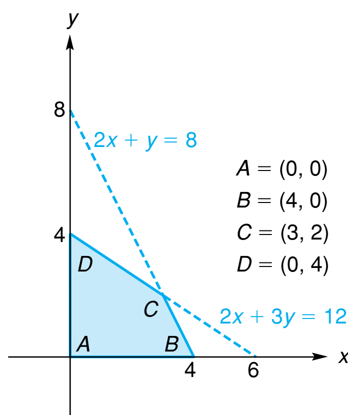


FIGURA 7.14 A, B, C, y D son puntos vértice de la región factible.

De aquí que el valor máximo de Z, sujeto a las restricciones, sea 12 y ocurra cuando $x = 4$ y $y = 0$.

Región factible vacía

El ejemplo siguiente ilustra una situación en la que no existe solución óptima.

EJEMPLO 2 Región factible vacía

Minimizar la función objetivo $Z = 8x - 3y$ *sujeta a las restricciones*

$$\begin{aligned} -x + 3y &= 21, \\ x + y &\leq 5, \\ x &\geq 0, \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Solución: observe que la primera restricción $-x + 3y = 21$ es una *igualdad*. La parte de las rectas $-x + 3y = 21$ y $x + y = 5$ para las cuales $x \geq 0$ y $y \geq 0$ se muestra en la figura 7.15. Permanecerán como líneas punteadas hasta que determinemos si están o no incluidas en la región factible. Un punto factible (x, y) debe tener $x \geq 0, y \geq 0$ y estar sobre la recta superior punteada y sobre o por debajo de la recta inferior (ya que $y \leq 5 - x$). Sin embargo, no existen tales puntos. De aquí que la región factible sea *vacía* y, por tanto, este problema *no* tenga solución óptima.

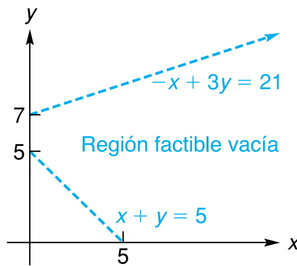


FIGURA 7.15 Región factible vacía.

La situación del ejemplo 2 puede hacerse más general:

> Siempre que la región factible de un problema de programación lineal sea vacía, no existe solución óptima.

Región factible no acotada

Suponga que la región factible está definida por

$$y = 2, \qquad x \geq 0, \qquad \text{y} \qquad y \geq 0.$$

Esta región es la parte de la recta horizontal $y = 2$ indicada en la figura 7.16. Como la región no puede estar contenida dentro de un círculo, es *no acotada*. Consideremos maximizar

$$Z = x + y,$$

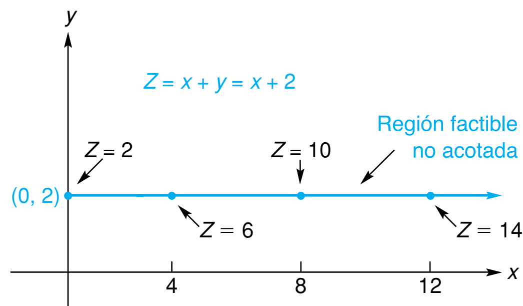


FIGURA 7.16 Región factible no acotada en la que Z no tiene máximo.

sujeta a las restricciones anteriores. Ya que $y = 2$, entonces $Z = x + 2$. Es claro que cuando x aumenta sin límite, también lo hace Z. Por tanto, ningún punto factible maximiza Z, de modo que no existe solución óptima. En este caso decimos que la solución es "no acotada". Por otra parte, suponga que queremos *minimizar* $Z = x + y$ sobre la misma región. Como $Z = x + 2$, será mínima cuando x sea lo más pequeña posible, esto es, cuando $x = 0$. El valor mínimo de $Z = x + y = 0 + 2 = 2$, y la solución óptima es el vértice $(0, 2)$.

En general, puede demostrarse que:

> Si una región factible es no acotada, y si la función objetivo tiene un valor máximo (o mínimo), entonces el valor ocurre en un vértice.

EJEMPLO 3 Región factible no acotada

Un agricultor va a comprar fertilizante que contienen tres nutrientes: A, B y C. Los mínimos necesarios son 160 *unidades de A*, 200 *unidades de B y* 80 *unidades de C. Existen dos marcas muy aceptadas de fertilizantes en el mercado. Crece Rápido cuesta* \$8 *una bolsa, contiene* 3 *unidades de A*, 5 *unidades de B y* 1 *unidad de C. Crece Fácil cuesta* \$6 *cada bolsa, y contiene* 2 *unidades de cada nutrimento. Si el cultivador desea minimizar el costo mientras se satisfacen los requerimientos de nutrimentos, ¿cuántas bolsas de cada marca debe comprar? La información se resume como sigue:*

	A	B	C	Costo/bolsa
Crece Rápido	3 unidades	5 unidades	1 unidad	\$8
Crece Fácil	2 unidades	2 unidades	2 unidades	6
Unidades requer.	160	200	80	

Solución: sea x el número de bolsas de Crece Rápido que se comprarán y y el número de bolsas de Crece Fácil que también se comprarán. Entonces, queremos *minimizar* la función de costo

$$C = 8x + 6y \tag{7}$$

sujeta a las restricciones

$$x \geq 0, \tag{8}$$

$$y \geq 0, \tag{9}$$

$$3x + 2y \geq 160, \tag{10}$$

$$5x + 2y \geq 200, \tag{11}$$

$$x + 2y \geq 80. \tag{12}$$

La región factible que satisface las restricciones (8) a (12) está sombreada en la figura 7.17, junto con las *líneas de isocostos* para $C = 400$ y $C = 600$. La región factible es no acotada. El miembro de la familia de rectas $C = 8x + 6y$ que da un costo mínimo, sujeto a las restricciones, interseca a la región factible en el vértice B. Aquí elegimos la línea de isocostos cuya intersección con el

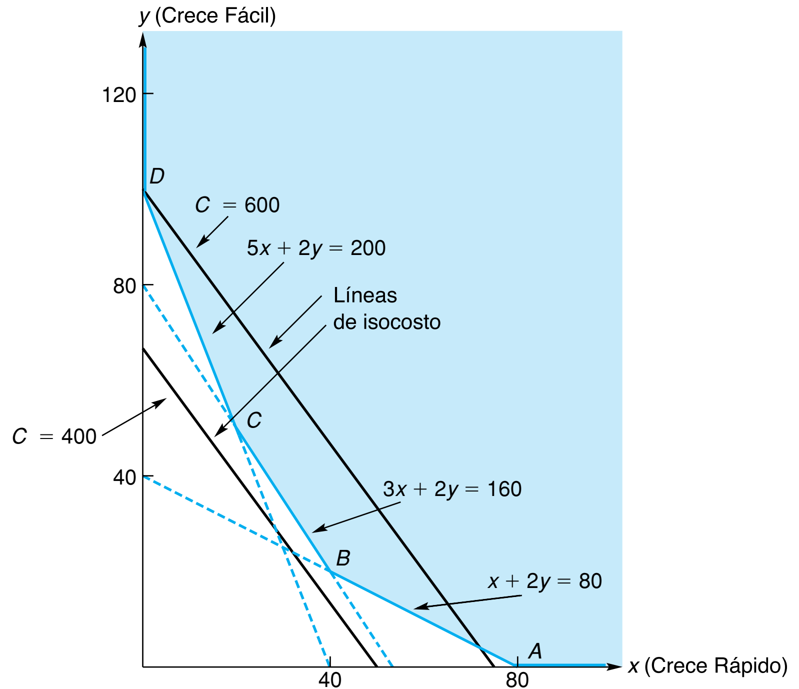


FIGURA 7.17 Costo mínimo en el vértice B de la región factible no acotada.

eje y fue *más cercana* al origen, y que tiene al menos un punto en común con la región factible. Las coordenadas de B se encuentran resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 160, \\ \ \ x + 2y = \ \ 80. \end{cases}$$

Por lo que, $x = 40$ y $y = 20$, dan un costo mínimo de \$440. El agricultor debe comprar 40 bolsas de Crece Rápido y 20 bolsas de Crece Fácil.

En el ejemplo 3 encontramos que la función $C = 8x + 6y$ tiene un valor mínimo en un vértice de la región factible no acotada. Por otra parte, suponga que queremos *maximizar* C en esa región y para ello nos proponemos evaluar C en todos los puntos extremos (vértices). Estos puntos son

$$A = (80, 0), \qquad B = (40, 20), \qquad C = (20, 50), \qquad D = (0, 100),$$

de lo cual obtenemos

$$C(A) = 8(80) + 6(0) = 640,$$
$$C(B) = 8(40) + 6(20) = 440,$$
$$C(C) = 8(20) + 6(50) = 460,$$
$$C(D) = 8(0) + 6(100) = 600.$$

Una conclusión apresurada sería que el valor máximo de C es 640. Esto es *¡falso! No* existe valor máximo, ya que las líneas de isocosto con valores arbitrariamente grandes de C intersecan a la región factible.


Advertencia Cuando se trabaja con una región factible no acotada, no se concluye simplemente que una solución óptima existe en un vértice, ya que podría no tener solución óptima.

Tecnología

Problema: Maximizar $Z = 4.1x - 3.2y$ sujeta a las restricciones

$$y \leq 8 - x, \qquad (13)$$

$$y \leq 6 - 0.2x, \qquad (14)$$

$$y \geq 2 + 0.3x, \qquad (15)$$

y

$$x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Solución: como se muestra en la figura 7.18, ingresamos la función objetivo como Y_1, donde y se ingresa como "alpha Y". Después, se ingresan como Y_2, Y_3, y Y_4 las ecuaciones correspondientes a las restricciones (13) a la (15). Para empezar, la función Y_1 es "desactivada" (esto es, el símbolo "=" no es resaltado) y obtenemos las gráficas de Y_2, Y_3 y Y_4 (véase la fig. 7.19). Es una buena idea hacer un bosquejo a lápiz de las gráficas y marcar las líneas. Del bosquejo, determinamos la región factible y marcamos los vértices. En la figura 7.19, la región factible está sombreada y los vértices son A, B, C y D. Ya que la región factible es no vacía y acotada, el valor máximo de Z ocurrirá en uno de los vértices.

El punto A es la intersección y de Y_4 y con facilidad se encuentra que es $(0, 2)$. El valor de Z en A se encuentra dando el valor 0 a X, 2 a Y y después evaluando Y_1 (véase la fig. 7.20). Así, $Z = -6.4$ en este vértice.

El punto B es la intersección de Y_2 y Y_4. Para encontrar las coordenadas de B primero desactivamos la función Y_3 y resaltamos solamente Y_2 y Y_4. Después desplegamos las gráficas de Y_2 y Y_4, y encontramos su punto de intersección. En la calculadora TI-83 es conveniente utilizar la característica "intersection" (véase la fig. 7.21). Los valores de X y Y en la intersección se almacenan de manera automática en los registros X y Y. Regresando a la pantalla principal, evaluamos Y_1 y obtenemos 8.09 (redondeado a dos decimales). Así, $Z = 8.09$ en el vértice B.

Continuamos de esta manera para encontrar las coordenadas C y D, y evaluamos Y_1 (o Z) allí:

$$C = (2.5, 5.5), \qquad Z = -7.35,$$

$$D = (0, 6), \qquad Z = -19.2.$$

Por lo que el valor máximo de Z es 8.09, que ocurre en el vértice B, donde $x \approx 4.62$ y $y \approx 3.38$.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=4.1X-3.2Y
\Y2=8-X
\Y3=6-.2X
\Y4=2+.3X
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```

FIGURA 7.18 Ingreso de la función objetivo y las ecuaciones correspondientes a las restricciones, y "desactivación" de la función objetivo.

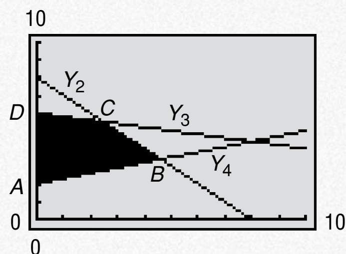


FIGURA 7.19 Determinación de la región factible y marcado de los vértices.

```
0→X
                0
2→Y
                2
Y1
             -6.4
```

FIGURA 7.20 Evaluación de la función objetivo en el vértice $A = (0, 2)$.

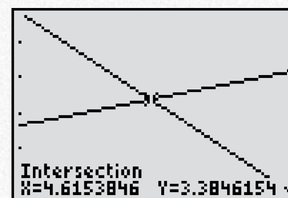


FIGURA 7.21 Determinación del vértice B.

Ejercicio 7.2

1. Maximizar

$$P = 10x + 12y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + y &\leq 60, \\ x - 2y &\geq 0, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

2. Maximizar

$$P = 5x + 6y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + y &\leq 80, \\ 3x + 2y &\leq 220, \\ 2x + 3y &\leq 210, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

3. Maximizar

$$Z = 4x - 6y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y &\leq 7, \\ 3x - y &\leq 3, \\ x + y &\geq 5, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

4. Minimizar

$$Z = x + y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x - y &\geq 0, \\ 4x + 3y &\geq 12, \\ 9x + 11y &\leq 99, \\ x &\leq 8, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

5. Maximizar

$$Z = 4x - 10y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x - 4y &\geq 4, \\ 2x - y &\leq 2, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

6. Minimizar

$$Z = 20x + 30y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 10, \\ 3x + 4y &\leq 24, \\ 8x + 7y &\geq 56, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

7. Minimizar

$$Z = 7x + 3y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x - y &\geq -2, \\ x + y &\leq 9, \\ x - y &= -1, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

8. Maximizar

$$Z = 0.5x - 0.3y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x - y &\geq -2, \\ 2x - y &\leq 4, \\ 2x + y &= 8, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

9. Minimizar

$$C = 2x + y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x + y &\geq 3, \\ 4x + 3y &\geq 6, \\ x + 2y &\geq 2, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

10. Minimizar

$$C = 2x + 2y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 80, \\ 3x + 2y &\geq 160, \\ 5x + 2y &\geq 200, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

11. Maximizar

$$Z = 10x + 2y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 4, \\ x - 2y &\geq 0, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

12. Minimizar

$$Z = y - x,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x &\geq 3, \\ x + 3y &\geq 6, \\ x - 3y &\geq -6, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

13. Producción para utilidad máxima Un fabricante de juguetes prepara un programa de producción para dos nuevos juguetes, muñecas y soldados, con base en la información concerniente a sus tiempos de producción dados en la tabla que sigue:

	Máquina A	Máquina B	Acabado
Muñecas	2 hr	1 hr	1 hr
Soldados	1 hr	1 hr	3 hr

Por ejemplo, cada muñeca requiere de 2 horas en la máquina A. Las horas disponibles empleadas por semana son: para operación de la máquina A, 70 horas; para la B, 40 horas; para acabado, 90 horas. Si las utilidades en cada muñeca y cada soldado son de \$4 y \$6, respectivamente, ¿cuántos juguetes de cada uno debe producir por semana el fabricante con el fin de maximizar la utilidad? ¿Cuál es esta utilidad máxima?

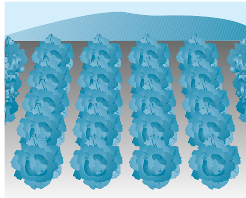
14. Producción para utilidad máxima Un fabricante produce dos tipos de parrillas para asar, Old Smokey y Blaze Away. Para su producción, las parrillas requieren del uso de dos máquinas, A y B. El número de horas necesarias para ambas está indicado en la tabla siguiente:

	Máquina A	Máquina B
Old Smokey	2 hr	4 hr
Blaze Away	4 hr	2 hr

Si cada máquina puede utilizarse 24 horas por día y las utilidades en los modelos son de \$4 y \$6, respectivamente, ¿cuántas parrillas de cada tipo deben producirse por día para obtener una utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?

15. Formulación de dieta Una dieta debe contener al menos 16 unidades de carbohidratos y 20 de proteínas. El alimento A contiene 2 unidades de carbohidratos y 4 de proteínas; el alimento B contiene 2 unidades de carbohidratos y 1 de proteínas. Si el alimento A cuesta \$1.20 por unidad y el B \$0.80 por unidad, ¿cuántas unidades de cada alimento deben comprarse para minimizar el costo? ¿Cuál es el costo mínimo?

16. Nutrientes en fertilizantes Un agricultor comprará fertilizantes que contienen tres nutrientes: A, B y C. Los requerimientos mínimos semanales de éstos son 80 unidades de A, 120 de B y 240 de C. Existen dos mezclas de fertilizantes de gran aceptación en el mercado. La mezcla I cuesta $8 por bolsa, y contiene 2 unidades de A, 6 de B y 4 de C. La mezcla II cuesta $10 por bolsa, con 2 unidades de A, 2 de B y 12 de C. ¿Cuántas bolsas de cada mezcla debe comprar el agricultor para minimizar el costo de satisfacer sus requerimientos de nutrientes?



17. Extracción de minerales Una compañía extrae minerales de una mina. El número de libras de los minerales A y B que pueden extraerse de cada tonelada de la mina I y II se dan en la tabla siguiente, junto con los costos por tonelada de las minas:

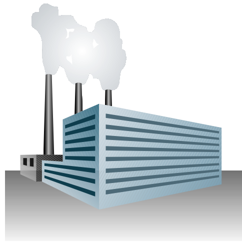
	Mina I	Mina II
Mineral A	100 lb	200 lb
Mineral B	200 lb	50 lb
Costo por tonelada	$50	$60

Si la compañía debe producir al menos 3000 lb de A y 2500 lb de B, ¿cuántas toneladas de cada mina deben procesarse con el objetivo de minimizar el costo? ¿Cuál es el costo mínimo?

18. Programación de producción Una compañía petrolera que tiene dos refinerías necesita al menos 8000, 14,000 y 5000 barriles de petróleo de grados bajo, medio y alto, respectivamente. Cada día, la refinería I produce 2000 barriles de grado bajo, 3000 barriles de grado medio y 1000 barriles de grado alto, mientras que la refinería II produce 1000 barriles de cada uno de los grados alto y bajo, y 2000 barriles de petróleo de grado medio. Si operar la refinería I cuesta $25,000 por día, y operar la refinería II $20,000 diarios, ¿cuántos días debe operarse cada refinería para satisfacer los requerimientos de producción a un costo mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo? (Suponga que existe un costo mínimo.)

19. Costo de construcción Una compañía química está diseñando una planta para producir dos tipos de polímeros, P_1 y P_2. La planta debe tener una capacidad de producción de al menos 100 unidades de P_1 y 420 unidades de P_2 cada día. Existen dos posibles diseños para las cámaras principales de reacción que se incluirán en la planta. Cada cámara de tipo A cuesta $600,000 y es capaz de producir 10 unidades de P_1 y 20 unidades de P_2 por día; el tipo B es un diseño más económico, cuesta $300,000 y es capaz de producir 4 unidades de P_1 y 30 unidades de P_2 por día. A causa de los costos de operación, es necesario tener al menos 4 cámaras de cada tipo en la planta. ¿Cuántas cámaras de cada tipo deben incluirse para minimizar el costo de construcción y satisfacer el programa de producción requerido? (Suponga que existe un costo mínimo.)

20. Control de contaminación A causa de las reglamentaciones federales nuevas sobre la contaminación, una compañía química ha introducido en sus plantas un nuevo y más caro proceso para complementar o reemplazar un proceso anterior para la producción de un producto químico en particular. El proceso anterior descarga 15 gramos de dióxido de azufre y 40 gramos de partículas a la atmósfera por cada litro de producto químico producido. El nuevo proceso descarga 5 gramos de dióxido de azufre y 20 gramos de partículas a la atmósfera por cada litro producido. La compañía obtiene una utilidad de 30 y 20 centavos por litro en los procesos anterior y nuevo, respectivamente. Si el gobierno le permite a la planta descargar no más de 10,500 gramos de dióxido de azufre, y no más de 30,000 gramos de partículas a la atmósfera cada día, ¿cuántos litros de producto químico deben producirse diariamente, por cada uno de los procesos, para maximizar la utilidad diaria? ¿Cuál es la utilidad diaria?



21. Descuento en la construcción El departamento de carreteras ha decidido añadir exactamente 200 kilómetros de carreteras y exactamente 100 de autopistas a su sistema carretero en este año. El precio estándar para construcción de caminos es de un millón por kilómetro de carretera y de cinco millones por kilómetro de autopista. Sólo dos contratistas, la compañía A y la compañía B, pueden realizar esta clase de construcción, así que los 300 km de camino deben ser construidos por estas compañías. Sin embargo, la compañía A puede construir a lo más 200 km de camino (carretera y autopista) y la compañía B puede construir a lo más 150 km. Por razones políticas, a cada compañía debe adjudicársele un contrato de al menos 250 millones (antes de descuentos). La compañía A ofrece un descuento de $1000 por kilómetro de carretera y de $6000 por kilómetro de autopista; la compañía B ofrece un descuento de $2000 por kilómetro de carretera y $5000 por kilómetro de autopista.

a. Si x y y representan el número de kilómetros de carretera y autopista, respectivamente, adjudicados a la compañía A, demuestre que el descuento total D recibido de ambas compañías está dado por

$$D = 900 - x + y,$$

en donde D está en miles de dólares.

b. El departamento de carreteras desea maximizar el descuento total, D. Demuestre que este problema es equivalente al de programación lineal dado a continuación, detallando exactamente cómo surgen las primeras cuatro restricciones:

$$\text{Maximizar } D = 900 - x + y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + y &\leq 200, \\ x + y &\geq 150, \\ x + 5y &\geq 250, \\ x + 5y &\leq 450, \\ x &\geq 0, \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

c. Encuentre los valores de x y y que maximizan D.

En los problemas del 22 al 25 redondee sus respuestas a dos decimales.

 **22.** Maximizar

$$Z = 2x + 0.3y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y &\leq 6 - 4x, \\ y &\geq 2 - 0.5x, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

 **23.** Maximizar

$$Z = 14x - 3y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y &\geq 12.5 - 4x, \\ y &\leq 9.3 - x, \\ y &\geq 4.7 + 0.8x, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

 **24.** Minimizar

$$Z = 6.3y - 2.7x,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 7.4x + y &\geq 25, \\ 1.2x + y &\leq 10.4, \\ 0.4x - y &\geq -0.6, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

 **25.** Minimizar

$$Z = 17.3x - 14.4y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 0.73x - y &\leq -2.4, \\ 1.22x - y &\geq -5.1, \\ 0.45x - y &\geq -12.4, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

OBJETIVO Considerar situaciones en las que los problemas de programación lineal tienen más de una solución óptima.

7.3 Soluciones óptimas múltiples[1]

Algunas veces una función objetivo alcanza su valor óptimo en más de un punto factible, en cuyo caso se dice que existen **soluciones óptimas múltiples.** El ejemplo 1 lo ilustrará.

EJEMPLO 1 Soluciones óptimas múltiples

Maximizar $Z = 2x + 4y$ *sujeta a las restricciones*

$$\begin{aligned} x - 4y &\leq -8, \\ x + 2y &\leq 16, \\ x \geq 0, \quad y &\geq 0. \end{aligned}$$

Solución: la región factible aparece en la figura 7.22. Ya que la región es no vacía y acotada, Z tiene valor máximo en un vértice. Los vértices son $A = (0, 2)$, $B = (8, 4)$ y $C = (0, 8)$.

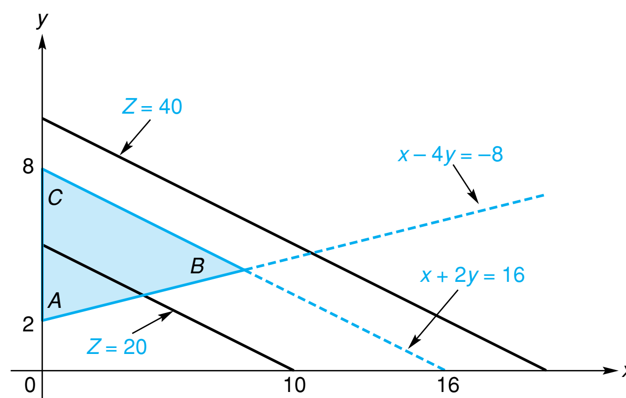


FIGURA 7.22 $Z = 2x + 4y$ tiene un valor máximo en cada punto del segmento $\overline{BC}$.

[1]Esta sección puede omitirse.

Al evaluar la función objetivo en

$$A = (0, 2), \qquad B = (8, 4), \qquad C = (0, 8).$$

se obtiene

$$Z(A) = 2(0) + 4(2) = 8,$$
$$Z(B) = 2(8) + 4(4) = 32,$$
$$Z(C) = 2(0) + 4(8) = 32.$$

Así, el valor máximo de Z sobre la región es 32 y ocurre en *dos* vértices, B y C. En realidad, este valor máximo también ocurre en *todos* los puntos sobre el segmento de recta que *une* los puntos B y C, por la siguiente razón. Cada miembro de la familia de rectas $Z = 2x + 4y$ tiene pendiente de $-\frac{1}{2}$. Además, la recta de la restricción $x + 2y = 16$, que contiene a B y C, también tiene pendiente de $-\frac{1}{2}$, y de aquí que sea paralela a cada miembro de $Z = 2x + 4y$. La figura 7.22 muestra líneas para $Z = 20$ y $Z = 40$. Observe que el miembro de la familia que maximiza Z contiene no sólo a B y C, sino a todos los puntos del segmento de recta $\overline{BC}$. Por esta razón tiene un número infinito de puntos en común con la región factible. De aquí que este problema de programación lineal tenga un número infinito de soluciones óptimas. De hecho, puede mostrarse que

Principios en práctica 1
Soluciones óptimas múltiples

Supóngase que un distribuidor de televisores tiene almacenes A y B, y bodegas C y D. El costo de enviar un televisor de C a A es de \$18, de C a B de \$9, de D a A es de \$24 y de D a B es de \$15. Supóngase que el almacén A ordena 25 televisores y el almacén B 30. También supóngase que la bodega C tiene 45 televisores y la bodega D tiene 40 televisores disponibles. Determine la mejor manera de minimizar costos y determine el costo mínimo. [*Sugerencia*: sea x el número de televisores enviados de C a A y y el número de televisores enviados de C a B. Entonces $25 - x$ es el número de televisores enviados de D a A, y $30 - y$ el número de televisores enviados de D a B.]

Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos vértices en los cuales la función objetivo es óptima, entonces la función también será óptima en todos los puntos (x, y) donde

$$x = (1 - t)x_1 + tx_2,$$
$$y = (1 - t)y_1 + ty_2,$$

y

$$0 \leq t \leq 1.$$

En nuestro caso, si $(x_1, y_1) = B = (8, 4)$ y $(x_2, y_2) = C = (0, 8)$, entonces Z es máximo en cualquier punto (x, y) donde

$$x = (1 - t)8 + t \cdot 0 = 8(1 - t),$$
$$y = (1 - t)4 + t \cdot 8 = 4(1 + t),$$
$$\text{y} \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Estas ecuaciones dan las coordenadas de cualquier punto sobre el segmento de recta $\overline{BC}$. En particular, si $t = 0$, entonces $x = 8$, $y = 4$, lo que da el vértice $B = (8, 4)$. Si $t = 1$, obtenemos el vértice $C = (0, 8)$. El valor $t = \frac{1}{2}$ da el punto $(4, 6)$. Observe que en $(4, 6)$, $Z = 2(4) + 4(6) = 32$, que es el valor máximo de Z.

Ejercicio 7.3

1. Minimizar

$$Z = 3x + 9y,$$

sujeta a

$$y \geq -\tfrac{3}{2}x + 6,$$
$$y \geq -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{11}{3},$$
$$y \geq x - 3,$$
$$x, y \geq 0.$$

2. Maximizar

$$Z = 6x + 12y,$$

sujeta a

$$x - y \geq -3,$$
$$2x - y \leq 4,$$
$$x + 2y = 12,$$
$$x, y \geq 0.$$

3. Maximizar

$$Z = 18x + 9y,$$

sujeta a

$$2x + 3y \leq 12,$$
$$2x + y \leq 8,$$
$$x, y \geq 0.$$

4. **Minimizar costo** Suponga que un vendedor de automóviles tiene salas de exhibición en Atherton y Berkeley, y bodegas en Concord y Dublín. El costo de enviar un automóvil de Concord a Atherton es de \$60, de Concord a Berkeley de \$45, de Dublín a Atherton de \$50 y De Dublín a Berkeley de \$35. Suponga que la sala de exhibición de Atherton ordena siete automóviles y la sala de exhibición de Berkeley ordena cuatro automóviles. También suponga que la bodega en Concord tiene seis automóviles y la bodega en Dublín tiene ocho automóviles disponibles. Determine la mejor manera para minimizar el costo y determine el costo mínimo [*Sugerencia:* sea x el número de automóviles enviados de Concord a Atherton, y y el número de automóviles enviados de Concord a Berkeley. Entonces $7 - x$ es el número de automóviles enviados de Dublín a Atherton y $4 - y$ es el número de automóviles enviados de Dublín a Berkeley].

OBJETIVO Mostrar cómo se utiliza el método simplex para resolver un problema de programación lineal estándar. Este método le permitirá resolver problemas que no pueden resolverse de manera gráfica.

7.4 MÉTODO SIMPLEX

Hasta ahora hemos resuelto problemas de programación lineal por un método geométrico. Este método no es práctico cuando el número de variables aumenta a tres y, desde luego, no es posible usarlo si las variables son más de tres. Ahora veremos una técnica diferente, el **método simplex,** cuyo nombre está ligado en estudios más avanzados a un objeto geométrico al que se denomina simplejo (simplex).

El método simplex empieza con una solución factible y prueba si es o no óptima. Si no lo es, por este método se procede a obtener una solución *mejor*. Decimos "mejor" en el sentido de que la nueva solución esté más cerca de la optimización de la función objetivo.[2] Si esta nueva solución no es óptima, entonces repetimos el procedimiento. En algún momento el método simplex conduce a una solución óptima, si existe.

Además de ser eficiente, el método simplex tiene otras ventajas. Es completamente mecánico (usamos matrices, operaciones elementales sobre renglón y aritmética básica). Además, la geometría no se involucra de manera explícita; esto nos permite resolver problemas de programación lineal que tengan cualquier número de restricciones y variables.

En esta sección consideraremos sólo los llamados **problemas estándar de programación lineal.** Éstos pueden expresarse en la forma siguiente.

Problema estándar de programación lineal

Maximizar la función lineal $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, sujeta a las restricciones

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

en donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_m$ son no negativas.

Observe que una solución factible para un problema estándar de programación lineal siempre es $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Otros tipos de problemas de programación lineal se estudiarán en las secciones 7.6 y 7.7.

El procedimiento que seguimos aquí se describirá más adelante en esta sección

Ahora aplicaremos el método simplex al problema del ejemplo 1 de la sección 7.2, que tiene la forma:

$$\text{maximizar } Z = 3x_1 + x_2,$$

[2]En muchos casos es cierto. Sin embargo, en algunas soluciones la nueva solución puede ser tan buena como la anterior. El ejemplo 2 ilustrará esto.

sujeta a las restricciones

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \quad \textbf{(2)}$$

y

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12, \quad \textbf{(3)}$$

donde $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Este problema es de la forma estándar. Empezamos escribiendo las restricciones (2) y (3) como ecuaciones. En (2), $2x_1 + x_2$ será *igual a* 8 si sumamos algún número no negativo s_1 a $2x_1 + x_2$

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 8, \qquad \text{donde } s_1 \geq 0.$$

Llamamos a s_1 una **variable de holgura,** ya que completa la "holgura" del lado izquierdo de (2), de modo que tengamos una igualdad. Del mismo modo, la desigualdad (3) puede expresarse como una ecuación utilizando la variable de holgura s_2

$$2x_1 + 3x_2 + s_2 = 12, \qquad \text{donde } s_2 \geq 0.$$

Las variables x_1 y y_2 son llamadas **variables estructurales** (o variables de decisión).

Ahora podemos volver a plantear el problema en términos de ecuaciones:

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + x_2 \quad \textbf{(4)}$$

tal que

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 8 \quad \textbf{(5)}$$

y

$$2x_1 + 3x_2 + s_2 = 12, \quad \textbf{(6)}$$

donde x_1, x_2, s_1 *y* s_2 son no negativas.

De la sección 7.2, sabemos que la solución óptima ocurre en un vértice de la región factible de la figura 7.23. En cada uno de estos puntos, al menos *dos* de las variables x_1, x_2, s_1 y s_2 son iguales a cero, como lo indica el listado siguiente:

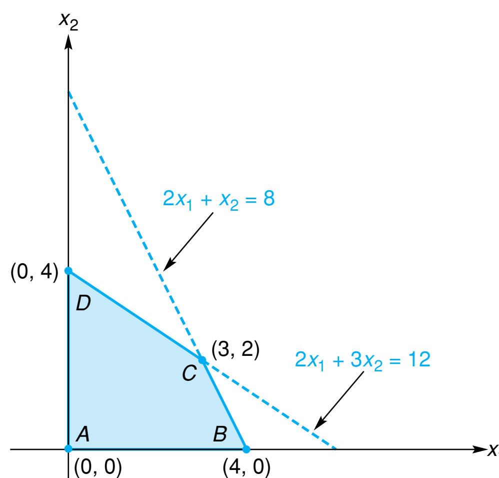


FIGURA 7.23 La solución óptima debe ocurrir en un vértice de la región factible.

1. En A, tenemos $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$.
2. En B, $x_1 = 4$ y $x_2 = 0$. Pero de la ecuación (5), $2(4) + 0 + s_1 = 8$. Entonces, $s_1 = 0$.

3. En C, $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$. Pero de la ecuación (5), $2(3) + 2 + s_1 = 8$. Por tanto, $s_1 = 0$. De la ecuación (6), $2(3) + 3(2) + s_2 = 12$. Por tanto, $s_2 = 0$.
4. En D, $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$. De la ecuación (6), $2(0) + 3(4) + s_2 = 12$. Por tanto, $s_2 = 0$.

También puede demostrarse que cualquier solución de las ecuaciones (5) y (6), tal que al menos *dos* de las cuatro variables x_1, x_2, s_1 *y* s_2 sean cero, corresponde a un vértice. Cualquier solución donde al menos dos de las variables sean cero se llama **solución básica factible** (abreviada S.B.F.). Este número, 2, está determinado por la expresión $n - m$, donde m es el número de restricciones (exceptuando las condiciones de no negatividad) y n es el número de variables que se tiene después de que las restricciones se convierten en ecuaciones. En nuestro caso $n = 4$ y $m = 2$. Para cualquier S.B.F., las dos variables que toman el valor de cero se llaman **variables no básicas,** mientras que las otras se llaman **variables básicas** para esa S.B.F. Así, para la S.B.F., correspondiente al punto (3) anterior, s_1 *y* s_2 son las variables no básicas, pero para la S.B.F., correspondiente a (4) las variables no básicas son x_1 y s_2. Finalmente, queremos encontrar una S.B.F., que maximice Z.

Primero encontramos una S.B.F., inicial y después determinamos si el valor correspondiente de Z puede incrementarse con una S.B.F., diferente. Ya que $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ es una solución factible para este problema estándar de programación lineal, inicialmente encontramos la S.B.F., en donde las variables de decisión o estructurales x_1 y x_2 son no básicas. Esto es, elegimos $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ y encontramos los correspondientes valores para s_1, s_2 y Z. Esto puede hacerse de manera más adecuada por medio de técnicas matriciales, basadas en los métodos desarrollados en el capítulo 6.

Si escribimos la ecuación (4) como $-3x_1 - x_2 + Z = 0$, entonces las ecuaciones (5), (6) y (4) forman el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 & = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + s_2 & = 12, \\ -3x_1 - x_2 + Z & = 0 \end{cases}$$

En términos de una matriz aumentada, llamada **tabla simplex inicial,** tenemos

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ Z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]. \end{array}$$

Los primeros dos renglones corresponden a las restricciones y el último renglón, llamado **renglón objetivo,** corresponde a la ecuación objetivo—por eso la línea horizontal separa a ese renglón. Observe que si $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, entonces los valores de s_1, s_2 y Z los podemos leer de los renglones 1, 2 y 3, de manera directa: $s_1 = 8$, $s_2 = 12$ y $Z = 0$. Ésta es la razón por la cual colocamos las letras s_1, s_2 y Z a la izquierda de los renglones (le recordamos que s_1 y s_2 son las variables básicas). Así que nuestra solución básica factible inicial es

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad s_1 = 8, \qquad s_2 = 12,$$

en la que $Z = 0$. Veamos si podemos encontrar una S.B.F., que dé un valor mayor de Z.

Las variables x_1 y x_2 son no básicas en la S.B.F., anterior. Ahora buscaremos una S.B.F., en la que una de estas variables sea básica, mientras las otras permanezcan como no básicas. ¿Cuál debemos elegir como la variable básica? Examinaremos las posibilidades. Del renglón Z de la matriz anterior, $Z = 3x_1 + x_2$. Si a x_1 se le permite volverse básica, entonces x_2 permanecerá como cero y

$Z = 3x_1$; así, por cada unidad de aumento en x_1, Z aumenta en tres unidades. Por otra parte, si a x_2 se le permite ser básica, entonces x_1 seguirá siendo cero y $Z = x_2$; así, por cada aumento unitario de x_2, Z aumenta en una unidad. De aquí que obtengamos un aumento *mayor* en el valor de Z si x_1, en lugar de x_2, entra a la categoría de variable básica. En este caso llamamos a x_1 la **variable entrante** (o variable que entra). Así, en términos de la tabla simplex que se muestra a continuación (que es la misma de la matriz anterior salvo por algunas marcaciones adicionales) la variable entrante puede encontrarse buscando el "más negativo" de los números encerrados por la llave en el renglón Z (por *más negativo* queremos decir el indicador negativo que tiene la mayor magnitud). Ya que ese número es -3 y aparece en la columna de x_1, entonces x_1 es la variable entrante. Los números en la llave se denominan **indicadores.**

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ Z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hdashline -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$\uparrow$ variable entrante; indicadores: $\underbrace{-3 \quad -1 \quad 0 \quad 0}$

Resumiremos la información que podemos obtener de esta tabla. Da una S.B.F., en donde s_1 y s_2 son las variables básicas y x_1 y x_2 son las no básicas. La S.B.F., es $s_1 = 8$ (al extremo derecho del renglón de s_1), $s_2 = 12$ (al extremo derecho del renglón de s_2), $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$. El -3 en la columna x_1 del renglón de Z indica que si x_2 permanece como cero, entonces Z aumenta tres unidades por cada unidad que aumente x_1. El -1 en la columna x_2 del renglón Z indica que si x_1, permanece como cero, entonces Z aumenta en una unidad por cada unidad de aumento en x_2. La columna en la que se encuentra el indicador más negativo, -3 da la variable entrante x_1, esto es, la variable que debe convertirse en básica en la siguiente S.B.F.

En nuestra nueva S.B.F., a mayor incremento en x_1 (desde $x_1 = 0$), mayor aumento en Z. Ahora, ¿en cuánto podemos aumentar x_1? Ya que x_2 aún se mantendrá en cero, de los renglones 1 y 2 de tabla simplex anterior se sigue que

$$s_1 = 8 - 2x_1$$

y

$$s_2 = 12 - 2x_1.$$

Ya que s_1 y s_2 son no negativas, tenemos

$$8 - 2x_1 \geq 0$$

y

$$12 - 2x_1 \geq 0.$$

De la primera desigualdad, $x_1 \leq \frac{8}{2} = 4$, de la segunda, $x_1 \leq \frac{12}{2} = 6$. Por tanto, x_1 debe ser menor o igual al más pequeño de los cocientes: $\frac{8}{2}$ y $\frac{12}{2}$, que es $\frac{8}{2}$. De aquí que x_1 pueda aumentar cuando mucho 4. Sin embargo, en una S.B.F., dos variables deben ser cero. Ya tenemos que $x_2 = 0$. Como $s_1 = 8 - 2x_1$, s_1 debe ser igual a cero para $x_1 = 4$. Así que tenemos una nueva S.B.F., con x_1 al

reemplazar a s_1 como una variable básica. Esto es, s_1 *saldrá* de la categoría de variables básicas en la S.B.F., anterior y será no básica en la nueva S.B.F. Decimos que s_1 es la **variable saliente** (o que sale) para la S.B.F., previa. En resumen, para nuestra nueva S.B.F., queremos a x_1 y s_2 como variables básicas con $x_1 = 4$, y a x_2 y s_1 como variables no básicas ($x_2 = 0, s_1 = 0$).

Antes de continuar, actualicemos nuestra tabla. A la derecha de la tabla siguiente se indican los cocientes $\frac{8}{2}$ y $\frac{12}{2}$.

variable saliente $\rightarrow$

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c} \textit{Cocientes} \\ 8 \div 2 = 4 \\ 12 \div 2 = 6. \\ \\ \end{array}$$

(más pequeño).

↑ variable entrante (indicador más negativo)

Estos cocientes se obtuvieron al dividir cada entrada en los primeros dos renglones de la columna de *b,* entre la entrada en el renglón correspondiente de la columna de la variable entrante. Observe que la variable saliente está en el mismo renglón que el cociente *más pequeño*, 8 ÷ 2.

Ya que x_1 y s_2 serán básicas en nuestra nueva S.B.F., será conveniente cambiar nuestra tabla anterior por medio de operaciones elementales sobre renglón, en forma tal que los valores de x_1, s_2 y Z puedan leerse con facilidad (al igual como fue posible hacerlo con la solución correspondiente a $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$). Para hacer esto queremos encontrar una matriz que sea equivalente a la tabla anterior, pero que tenga la forma

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & ? & ? & 0 & 0 & ? \\ 0 & ? & ? & 1 & 0 & ? \\ \hline 0 & ? & ? & 0 & 1 & ? \end{array}\right], \end{array}$$

donde los signos de interrogación representan números que serán determinados. Observe aquí que $x_2 = 0$ y $s_1 = 0$, entonces x_1 es igual al número que está en la última columna del renglón 1, s_2 es igual al número del renglón 2 y Z es el número en el renglón 3. Por tanto, debemos transformar la tabla

variable saliente $\rightarrow$

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad \textbf{(7)}$$

↑ variable entrante

En lugar de sombrear la entrada pivote se puede encerrar en un círculo.

en una matriz equivalente que tenga un 1 donde la entrada aparece sombreada y ceros en las demás entradas en la columna de x_1. La entrada sombreada se llama **entrada pivote** y la podemos observar en la columna de la variable entrante (llamada *columna pivote*) y en el renglón de la variable saliente (llamado *renglón pivote*). Por medio de operaciones elementales sobre renglón, tenemos

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \\ \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\
2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\
\hdashline
-3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 \\
2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\
\hdashline
-3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[3R_1 + R_3]{-2R_1 + R_2}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 \\
0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 4 \\
0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 12
\end{array}\right].
$$

Así, formamos una nueva tabla simplex:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \\ x_1 \\ s_2 \\ Z \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \\ \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 \\
0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 4 \\
\hdashline
0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 12
\end{array}\right].
\end{array}
\end{array}
\qquad (8)
$$

indicadores

Para $x_2 = 0$ y $s_1 = 0$, del primer renglón tenemos que $x_1 = 4$; del segundo, $s_2 = 4$. Estos valores nos dan una nueva S.B.F. Observe que reemplazamos la s_1 localizada a la izquierda de la tabla inicial en (7), por x_1 en nuestra nueva tabla (8), por lo que s_1 *salió* y x_1 *entró*. Del renglón 3, para $x_2 = 0$ y $s_1 = 0$, obtenemos $Z = 12$, un valor mayor al que teníamos antes ($Z = 0$).

En nuestra actual S.B.F., x_2 y s_1 son variables no básicas ($x_2 = 0, s_1 = 0$). Suponga que buscamos otra S.B.F., que dé un valor mayor de Z tal que una de las dos, x_2 o s_1, sea básica. La ecuación correspondiente al renglón de Z está dada por $\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}s_1 + Z = 12$ o

$$Z = 12 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{3}{2}s_1. \qquad (9)$$

Si x_2 se convierte en básica y, por tanto, s_1 permanece no básica, entonces

$$Z = 12 - \tfrac{1}{2}x_2 \qquad (\text{ya que } s_1 = 0).$$

Aquí, cada unidad de aumento en x_2 *disminuye* a Z en $\frac{1}{2}$ unidad. Así que cualquier aumento en x_2 haría que Z fuera más pequeña que antes. Por otra parte, si s_1 se convierte en básica y x_2 permanece como no básica, entonces de la ecuación (9),

$$Z = 12 - \tfrac{3}{2}s_1 \qquad (\text{ya que } x_2 = 0).$$

Aquí cada unidad de aumento en s_1 *disminuye* a Z en $\frac{3}{2}$ unidades. Por tanto, cualquier aumento en s_1 haría a Z más pequeña que antes. No podemos movernos a una mejor S.B.F. En resumen, ninguna S.B.F., proporciona un valor mayor de Z que la S.B.F., $x_1 = 4, s_2 = 4, x_2 = 0, s_1 = 0$ (que da $Z = 12$).

En realidad, ya que $x_2 \geq 0$ y $s_1 \geq 0$, y los coeficientes de x_2 y s_1 en la ecuación (9) son negativos, entonces Z es máxima cuando $x_2 = 0$ y $s_1 = 0$. Esto es, en (8), *tener todos los indicadores no negativos significa que tenemos una solución óptima*.

En términos de nuestro problema original, si

$$Z = 3x_1 + x_2,$$

tal que

$$2x_1 + x_2 \leq 8, \qquad 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \qquad x_1 \geq 0, \qquad \text{y} \qquad x_2 \geq 0,$$

entonces Z es máxima cuando $x_1 = 4$ y $x_2 = 0$, y el valor máximo de Z es 12 (esto confirma nuestro resultado del ejemplo 1 de la sección 7.2). Observe que los valores de s_1 y de s_2 no han aparecido aquí.

Ahora daremos una descripción general del método simplex para un problema estándar de programación lineal con tres variables de decisión y cuatro restricciones, sin contar las condiciones de no negatividad. Esto se hace para señalar cómo funciona el método simplex para cualquier número de variables de decisión y de restricciones.

Método simplex

Problema:

$$\text{Maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

tal que

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3,$$
$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \leq b_4,$$

donde x_1, x_2, x_3 y b_1, b_2, b_3, b_4 son no negativos.

Método:

1. Configure la tabla simplex inicial:

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ Z \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & Z & & b \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_4 \\
\hdashline
-c_1 & -c_2 & -c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right] \end{array}.$$

indicadores

Existen cuatro variables de holgura, s_1, s_2, s_3 y s_4—una por cada restricción.

2. Si todos los indicadores en el último renglón son no negativos, entonces Z tiene un valor máximo cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$. El valor máximo es 0. Si existen indicadores negativos, localice la columna en la que aparezca el indicador más negativo. Esta columna pivote proporciona la variable que entra (si más de una columna tiene el indicador más negativo, la elección de la columna pivote se hace de manera arbitraria).

3. Divida cada entrada *positiva*[3] por encima de la línea punteada en la columna de la variable que **entra,** con el correspondiente valor de b (tome el valor de b como dividendo y la entrada positiva como divisor).

---

[3]Esto se estudiará después del ejemplo 1.

4. Marque la entrada en la columna pivote que corresponda al cociente más pequeño del paso 3. Ésta es la entrada pivote. La variable que sale es aquélla que está a la izquierda en el renglón pivote.
5. Utilice operaciones elementales sobre renglones para transformar la tabla en una nueva tabla equivalente, que tenga un 1 en donde estaba la entrada pivote y ceros en las otras entradas de esa columna.
6. En el lado izquierdo de esta tabla la variable que entra reemplaza a la variable que sale.
7. Si los indicadores de la nueva tabla son todos no negativos, tendrá usted una solución óptima. El valor máximo de Z es la entrada en el último renglón y la última columna. Esto ocurre cuando las variables de la izquierda de la tabla son iguales a las correspondientes entradas en la última columna. Todas las demás variables son iguales a cero. Si al menos uno de los indicadores es negativo, repita el proceso empezando con el paso 2, aplicado a la nueva tabla.

Para entender el método simplex, es útil dar una interpretación para ciertas entradas de la tabla. Suponga que obtenemos una tabla cuyo último renglón es el que se indica a continuación.

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ Z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & Z \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline a & b & c & d & e & f & g & 1 & h \end{array}\right] \end{array}.$$

Podemos interpretar la entrada b, por ejemplo, como sigue. Si x_2 es no básica y se fuera a convertir en básica, entonces por cada aumento de 1 unidad en x_2,

si $b < 0$, Z *aumenta* en $|b|$ unidades;

si $b > 0$, Z *disminuye* en $|b|$ unidades;

si $b = 0$, no hay cambio en Z.

EJEMPLO 1 El método simplex

Maximizar $Z = 5x_1 + 4x_2$, *sujeta a*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 20, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 35, \\ -3x_1 + x_2 &\leq 12, \end{aligned}$$

y $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Solución: este problema de programación lineal ya está en la forma estándar. La tabla simplex inicial es

variable saliente → s_2; variable entrante ↑ x_1 (indicadores)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	b	*Cocientes*
s_1	1	1	1	0	0	0	20	$20 \div 1 = 20.$
s_2	2	1	0	1	0	0	35	$35 \div 2 = \frac{35}{2}.$
s_3	−3	1	0	0	1	0	12	no hay cociente, ya que −3 no es positivo.
Z	−5	−4	0	0	0	1	0	

El indicador más negativo, − 5, aparece en la columna de x_1. Así que x_1 es la variable que entra. El cociente más pequeño es $\frac{35}{2}$, de modo que s_2 es la variable que sale. La entrada pivote es 2. Utilizando operaciones elementales sobre renglones, obtenemos un 1 en la posición del pivote y ceros en las demás entradas de esa columna, entonces tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 35 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ -5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(columnas: x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, Z, b)

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{35}{2} \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ -5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{3R_2 + R_3 \\ 5R_2 + R_4}]{-1R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{35}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{129}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & \frac{175}{2} \end{bmatrix}.$$

Nuestra nueva tabla es

variable saliente → s_1; variable entrante ↑ x_2 (indicadores)

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	b	*Cocientes*
s_1	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} \div \frac{1}{2} = 5.$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{35}{2}$	$\frac{35}{2} \div \frac{1}{2} = 35.$
s_3	0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{129}{2}$	$\frac{129}{2} \div \frac{5}{2} = 25\frac{4}{5}.$
Z	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	1	$\frac{175}{2}$	

Observe que en el lado izquierdo, x_1 reemplazó a s_2. Puesto que $-\frac{3}{2}$ es el indicador más negativo, debemos continuar nuestro proceso. La variable que entra, ahora es x_2. El cociente más pequeño es 5. Por tanto, s_1 es la variable que sale y $\frac{1}{2}$ es la entrada pivote. Si ahora aplicamos operaciones elementales sobre renglones, tenemos

$$\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & Z & b \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{35}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{129}{2} \\ \hline 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & \frac{175}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{-5R_1 + R_3 \\ 3R_1 + R_4}]{-1R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & 1 & 0 & 52 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 95 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_1} \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & 1 & 0 & 52 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 95 \end{array}\right].$$

Nuestra nueva tabla es

$$\begin{array}{c} \\ x_2 \\ x_1 \\ s_3 \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & Z & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & 1 & 0 & 52 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 95 \end{array}\right]. \end{array}$$

indicadores

donde x_2 reemplazó a s_1 en el lado izquierdo. Como todos los indicadores son no negativos, el valor máximo de Z es 95, que ocurre cuando $x_2 = 5$ y $x_1 = 15$ (y $s_3 = 52, s_1 = 0$ y $s_2 = 0$).

Es interesante ver cómo los valores de Z obtenían de manera progresiva una "mejora" en las tablas sucesivas del ejemplo 1. Éstas son las entradas del último renglón y columna de cada tabla. En la tabla inicial teníamos $Z = 0$. De ahí obtuvimos $Z = \frac{175}{2} = 87\frac{1}{2}$ y después $Z = 95$, el valor máximo.

En el ejemplo 1 podríamos sorprendernos de que ningún cociente sea considerado en el tercer renglón de la tabla inicial. La S.B.F., para esta tabla es

$$s_1 = 20, \quad s_2 = 35, \quad s_3 = 12, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

donde x_1 es la variable que entra. Los cocientes 20 y $\frac{35}{2}$ reflejan que para la siguiente S.B.F., tendremos $x_1 \leq 20$ y $x_1 \leq \frac{35}{2}$. Como el tercer renglón representa la ecuación $s_3 = 12 + 3x_1 - x_2$, y $x_2 = 0$, entonces $s_3 = 12 + 3x_1$. Pero $s_3 \geq 0$, así también $12 + 3x_1 \geq 0$, lo cual implica que $x_1 \geq -\frac{12}{3} = -4$. Por tanto, tenemos

$$x_1 \leq 20, \qquad x_1 \leq \tfrac{35}{2}, \qquad \text{y} \qquad x_1 \geq -4.$$

De aquí que podamos aumentar x_1 hasta en $\frac{35}{2}$. La condición $x_1 \geq -4$ no influye en la determinación del aumento máximo en x_1. Éste es el porqué el cociente $12/(-3) = -4$ no está considerado en el renglón 3. En general, *no se considera el cociente para un renglón, si la entrada en la columna de la variable que entra es negativa* (*o, por supuesto*, 0).

Aunque el procedimiento simplex desarrollado en esta sección se aplica sólo a problemas de programación lineal de la forma estándar, otras formas pueden adaptarse para que se ajusten a ésta. Suponga que una restricción tiene la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq -b,$$

donde $b > 0$. Aquí el símbolo de desigualdad es "≥" y la constante del lado derecho es *negativa*. Por tanto, la restricción no está en la forma estándar. Sin embargo, multiplicando ambos miembros por − 1 se obtiene

$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \leq b,$$

que *tiene* la forma apropiada. De acuerdo con esto, puede ser necesario escribir de nuevo una restricción antes de proceder con el método simplex.

En una tabla simplex, varios indicadores pueden "empatar" como los más negativos. En este caso, seleccione cualquiera de estos indicadores para obtener la columna de la variable que entra. Del mismo modo, puede haber varios cocientes que "empaten" como los más pequeños. Puede seleccionar cualquiera de estos cocientes para obtener la variable que sale y la entrada pivote. El ejemplo 2 ilustrará esto. Cuando existe un empate para el cociente más pequeño, entonces además de las variables no básicas, una S.B.F., tendrá una variable básica igual a cero. En este caso decimos que la S.B.F., es *degenerada* o que el problema de programación lineal tiene una *degeneración*. En la sección 7.5 se dirá más acerca de esto.

Principios en práctica 1
El método simplex

La compañía *Qué Pasa Si* tiene \$30,000 para la compra de materiales para fabricar tres tipos de aparatos. La compañía tiene asignadas un total de 1200 horas de tiempo para ensamblar y 180 horas para empaquetar los aparatos. La tabla siguiente da el costo, el número de horas y la utilidad por aparato para cada tipo:

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Costo/ aparato	\$300	\$300	\$400
Horas de ensamblado/ aparato	15	15	10
Horas de empaque/ aparato	2	2	3
Utilidad	\$150	\$250	\$200

Determine el número de aparatos de cada tipo que la compañía debe producir para maximizar la utilidad.

EJEMPLO 2 El método simplex

Maximizar $Z = 3x_1 + 4x_2 + \frac{3}{2}x_3$, *sujeta a*

$$-x_1 - 2x_2 \geq -10, \quad (10)$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10,$$

y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Solución: la restricción (10) no se ajusta a la forma estándar. Sin embargo, al multiplicar ambos de la desigualdad (10) por − 1, se obtiene

$$x_1 + 2x_2 \leq 10,$$

que *tiene* la forma apropiada. De esta manera, nuestra tabla simplex inicial es la tabla I:

TABLA SIMPLEX I

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Z	b	Cocientes
s_1	1	2	0	1	0	0	10	$10 \div 2 = 5.$
s_2	2	2	1	0	1	0	10	$10 \div 2 = 5.$
Z	−3	−4	$-\frac{3}{2}$	0	0	1	0	

variable saliente → (s_1); indicadores (renglón Z); variable entrante ↑ (x_2)

La variable que entra es x_2. Como existe empate para el cociente más pequeño, podemos seleccionar a s_1 o a s_2 como la variable que sale. Elegimos a s_1. La entrada pivote aparece sombreada. Al aplicar operaciones elementales sobre renglones obtenemos la tabla II:

TABLA SIMPLEX II

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Z	b	*Cocientes*
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	5	no hay cociente, ya que 0 no es positivo.
variable saliente → s_2	1	0	1	−1	1	0	0	$0 \div 1 = 0$.
Z	−1	0	$-\frac{3}{2}$	2	0	1	20	

indicadores

variable entrante

La tabla II corresponde a una S.B.F., en la que una variable básica, s_2, es cero. Por tanto, la S.B.F., es degenerada. Como existen indicadores negativos, continuamos. La variable que entra ahora es x_3, la variable que sale es s_2 y el pivote aparece sombreado. Al aplicar operaciones elementales sobre renglones obtenemos la tabla III:

TABLA SIMPLEX III

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Z	b
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	5
x_3	1	0	1	−1	1	0	0
Z	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	20

indicadores

Ya que todos los indicadores son no negativos, Z es máxima cuando $x_2 = 5$, $x_3 = 0$ y $x_1 = s_1 = s_2 = 0$. El valor máximo es $Z = 20$. Observe que este valor es el mismo que el correspondiente de Z en la tabla II. En problemas degenerados es posible llegar al mismo valor de Z en varios pasos del método simplex. En el problema 7 del ejercicio 7.4, se le pedirá que resuelva este problema utilizando a s_2 como la variable que sale en la tabla inicial.

A causa de su naturaleza mecánica, el método simplex se adapta con facilidad a computadoras para resolver problemas de programación lineal, que incluyan muchas variables y restricciones.

Ejercicio 7.4

Utilice el método simplex para resolver los problemas siguientes.

1. Maximizar

$$Z = x_1 + 2x_2,$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 \leq 8,$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 12,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

2. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2,$$

sujeta a

$$-x_1 + x_2 \leq 4,$$
$$x_1 + x_2 \leq 6,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. Maximizar

$$Z = -x_1 + 3x_2,$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$
$$-x_1 + x_2 \leq 4,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4. Maximizar

$$Z = 3x_1 + 8x_2,$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 8,$$
$$x_1 + 6x_2 \leq 12,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

5. Maximizar

$$Z = 8x_1 + 2x_2,$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 \leq 1,$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 8,$$
$$x_1 + x_2 \leq 5,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

6. Maximizar

$$Z = 2x_1 - 6x_2,$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 \leq 4,$$
$$-x_1 + x_2 \leq 4,$$
$$x_1 + x_2 \leq 6,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

7. Resuelva el problema del ejemplo 2, seleccionando a s_2 como la variable que sale en la tabla I.

8. Maximizar

$$Z = 2x_1 - x_2 + x_3,$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

9. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2 - x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &\geq -2, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

10. Maximizar

$$Z = -x_1 + 2x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_1 - x_2 &\leq 1, \\ x_1 - x_1 &\geq -2, \\ x_1 &\leq 2, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

11. Maximizar

$$Z = x_1 + x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 4, \\ -x_1 + x_2 &\geq 4, \\ 8x_1 + 5x_2 &\leq 40, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

12. Maximizar

$$W = 2x_1 + x_2 - 2x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &\geq -2, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 6, \\ x_1, x_{2,}, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

13. Maximizar

$$W = x_1 - 12x_2 + 4x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - x_3 &\leq 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 &\geq -2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\geq -1, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

14. Maximizar

$$W = 4x_1 + 0x_2 - x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 10, \\ x_1 - x_2 - x_3 &\leq 4, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

15. Maximizar

$$Z = 60x_1 + 0x_2 + 90x_3 + 0x_4,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq 2, \\ x_1 + x_2 &\leq 5, \\ x_3 + x_4 &\leq 4, \\ x_3 - 2x_4 &\leq 7, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

16. Maximizar

$$Z = 4x_1 + 10x_2 - 6x_3 - x_4,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 - x_4 &\leq 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 &\leq 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &\leq 4, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

---

17. Flete por envío Una compañía de fletes maneja los envíos de dos corporaciones, A y B, que están ubicadas en la misma ciudad. La corporación A envía cajas que pesan 3 lb cada una y tienen un volumen de 2 pies^3; B envía cajas de 1 pie^3 que pesan 5 lb cada una. Ambas corporaciones envían al mismo destino. El costo de transporte para cada caja de A es \$0.75 y para B es \$0.50. La compañía de fletes tiene un camión con capacidad de carga de 2400 pies^3 y una capacidad máxima de 36,800 lb. En un acarreo, ¿cuántas cajas desde cada corporación debe transportar este camión de modo que el ingreso de la compañía de fletes sea máximo? ¿Cuál es el ingreso máximo?

18. Producción Una compañía fabrica tres productos X, Y y Z. Cada producto requiere tiempo de máquina y tiempo de acabado como se muestra en la tabla siguiente:

	Tiempo de máquina	Tiempo de acabado
X	1 hr	4 hr
Y	2 hr	4 hr
Z	3 hr	8 hr

El número de horas de tiempo de máquina y el tiempo de acabado disponibles por mes son 900 y 5000, respectivamente. La utilidad unitaria sobre X, Y y Z es \$6, \$8 y \$12, respectivamente. ¿Cuál es la utilidad máxima por mes que puede obtenerse?

19. Producción Una compañía fabrica tres tipos de muebles para patio: sillas, mecedoras y sillones. Cada uno requiere madera, plástico y aluminio, como se muestra en la tabla siguiente:

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sillón	1 unidad	2 unidades	5 unidades

La compañía tiene disponibles 400 unidades de madera, 500 unidades de plástico y 1450 unidades de aluminio. Cada silla, mecedora y sillón se vende en \$21, \$24 y \$36, respectivamente. Suponiendo que todos los muebles pueden venderse, determine la producción para que el ingreso total sea máximo. ¿Cuál es el ingreso máximo?

OBJETIVO Considerar el método simplex en relación con la degeneración, soluciones no acotadas y soluciones óptimas múltiples.

7.5 DEGENERACIÓN, SOLUCIONES NO ACOTADAS Y SOLUCIONES ÓPTIMAS MÚLTIPLES[4]

Degeneración

En la sección precedente, establecimos que una solución básica factible se denomina **degenerada** si además de las variables no básicas, una de las variables básicas es cero. Suponga que x_1, x_2, x_3 y x_4 son las variables en una S.B.F., degenerada, donde x_1 y x_2 son básicas con $x_1 = 0$, x_3 y x_4 son no básicas, con x_3 como la variable que entra. La correspondiente tabla simplex tiene la forma

$$\text{variable saliente} \rightarrow \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & Z & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & 0 & a \\ \hline 0 & 0 & d_1 & d_2 & 1 & d_3 \end{array}\right] \end{array} \quad 0 \div a_{13} = 0.$$

indicadores; variable entrante (x_3)

Así, la S.B.F., es

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = a, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0.$$

Suponga que $a_{13} > 0$. Entonces el cociente más pequeño es cero y podemos elegir a a_{13} como la entrada pivote. Así x_1 es la variable que sale. Operaciones elementales sobre renglón dan la tabla siguiente, donde los símbolos de interrogación representan números por determinar:

$$\begin{array}{c} \\ x_3 \\ x_2 \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & Z & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} ? & 0 & 1 & ? & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 & ? & 0 & a \\ \hline ? & 0 & 0 & ? & 1 & d_3 \end{array}\right] \end{array}.$$

Para la S.B.F., correspondiente a esta tabla, x_3 y x_2 son variables básicas y x_1 y x_4 son no básicas. La S.B.F., es

$$x_3 = 0, \qquad x_2 = a, \qquad x_1 = 0, \qquad x_4 = 0,$$

que es la misma S.B.F., de antes. En la práctica se consideran S.B.Fs., diferentes, aunque la única distinción es que x_1 es básica en la primera S.B.F., mientras que en la segunda es no básica. El valor de Z para ambas S.B.Fs., es el mismo, d_3. Así, no se obtuvo "mejora" en Z.

En una situación de degeneración pueden presentarse algunos problemas en el método simplex. Es posible obtener una secuencia de tablas que correspondan a las S.B.Fs., que dan el mismo valor de Z. Además, en un momento dado podemos regresar a la primera tabla de la secuencia. En la figura 7.24 llegamos a la S.B.F.$_1$, proseguimos a la S.B.F.$_2$, después a la S.B.F.$_3$ y finalmente de vuelta a la S.B.F.$_1$. Esto es llamado *ciclo*. Cuando ocurre un ciclo, es posible que nunca obtengamos el valor óptimo de Z. Este fenómeno raramente se encuentra en problemas de programación lineal prácticos. Sin

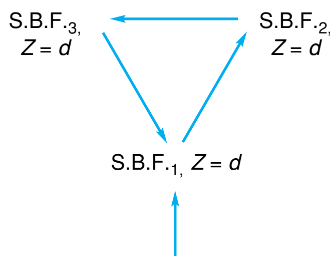


FIGURA 7.24 Ciclo.

[4] Esta sección puede omitirse.

embargo, existen técnicas (que no se analizarán en este texto) para resolver tales dificultades.

Una S.B.F., degenerada ocurrirá cuando dos cocientes en la tabla simplex empaten con los cocientes más pequeños. Por ejemplo, considere la tabla siguiente (parcial):

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}\begin{array}{c} x_3 \\ \left[\begin{array}{c|c} q_1 & p_1 \\ q_2 & p_2 \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{c} \textit{Cocientes} \\ p_1/q_1, \\ p_2/q_2. \end{array}$$

Aquí x_1 y x_2 son variables básicas. Suponga que x_3 es no básica y entrante, y que p_1/q_1 y p_2/q_2 son iguales y también los cocientes más pequeños involucrados. Al seleccionar q_1 como la entrada pivote, por operaciones elementales sobre renglón obtenemos

$$\begin{array}{c} \\ x_3 \\ x_2 \end{array}\begin{array}{c} x_3 \\ \left[\begin{array}{c|c} 1 & p_1/q_1 \\ 0 & p_2 - q_2\dfrac{p_1}{q_1} \end{array}\right]. \end{array}$$

Ya que $p_1/q_1 = p_2/q_2$, entonces $p_2 - q_2(p_1/q_1) = 0$. Por lo que la S.B.F., correspondiente a esta tabla tiene $x_2 = 0$, lo que da una S.B.F., *degenerada*. Aunque tal S.B.F., puede producir un ciclo, no encontraremos esa situación en este libro.

Soluciones no acotadas

Ahora pondremos atención en "problemas no acotados". En la sección 7.2 vimos que un problema de programación lineal puede no tener un valor máximo, ya que la región factible es tal que la función objetivo puede ser arbitrariamente grande en ella. En este caso, se dice que el problema tiene **una solución no acotada.** Ésta es una manera de decir de manera específica que no existe solución óptima. Tal situación ocurre cuando no existen cocientes posibles en una tabla simplex para una variable que entra. Por ejemplo, considere la tabla siguiente:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_3 \\ Z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & Z & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 10 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{no hay cociente} \\ \text{no hay cociente} \\ \\ \end{array}$$

indicadores (bajo x_1 a x_4); ↑ variable entrante (x_2)

Aquí x_2 es la variable que entra y por cada aumento de una unidad en x_2, Z aumenta en 5. Como no existen entradas positivas en los primeros dos renglones de la columna x_2, no existe cociente alguno. De los renglones 1 y 2 tenemos

$$x_1 = 5 + 3x_2 - 2x_4$$

y

$$x_3 = 1 - 4x_4.$$

Si tratamos de pasar a la siguiente S.B.F., ¿cuál es una cota superior para x_2? En esa S.B.F., x_4 permanecerá como no básica ($x_4 = 0$). Así, $x_1 = 5 + 3x_2$ y $x_3 = 1$. Como $x_1 \geq 0$, entonces $x_2 \geq -\frac{5}{3}$. Así que no existe cota superior sobre x_2. De aquí que Z pueda ser arbitrariamente grande y tengamos una solución no acotada. En general:

> Si no existen cocientes en una tabla simplex, entonces el problema de programación lineal tiene una solución no acotada.

EJEMPLO 1 Solución no acotada

Maximizar $Z = x_1 + 4x_2 - x_3$, *sujeta a*

$$-5x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq 30,$$

$$-x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 12,$$

y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Solución: la tabla simplex inicial es

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ Z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & Z & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} -5 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ -1 & \boxed{3} & 6 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \textit{Cocientes} \\ 30 \div 6 = 5. \\ 12 \div 3 = 4. \\ \\ \end{array}$$

variable saliente → s_2; indicadores: $-1, -4, 1, 0, 0$; variable entrante ↑ x_2

La segunda tabla es

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ x_2 \\ Z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & Z & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} -3 & 0 & -14 & 1 & -2 & 0 & 6 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 4 \\ \hline -\frac{7}{3} & 0 & 9 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 16 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{no hay cociente.} \\ \text{no hay cociente.} \\ \\ \end{array}$$

indicadores: $-\frac{7}{3}, 0, 9, 0, \frac{4}{3}$; variable entrante ↑ x_1

Aquí la variable que entra es x_1. Ya que las entradas en los primeros dos renglones de la columna x_1 son negativas, no existen cocientes. De aquí que el problema tenga una solución no acotada.

Soluciones óptimas múltiples

Concluimos esta sección con un estudio de "soluciones óptimas múltiples". Suponga que

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \ldots, \quad x_n = a_n$$

y

$$x_1 = b_1, \quad x_2 = b_2, \quad \ldots, \quad x_n = b_n$$

son dos S.B.Fs., *diferentes* para las cuales un problema de programación lineal es óptimo. Por "S.B.Fs., diferentes" queremos decir que $a_i \neq b_i$, para alguna i, donde $1 \leq i \leq n$. Puede demostrarse que los valores

$$\begin{aligned} x_1 &= (1-t)a_1 + tb_1, \\ x_2 &= (1-t)a_2 + tb_2, \\ &\vdots \\ x_n &= (1-t)a_n + tb_n, \end{aligned} \tag{1}$$

para cualquier t, donde $0 \leq t \leq 1$,

también dan una solución óptima (aunque no necesariamente será una S.B.F.). Así, existen *soluciones múltiples* (*óptimas*) para el problema.

Podemos determinar la posibilidad de hallar soluciones óptimas múltiples a partir de una tabla simplex que dé una solución óptima, tal como la tabla (parcial) que se muestra a continuación:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & Z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} & & & & & p_1 \\ & & & & & q_1 \\ \hline 0 & 0 & a & 0 & 1 & r \end{array}\right]. \end{array}$$

indicadores (bajo $0 \;\; 0 \;\; a \;\; 0$)

Aquí a debe ser no negativa. La correspondiente S.B.F., es

$$x_1 = p_1, \quad x_2 = q_1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

y el valor máximo de Z es r. Si x_4 se convirtiese en básica, el indicador 0 en la columna x_4 significaría que por cada aumento unitario en x_4, Z no cambiaría. Así que podemos encontrar una S.B.F., en la que x_4 es básica y el correspondiente valor de Z es el mismo que antes. Esto se realiza tratando a x_4 como la variable que entra en la tabla anterior. Si, por ejemplo, x_1 es la variable que sale, la nueva S.B.F., tiene la forma

$$x_1 = 0, \quad x_2 = q_2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = p_2.$$

Si esta S.B.F., es diferente de la anterior, entonces existen soluciones múltiples. De hecho, a partir de la ecuación (1) una solución óptima está dada por cualesquier valores de x_1, x_2, x_3 y x_4 tales que

$$\begin{aligned} x_1 &= (1-t)p_1 + t \cdot 0 = (1-t)p_1, \\ x_2 &= (1-t)q_1 + tq_2, \\ x_3 &= (1-t) \cdot 0 + t \cdot 0 = 0, \\ x_4 &= (1-t) \cdot 0 + tp_2 = tp_2, \end{aligned}$$

donde $0 \leq t \leq 1$.

Observe que cuando $t = 0$, obtenemos la primera S.B.F., óptima; cuando $t = 1$ obtenemos la segunda. Por supuesto, puede ser posible repetir el procedimiento utilizando la tabla correspondiente a la última S.B.F., y obtener soluciones óptimas con base en las ecuaciones (1).

En general:

> En una tabla que da una solución óptima, un indicador igual a cero para una variable no básica, sugiere la posibilidad de soluciones óptimas múltiples.

Principios en práctica 1

Soluciones múltiples



Una compañía produce tres clases de dispositivos que requieren tres diferentes procesos de producción. La compañía tiene asignadas un total de 190 horas para el proceso 1, 180 para el proceso 2 y 165 horas para el proceso 3. La tabla siguiente proporciona el número de horas por dispositivo para cada procedimiento.

	Disp. 1	Disp. 2	Disp. 3
Proceso 1	5.5	5.5	6.5
Proceso 2	3.5	6.5	7.5
Proceso 3	4.5	6.0	6.5

Si la utilidad es de \$50 por dispositivo 1, de \$50 por dispositivo 2 y de \$50 por dispositivo 3, determine el número de dispositivos de cada clase que la compañía debe producir para maximizar la utilidad. Introduzca la tabla inicial en una matriz en su calculadora gráfica, y realice las operaciones por renglón necesarias para determinar la respuesta. Redondee las respuestas al número entero más cercano.

EJEMPLO 2 Soluciones múltiples

Maximizar $Z = -x_1 + 4x_2 + 6x_3$, *sujeta a*

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6,$$
$$-2x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 10,$$

y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Solución: nuestra tabla simplex inicial es

$$\text{variable saliente} \rightarrow \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ Z \end{matrix} \left[\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & Z & b \\ 1 & 2 & \boxed{3} & 1 & 0 & 0 & 6 \\ -2 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ \hline 1 & -4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} \text{Cocientes} \\ 6 \div 3 = 2. \\ 10 \div 1 = 10. \\ \end{matrix}$$

indicadores (↑ variable entrante: x_3)

Puesto que hay un indicador negativo, continuamos

$$\text{variable saliente} \rightarrow \begin{matrix} x_3 \\ s_2 \\ Z \end{matrix} \left[\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & Z & b \\ \frac{1}{3} & \boxed{\frac{2}{3}} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 2 \\ -\frac{7}{3} & -\frac{17}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 8 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} \text{Cocientes} \\ 2 \div \frac{2}{3} = 3. \\ \text{no hay cociente.} \\ \end{matrix}$$

indicadores (↑ variable entrante: x_2)

Todos los indicadores son no negativos y entonces ocurre una solución óptima para la S.B.F.

$$x_3 = 2, \quad s_2 = 8, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad s_1 = 0,$$

y el valor máximo de Z es 12. Sin embargo, ya que x_2 es una variable no básica y su indicador es 0, verificamos si existen soluciones múltiples. Tratando a x_2 como una variable que entra, se obtiene la tabla siguiente:

$$\begin{matrix} x_2 \\ s_2 \\ Z \end{matrix} \left[\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & Z & b \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{17}{2} & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 25 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right].$$

Aquí la S.B.F., es

$$x_2 = 3, \quad s_2 = 25, \quad x_1 = 0, \quad x_3 = 0, \quad s_1 = 0$$

(para la cual $Z = 12$, como antes) y es diferente de la anterior. Así que existen soluciones múltiples. Como estamos interesados sólo en los valores de las variables estructurales, tenemos una solución óptima

$$x_1 = (1 - t) \cdot 0 + t \cdot 0 = 0,$$
$$x_2 = (1 - t) \cdot 0 + t \cdot 3 = 3t,$$
$$x_3 = (1 - t) \cdot 2 + t \cdot 0 = 2(1 - t),$$

para cada valor de t en donde $0 \leq t \leq 1$ (por ejemplo, si $t = \frac{1}{2}$, entonces $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$ y $x_3 = 1$ es una solución óptima).

En la última S.B.F., x_3 no es básica y su indicador es 0. Sin embargo, si repetimos el proceso para determinar otras soluciones óptimas, regresaríamos a la segunda tabla. Así, nuestro procedimiento no da otras soluciones óptimas.

Ejercicio 7.5

En los problemas 1 y 2, ¿el problema de programación lineal asociado con la tabla dada tiene degeneración? Si es así, ¿por qué?

1.
$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ s_2 \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ \hdashline 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \end{array}.$$

indicadores

2.
$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ x_2 \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & Z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -5 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array}.$$

indicadores

En los problemas del 3 al 11 utilice el método simplex.

3. Maximizar
$$Z = 2x_1 + 7x_2,$$
sujeta a
$$4x_1 - 3x_2 \leq 4,$$
$$3x_1 - x_2 \leq 6,$$
$$5x_1 \leq 8,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4. Maximizar
$$Z = x_1 + x_2,$$
sujeta a
$$x_1 - x_2 \leq 4,$$
$$-x_1 + x_2 \leq 4,$$
$$8x_1 + 5x_2 \leq 40,$$
$$x_1 + x_2 \leq 6,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

5. Maximizar
$$Z = 3x_1 - 3x_2,$$
sujeta a
$$x_1 - x_2 \leq 4,$$
$$-x_1 + x_2 \leq 4,$$
$$x_1 + x_2 \leq 6,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

6. Maximizar
$$Z = 8x_1 + 2x_2 + 4x_3,$$
sujeta a
$$x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 6,$$
$$x_1 - x_2 - x_3 \geq -4,$$
$$x_1 - 6x_2 + x_3 \leq 8,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

7. Maximizar
$$Z = 5x_1 + 6x_2 + x_3,$$
sujeta a
$$9x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 5,$$
$$4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2,$$
$$x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 3,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

8. Maximizar
$$Z = 2x_1 + x_2 - 4x_3,$$
sujeta a
$$6x_1 + 3x_2 - 3x_3 \leq 10,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 1,$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 12,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

9. Maximizar
$$Z = 6x_1 + 2x_2 + x_3,$$
sujeta a
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 7,$$
$$-4x_1 - x_2 \geq -6,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

10. Maximizar
$$P = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4,$$
sujeta a
$$x_1 - x_2 \leq 5,$$
$$x_2 - x_3 \leq 2,$$
$$x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 4,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

11. Producción Una compañía fabrica tres tipos de muebles para patio: sillas, mecedoras y tumbonas. Cada uno requiere madera, plástico y aluminio, como se indica en la tabla que sigue.

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Tumbona	1 unidad	2 unidades	5 unidades

La compañía tiene disponibles 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1500 de aluminio. Cada silla, mecedora y tumbona se vende en $24, $32 y $48, respectivamente. Suponiendo que todos los muebles pueden venderse, ¿cuál es el ingreso máximo total que puede obtenerse? Determine las posibles órdenes de producción que generarán ese ingreso.

OBJETIVO Trabajar con problemas de maximización que no están en la forma estándar por medio de la introducción de variables artificiales.

7.6 Variables artificiales

Para iniciar el método simplex se requiere de una solución básica factible. Para un problema de programación lineal estándar, empezamos con la S.B.F., en la que todas las variables estructurales son cero. Sin embargo, para un problema de maximización que no esté en la forma estándar, tal S.B.F., podría no existir. En esta sección se presentará la forma en que el método simplex se utiliza en tales situaciones.

Considere el problema siguiente:

$$\text{Maximizar } Z = x_1 + 2x_2,$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 9, \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 \geq 1, \quad (2)$$

y $x_1, x_2 \geq 0$. Ya que la restricción (2) no puede escribirse como $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$, donde b es no negativa, este problema no puede ser puesto en la forma estándar. Observe que (0, 0) no es un punto factible. Para resolver este problema, empezamos escribiendo las restricciones (1) y (2) como ecuaciones. La restricción (1) se convierte en

$$x_1 + x_2 + s_1 = 9, \quad (3)$$

donde $s_1 \geq 0$ es una variable de holgura. Para la restricción (2), $x_1 - x_2$ será igual a 1 si *restamos* una variable de holgura no negativa s_2 de $x_1 - x_2$. Esto es, restando s_2 completamos el "excedente" sobre el miembro izquierdo de (2) de modo que tengamos la igualdad. De esta manera

$$x_1 - x_2 - s_2 = 1, \quad (4)$$

donde $s_2 \geq 0$. Podemos ahora volver a plantear el problema:

$$\text{Maximizar } Z = x_1 + 2x_2, \quad (5)$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + s_1 = 9, \quad (6)$$

$$x_1 - x_2 - s_2 = 1, \quad (7)$$

y $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$.

Ya que (0, 0) no está en la región factible, no tenemos una S.B.F., en la que $x_1 = x_2 = 0$. De hecho, si $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ se sustituyen en la ecuación (7), entonces $0 - 0 - s_2 = 1$, lo que da $s_2 = -1$. Pero esto contradice la condición de que $s_2 \geq 0$.

Para iniciar el método simplex, necesitamos una S.B.F., inicial. Aunque ninguna es obvia, existe un método ingenioso para llegar a una en forma *artificial*. Requiere que consideremos un problema de programación lineal relacionado que se conoce como *problema artificial*. Primero se forma una nueva ecuación, sumando una variable no negativa t al lado izquierdo de la ecuación en la que el coeficiente de la variable de holgura es -1. La variable t es llamada **variable artificial.** En nuestro caso, reemplazamos la ecuación (7) por $x_1 - x_2 - s_2 + t = 1$. Así las ecuaciones (6) y (7) se convierten en

$$x_1 + x_2 + s_1 = 9, \tag{8}$$

$$x_1 - x_2 - s_2 + t = 1, \tag{9}$$

donde $x_1, x_2, s_1, s_2, t \geq 0$.

Una solución obvia para las ecuaciones (8) y (9) se encuentra al considerar x_1, x_2 y s_2 iguales a cero. Esto da

$$x_1 = x_2 = s_2 = 0, \qquad s_1 = 9, \qquad t = 1,$$

Observe que estos valores no satisfacen las ecuaciones (6) y (7). Sin embargo, es claro que cualquier solución de las ecuaciones (8) y (9) para la cual $t = 0$, dará una solución para las ecuaciones (6) y (7), y recíprocamente también.

Por último, podemos forzar a que t sea cero si alteramos la función objetivo original. Definimos la **función objetivo artificial** como

$$W = Z - Mt = x_1 + 2x_2 - Mt, \tag{10}$$

donde la constante M es un número positivo grande. No nos preocuparemos por el valor particular de M y procederemos a maximizar W por medio del método simplex. Ya que hay $m = 2$ restricciones (excluyendo las condiciones de no negatividad) y $n = 5$ variables en las ecuaciones (8) y (9), cualquier S.B.F., debe tener al menos $n - m = 3$ variables iguales a cero. Iniciamos con la siguiente S.B.F.:

$$x_1 = x_2 = s_2 = 0, \qquad s_1 = 9, \qquad t = 1. \tag{11}$$

En esta S.B.F., inicial, las variables no básicas son las variables estructurales y las de holgura con coeficiente -1 en las ecuaciones (8) y (9). El correspondiente valor de W es $W = x_1 + 2x_2 - Mt = -M$, lo cual es un número "extremadamente" negativo. Una mejora significativa de W ocurrirá si podemos encontrar otra S.B.F., para la cual $t = 0$. Ya que el método simplex busca mejorar los valores de W en cada etapa, lo aplicaremos hasta que lleguemos a tal S.B.F., si es posible. Esa solución será una S.B.F., inicial para el problema original.

Para aplicar el método simplex al problema artificial, primero escribimos la ecuación (10) como

$$-x_1 - 2x_2 + Mt + W = 0. \tag{12}$$

La matriz aumentada de las ecuaciones (8), (9) y (12) es

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ t \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline -1 & -2 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}\right]. \end{array} \tag{13}$$

Una S.B.F., inicial está dada por (11). Observe que del renglón 1, cuando $x_1 = x_2 = s_2 = 0$, podemos leer directamente el valor de s_1, a saber, $s_1 = 9$. Del renglón 2 obtenemos $t = 1$. Del renglón 3, $Mt + W = 0$. Ya que $t = 1$, entonces $W = -M$, Pero en una tabla simplex queremos que el valor de W aparezca en el último renglón, en la última columna. Esto no es así en (13) y, por tanto, modificamos esa matriz.

Para hacer esto transformamos (13) en una matriz equivalente cuyo último renglón tiene la forma

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & \\ ? & ? & 0 & ? & 0 & 1 & ? \end{array}$$

Esto es, la M en la columna t es reemplazada por cero. Como resultado, si $x_1 = x_2 = s_2 = 0$, entonces W es igual a la última entrada. Procediendo para obtener tal matriz, tenemos

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline -1 & -2 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}\right]. \end{array}$$

$$\xrightarrow{-MR_2 + R_3} \left[\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline -1-M & -2+M & 0 & M & 0 & 1 & -M \end{array}\right].$$

Ahora revisaremos algunas cosas. Si $x_1 = 0, x_2 = 0$ y $s_2 = 0$, entonces del renglón 1 obtenemos $s_1 = 9$; del renglón 2, $t = 1$; del renglón 3, $W = -M$. Así, ahora tenemos la tabla simplex inicial I:

TABLA SIMPLEX I

	x_1	x_2	s_1	s_2	t	W		Cocientes
s_1	1	1	1	0	0	0	9	$9 \div 1 = 9$.
variable saliente → t	**1**	−1	0	−1	1	0	1	$1 \div 1 = 1$.
W	$-1-M$	$-2+M$	0	M	0	1	$-M$	

indicadores (↑ variable entrante: x_1)

A partir de aquí podemos utilizar los procedimientos de la sección 7.4. Ya que M es un número positivo grande, el indicador más negativo es $-1-M$. De este modo la variable que entra es x_1. A partir de los cocientes, seleccionamos a t como la variable que sale. La entrada pivote está sombreada. Al aplicar operaciones elementales sobre renglón para obtener 1 en la posición del pivote y 0 en todas las demás entradas en esa columna, obtenemos la tabla II:

TABLA SIMPLEX II

	x_1	x_2	s_1	s_2	t	W		Cocientes
variable saliente → s_1	0	**2**	1	1	−1	0	8	$8 \div 2 = 4$.
x_1	1	−1	0	−1	1	0	1	no hay cociente, ya que −1 no es positivo.
W	0	−3	0	−1	$1+M$	1	1	

indicadores (↑ variable entrante: x_2)

De la tabla II, tenemos la siguiente S.B.F.:

$$s_1 = 8, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad s_2 = 0, \quad t = 0.$$

Ya que $t = 0$, ¡los valores $s_1 = 8, x_1 = 1, x_2 = 0$ y $s_2 = 0$ forman una S.B.F., para el problema *original*! La variable artificial ha servido para su propósito. Para las tablas siguientes eliminaremos la columna t (ya que queremos resolver el problema original) y cambiaremos las W por Z (ya que $W = Z$ para $t = 0$). De la tabla II, la variable entrante es x_2, la variable que sale es s_1 y la entrada pivote está sombreada. Al aplicar operaciones elementales sobre renglón (omitiendo la columna t), obtenemos la tabla III:

TABLA SIMPLEX III

$$\begin{array}{c} \\ x_2 \\ x_1 \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 5 \\ \hdashline 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 13 \end{array}\right] \end{array}.$$

indicadores

Aquí está un resumen del procedimiento que involucra variables artificiales.

Ya que todos los indicadores son no negativos, el valor máximo de Z es 13. Esto ocurre cuando $x_1 = 5$ y $x_2 = 4$.

Es útil revisar los pasos que realizamos para resolver nuestro problema:

$$\text{Maximizar } Z = x_1 + 2x_2,$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 9, \quad \textbf{(14)}$$

$$x_1 - x_2 \geq 1, \quad \textbf{(15)}$$

y $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Escribimos (14) como

$$x_1 + x_2 + s_1 = 9. \quad \textbf{(16)}$$

Ya que (15) incluye el símbolo $\geq$ y la constante del lado derecho es no negativa, escribimos (15) en la forma que tenga una variable de holgura (con coeficiente -1) y una variable artificial:

$$x_1 - x_2 - s_2 + t = 1. \quad \textbf{(17)}$$

La ecuación objetivo artificial por considerar es $W = x_1 + 2x_2 - Mt$, o de manera equivalente,

$$-x_1 - 2x_2 + Mt + W = 0. \quad \textbf{(18)}$$

La matriz aumentada del sistema formado por las ecuaciones (16) a la (18) es

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline -1 & -2 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Ahora, eliminamos M de la columna de la variable artificial y la reemplazamos con 0 mediante el uso de operaciones elementales sobre renglón. La tabla simplex I resultante corresponde a la S.B.F., inicial del problema artificial, en el que las variables de decisión (o estructurales), x_1 y x_2, y la variable de holgura s_2 (aquélla asociada con la restricción que incluye al símbolo $\geq$) son cada una cero:

TABLA SIMPLEX I

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ t \\ W \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t & W \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline -1-M & -2+M & 0 & M & 0 & 1 & -M \end{array}\right]. \end{array}$$

Las variables básicas s_1 y t en el lado izquierdo de la tabla, corresponden a las variables no estructurales de las ecuaciones (16) y (17) que tienen coeficientes positivos. Ahora aplicaremos el método simplex hasta que obtengamos una S.B.F., en la que la variable artificial, t, sea igual a cero. Después podremos eliminar la columna de la variable artificial, cambiar las W por Z y continuar el procedimiento hasta obtener el valor máximo de Z.

Principios en práctica 1
Variables artificiales

La compañía GHI fabrica dos modelos de tablas para nieve, estándar y de lujo, en dos diferentes plantas de manufactura. La producción máxima en la planta I es de 1200 tablas mensuales, mientras que la producción máxima en la planta II es de 1000 al mes. Debido a obligaciones contractuales, el número de modelos de lujo producidos en la planta I no puede exceder el número de modelos estándar producidos en la misma planta I en más de 200. La utilidad por la fabricación de tablas para nieve de los modelos estándar y de lujo en la planta I es de $40 y $60, respectivamente, mientras que para la planta II es de $45 y $50, respectivamente. Este mes, GHI recibió un pedido por 1000 tablas para nieve del modelo estándar y 800 del modelo de lujo. Determine cuántas tablas de cada modelo se deben producir en cada planta para satisfacer el pedido y maximizar la utilidad. [*Sugerencia*: sea x_1 el número de modelos estándar producidos y x_2 el número de modelos de lujo fabricados en la planta I.]

EJEMPLO 1 Variables artificiales

Utilizar el método simplex para maximizar $Z = 2x_1 + x_2$ *sujeta a*

$$x_1 + x_2 \leq 12, \quad (19)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 20, \quad (20)$$

$$-x_1 + x_2 \geq 2, \quad (21)$$

y $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Solución: las ecuaciones para (19), (20) y (21) involucrarán un total de tres variables de holgura: s_1, s_2 y s_3. Como (21) tiene el símbolo $\geq$ y la constante del lado derecho es no negativa, su ecuación también incluirá una variable artificial t, y el coeficiente de su variable de holgura s_3 será -1. Así, tenemos

$$x_1 + x_2 + s_1 = 12, \quad (22)$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 20, \quad (23)$$

$$-x_1 + x_2 - s_3 + t = 2. \quad (24)$$

Consideramos a $W = Z - Mt = 2x_1 + x_2 - Mt$ como la ecuación objetivo artificial o, de manera equivalente,

$$-2x_1 - x_2 + Mt + W = 0, \quad (25)$$

donde M es un número positivo grande. Ahora construimos la matriz aumentada de las ecuaciones (22) a la (25):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & t & W \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}\right]. \end{array}$$

Para obtener la tabla simplex I, reemplazamos la M de la columna de la variable artificial por cero sumando $-M$ veces el renglón 3 al renglón 4:

TABLA SIMPLEX I

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	t	W		*Cocientes*
s_1	1	1	1	0	0	0	0	12	$12 \div 1 = 12.$
s_2	1	2	0	1	0	0	0	20	$20 \div 2 = 10.$
variable saliente → t	-1	**1**	0	0	-1	1	0	2	$2 \div 1 = 2.$
W	$-2 + M$	$-1 - M$	0	0	M	0	1	$-2M$	

indicadores

↑ variable entrante (x_2)

Las variables s_1, s_2 y t en el lado izquierdo de la tabla I son las variables no estructurales con coeficientes positivos en las ecuaciones (22) a la (24). Ya que M es un número positivo grande, $-1 - M$ es el indicador más negativo. La variable entrante es x_2, la variable que sale es t y la entrada pivote está sombreada. Continuamos para obtener la tabla II:

TABLA SIMPLEX II

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	t	W		*Cocientes*
variable saliente → s_1	**2**	0	1	0	1	-1	0	10	$10 \div 2 = 5.$
s_2	3	0	0	1	2	-2	0	16	$16 \div 3 = 5\frac{1}{3}.$
x_2	-1	1	0	0	-1	1	0	2	
W	-3	0	0	0	-1	$1 + M$	1	2	

indicadores

↑ variable entrante (x_1)

La S.B.F., correspondiente a la tabla II tiene $t = 0$. Por eso eliminamos la columna t y cambiamos las W por Z en las tablas siguientes. Continuamos y así obtenemos la tabla III:

TABLA SIMPLEX III

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Z	
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	5
s_2	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	1
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	7
Z	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	17

indicadores

Todos los indicadores son no negativos. Por tanto, el valor máximo de Z es 17. Esto ocurre cuando $x_1 = 5$ y $x_2 = 7$. ■

Restricciones de igualdad

Cuando ocurre una restricción de *igualdad* de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \qquad \text{donde } b \geq 0,$$

en un problema de programación lineal, en el método simplex se utilizan variables artificiales. Para ilustrarlo, considere el problema siguiente:

$$\text{Maximizar } Z = x_1 + 3x_2 - 2x_3,$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 - x_3 = 6 \tag{26}$$

y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. La restricción (26) ya está expresada como una ecuación, de modo que no es necesaria una variable de holgura. Como $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, no es una solución factible, no tenemos un punto obvio de inicio para el método simplex. Por tanto, creamos un problema artificial añadiendo primero una variable artificial t al miembro izquierdo de la ecuación (26):

$$x_1 + x_2 - x_3 + t = 6.$$

Aquí una S.B.F., obvia es $x_1 = x_2 = x_3 = 0, t = 6$. La función objetivo artificial es

$$W = Z - Mt = x_1 + 3x_2 - 2x_3 - Mt,$$

donde M es un número positivo grande. El método simplex se aplica a este problema artificial hasta que obtengamos una S.B.F., en la que $t = 0$. Esta solución dará una S.B.F., inicial para el problema original, y entonces continuaremos como antes.

En general, el método simplex puede utilizarse para

$$\text{maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

sujeta a

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \{\leq, \geq, =\}\ b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \{\leq, \geq, =\}\ b_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \{\leq, \geq, =\}\ b_m, \end{array}\right\} \tag{27}$$

donde $x_1, x_2, ..., x_n$ y $b_1, b_2, ..., b_n$ son no negativos. El simbolismo $(\leq, \geq, =)$ significa que existe una de las relaciones "$\leq$", "$\geq$" o "$=$" para una restricción. Si todas las restricciones incluyen "$\leq$", el problema está en la forma estándar y se aplican las técnicas simplex de la sección anterior. Si alguna restricción incluye "$\geq$" o "$=$", empezamos con un problema artificial que se obtiene como sigue.

Cada restricción que contenga "$\leq$" se escribe como una ecuación que incluya una variable de holgura s_i con coeficiente $+1$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + s_i = b_i.$$

Cada restricción que tenga "$\geq$" se escribe como una ecuación que incluya una variable de holgura s_j con coeficiente -1 y una variable artificial t_j:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n - s_j + t_j = b_j.$$

En cada restricción de igualdad se inserta una variable artificial no negativa t_k:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n + t_k = b_k.$$

Las variables artificiales incluidas en este problema serán, por ejemplo, t_1, t_2 y t_3, entonces la función objetivo artificial es

$$W = Z - Mt_1 - Mt_2 - Mt_3,$$

donde M es un número positivo grande. Una S.B.F., inicial ocurre cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ y cada variable de holgura que tenga coeficiente -1 sea igual a cero. Después de obtener una tabla simplex inicial, aplicamos el método simplex hasta que lleguemos a una tabla que corresponda a una S.B.F., en la que *todas* las variables artificiales sean iguales a cero. Después eliminamos las columnas de las variables artificiales, cambiamos las W por Z y continuamos aplicando los procedimientos de las secciones anteriores.

EJEMPLO 2 Una restricción de igualdad

Utilizar el método simplex para maximizar $Z = x_1 + 3x_2 - 2x_3$, *sujeto a*

$$-x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -6, \quad (28)$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 \leq -2, \quad (29)$$

y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Solución: las restricciones (28) y (29) tendrán las formas indicadas en (27) [esto es, las b positivas] si multiplicamos ambos miembros de cada restricción por -1:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6, \quad (30)$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 2. \quad (31)$$

Ya que las restricciones (30) y (31) implican "=" y "≥", se incluirán dos variables artificiales, t_1 y t_2. Las ecuaciones para el problema artificial son

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad + t_1 \qquad = 6, \quad (32)$$

y

$$x_1 + x_2 - x_3 - s_2 \qquad + t_2 = 2. \quad (33)$$

Aquí el subíndice 2 en s_2 refleja el orden de las ecuaciones. La función objetivo artificial es $W = Z - Mt_1 - Mt_2$,o de manera equivalente,

$$-x_1 - 3x_2 + 2x_3 + Mt_1 + Mt_2 + W = 0, \quad (34)$$

donde M es un número positivo grande. La matriz aumentada de las ecuaciones (32), (33) y (34) es

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_2 & t_1 & t_2 & W \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline -1 & -3 & 2 & 0 & M & M & 1 & 0 \end{array}\right]. \end{array}$$

Ahora usamos operaciones elementales sobre renglón para eliminar las M de *todas* las columnas de variables artificiales. Sumando $-M$ veces el renglón 1 al renglón 3 y $-M$ veces el renglón 2 al renglón 3, obtenemos la tabla simplex inicial I:

TABLA SIMPLEX I

	x_1	x_2	x_3	s_2	t_1	t_2	W		*Cocientes*
t_1	1	2	2	0	1	0	0	6	$6 \div 2 = 3.$
variable saliente → t_2	1	**1**	-1	-1	0	1	0	2	$2 \div 1 = 2.$
W	$-1-2M$	$-3-3M$	$2-M$	M	0	0	1	$-8M$	

indicadores (renglón W, columnas x_1 a t_2)

↑ variable entrante (columna x_2)

Al efectuar los procedimientos obtenemos las tablas simplex II y III:

TABLA SIMPLEX II

$$
\begin{array}{c}
\text{variable saliente} \rightarrow \\
\\
\\
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ t_1 \\ x_2 \\ W
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_2 & t_1 & t_2 & W & & \\
-1 & 0 & \boxed{4} & 2 & 1 & -2 & 0 & & 2 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & & 2 \\
\hline
2+M & 0 & -1-4M & -3-2M & 0 & 3+3M & 1 & & 6-2M
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
\textit{Cocientes} \\ 2 \div 4 = \frac{1}{2}. \\ \\ \\
\end{array}
$$

indicadores

↑ variable entrante

TABLA SIMPLEX III

$$
\begin{array}{c}
\text{variable saliente} \rightarrow \\
\\
\\
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ x_3 \\ x_2 \\ W
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_2 & t_1 & t_2 & W & \\
-\frac{1}{4} & 0 & 1 & \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
\frac{3}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\
\hline
\frac{7}{4} & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4}+M & \frac{5}{2}+M & 1 & \frac{13}{2}
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
\textit{Cocientes} \\ \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 1. \\ \\ \\
\end{array}
$$

↗ variable entrante

indicadores

Para la S.B.F., correspondiente a la tabla III, las variables artificiales t_1 y t_2 son cero. Ahora podemos eliminar las columnas t_1 y t_2, y cambiar las W por Z. Continuamos para obtener la tabla simplex IV:

TABLA SIMPLEX IV

$$
\begin{array}{c}
\\ s_2 \\ x_2 \\ Z
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & s_2 & Z & \\
-\frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
\frac{1}{2} & 0 & 5 & 0 & 1 & 9
\end{array}\right].
$$

indicadores

Ya que todos los indicadores son no negativos, hemos llegado a la tabla final. El valor máximo de Z es 9, que ocurre cuando $x_1 = 0, x_2 = 3$ y $x_3 = 0$.

■

Regiones factibles vacías

Es posible que el método simplex termine y no todas las variables artificiales sean iguales a cero. Puede demostrarse que en esta situación *la región factible del problema original es vacía*, y en consecuencia *no existe solución óptima*. El ejemplo siguiente lo ilustrará.

EJEMPLO 3 Una región factible vacía

Utilizar el método simplex para maximizar $Z = 2x_1 + x_2$ *sujeta a*

$$-x_1 + x_2 \geq 2, \qquad (35)$$

$$x_1 + x_2 \leq 1,$$

y $x_1, x_2 \geq 0$.

Solución: ya que la restricción (35) es de la forma $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$, donde $b_1 \geq 0$, aparecerá una variable artificial. Las ecuaciones por considerar son

$$-x_1 + x_2 - s_1 \quad + t_1 = 2, \tag{36}$$

y

$$x_1 + x_2 \quad + s_2 \quad = 1, \tag{37}$$

donde s_1 y s_2 son variables de holgura, y t_1 es artificial. La función objetivo artificial es $W = Z - Mt_1$, o de manera equivalente,

$$-2x_1 - x_2 + Mt_1 \; + W = 0. \tag{38}$$

La matriz aumentada de las ecuaciones (36), (37) y (38) es

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & W \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline -2 & -1 & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}\right]. \end{array}$$

Las tablas simplex aparecen a continuación:

TABLA SIMPLEX I

$$\begin{array}{r} \\ t_1 \\ \text{variable saliente} \rightarrow s_2 \\ W \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & W \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline -2+M & -1-M & M & 0 & 0 & 1 & -2M \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \textit{Cocientes} \\ 2 \div 1 = 2. \\ 1 \div 1 = 1. \\ \\ \end{array}$$

↑ variable entrante; indicadores (bajo $-2+M$, $-1-M$, M, 0, 0)

TABLA SIMPLEX II

$$\begin{array}{r} \\ t_1 \\ x_2 \\ W \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & W \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} -2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline -1+2M & 0 & M & 1+M & 0 & 1 & 1-M \end{array}\right]. \end{array}$$

indicadores (bajo $-1+2M$, 0, M, $1+M$, 0)

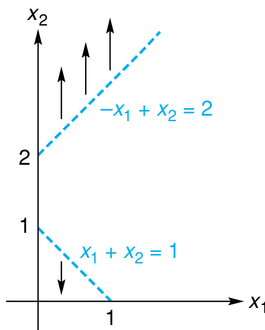


FIGURA 7.25 Región factible vacía (no existe solución).

Ya que M es un número positivo grande, los indicadores en la tabla simplex II son no negativos, de modo que el método simplex termina. El valor de la variable artificial t_1 es 1. Por tanto, como se estableció anteriormente, la región factible del problema original es vacía y, entonces, no existe solución. Este resultado puede obtenerse de manera geométrica. La figura 7.25 muestra las gráficas de $-x_1 + x_2 = 2$ y $x_1 + x_2 = 1$ para $x_1, x_2 \geq 0$. Puesto que no existe un punto (x_1, x_2) que al mismo tiempo esté por encima de la recta $-x_1 + x_2 = 2$ y por debajo de $x_1 + x_2 = 1$, tal que $x_1, x_2 \geq 0$, la región factible es vacía y, por tanto, no existe solución. ■

En la siguiente sección utilizaremos el método simplex para resolver problemas de minimización.

Ejercicio 7.6

Utilice el método simplex para resolver los problemas siguientes.

1. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2,$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$
$$-x_1 + x_2 \geq 4,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

2. Maximizar

$$Z = 3x_1 + 4x_2,$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 8,$$
$$x_1 + 6x_2 \geq 12,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2 - x_3,$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5,$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 \geq 1,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

4. Maximizar

$$Z = x_1 - x_2 + 4x_3,$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 9,$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 6,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

5. Maximizar

$$Z = 4x_1 + x_2 + 2x_3,$$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 4,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

6. Maximizar

$$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3,$$

sujeta a

$$x_2 - 2x_3 \geq 5,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 8,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

7. Maximizar

$$Z = x_1 - 10x_2,$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 \leq 1,$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 8,$$
$$x_1 + x_2 \geq 5,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

8. Maximizar

$$Z = x_1 + 4x_2 - x_3,$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 5,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 7,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

9. Maximizar

$$Z = 3x_1 - 2x_2 + x_3,$$

sujeta a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 2,$$
$$x_1 - x_2 - x_3 \leq -6,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

10. Maximizar

$$Z = x_1 + 4x_2,$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 8,$$
$$x_1 + 6x_2 \geq 12,$$
$$x_2 \geq 2,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

11. Maximizar

$$Z = -3x_1 + 2x_2,$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 \leq 4,$$
$$-x_1 + x_2 = 4,$$
$$x_1 \geq 6,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

12. Maximizar

$$Z = 2x_1 - 10x_2,$$

sujeta a

$$x_1 - 2x_2 \geq -13,$$
$$-x_1 + x_2 \geq 3,$$
$$x_1 + x_2 \geq 11,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

---

13. Producción Una compañía fabrica dos tipos de libreros: Estándar y Ejecutivo. Cada tipo requiere de tiempos para ensamblar y para acabados como se dan en la tabla siguiente:

	Tiempo de ensamblado	Tiempo para acabados	Utilidad por unidad
Estándar	1 hr	2 hr	$30
Ejecutivo	2 hr	3 hr	36

La utilidad sobre cada unidad también está indicada. El número de horas disponibles por semana en el departamento de ensamblado son 400, y en el departamento de acabados son 510. A consecuencia de un contrato con el sindicato, al departamento de acabados se le garantizan al menos 240 horas de trabajo a la semana. ¿Cuántas unidades a la semana de cada tipo debe producir la compañía para maximizar la utilidad?

14. Producción Una compañía fabrica tres productos: X, Y y Z. Cada producto requiere el uso de tiempo en las máquinas A y B como se da en la tabla siguiente:

	Máquina A	Máquina B
Producto X	1 hr	1 hr
Producto Y	2 hr	1 hr
Producto Z	2 hr	2 hr

El número de horas por semana que A y B están disponibles para la producción son 40 y 30, respectivamente. La utilidad por unidad de X, Y y Z es de $50, $60 y $75, respectivamente. La siguiente semana deben producirse al menos cinco unidades de Z. ¿Cuál debe ser el plan de producción para ese periodo para alcanzar la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?

15. Inversiones El folleto informativo de un fondo de inversión establece que todo el dinero está invertido en bonos que están considerados como A, AA y AAA; no más de 30% de la inversión total está en bonos A y AA, y al menos el 50% está en bonos AA y AAA. Los bonos A, AA y AAA, respectivamente, obtienen un 8, 7 y 6% anual. Determine los porcentajes de la inversión total que serán comprometidos a cada tipo de bono, de modo que el fondo maximice el rendimiento anual. ¿Cuál es ese rendimiento?

OBJETIVO Mostrar cómo resolver un problema de minimización cambiando la función objetivo de modo que resulte en un problema de maximización.

7.7 MINIMIZACIÓN

Hasta aquí hemos utilizado el método simplex para *maximizar* funciones objetivo. En general, para *minimizar* una función es suficiente con maximizar su negativo. Para entender por qué, considere la función $f(x) = x^2 - 4$. En la figura 7.26(a) observe que el valor mínimo de f es -4, que ocurre cuando $x = 0$. La figura 7.26(b) muestra la gráfica de $g(x) = -f(x) = -(x^2 - 4)$. Esta gráfica

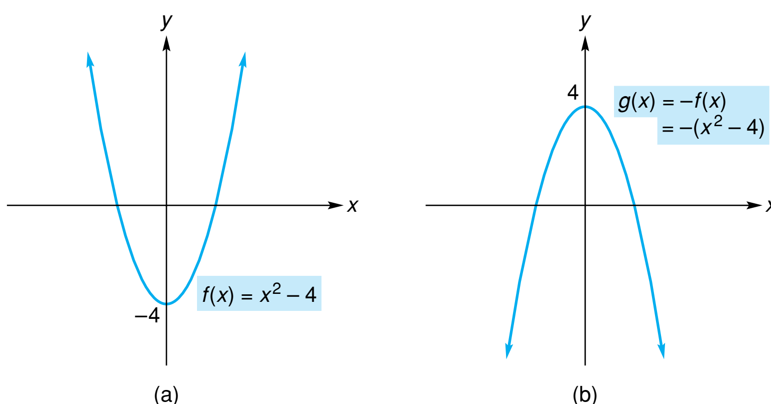


FIGURA 7.26 El valor mínimo de $f(x)$ ies igual al negativo del valor máximo de $-f(x)$.

es la reflexión con respecto al eje x de la gráfica de f. Observe que el valor máximo de g es 4, que ocurre cuando $x = 0$. Por tanto, el valor mínimo de $x^2 - 4$ es el negativo del valor máximo de $-(x^2 - 4)$. Esto es,

$$\text{mín } f = -\text{máx}(-f).$$

El problema del ejemplo 1 se resolverá de manera más eficiente en el ejemplo 4 de la sección 7.8.

■ **EJEMPLO 1 Minimización**

Utilizar el método simplex para minimizar $Z = x_1 + 2x_2$ *sujeta a*

$$-2x_1 + x_2 \geq 1, \qquad (1)$$

$$-x_1 + x_2 \geq 2, \qquad (2)$$

y $x_1, x_2 \geq 0$.

Solución: para minimizar Z podemos maximizar $-Z = -x_1 - 2x_2$. Observe que cada una de las restricciones (1) y (2) tiene la forma $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$, en donde $b \geq 0$. Por tanto, sus ecuaciones involucran dos variables de holgura s_1 y s_2, cada una con coeficiente -1 y dos variables artificiales t_1 y t_2.

$$-2x_1 + x_2 - s_1 + t_1 = 1, \qquad (3)$$
$$-x_1 + x_2 - s_2 + t_2 = 2. \qquad (4)$$

Ya que hay *dos* variables artificiales, se maximiza la función objetivo

$$W = (-Z) - Mt_1 - Mt_2,$$

donde M es un número positivo grande. En forma equivalente,

$$x_1 + 2x_2 + Mt_1 + Mt_2 + W = 0. \qquad (5)$$

La matriz aumentada de las ecuaciones (3), (4) y (5) es

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & t_1 & t_2 & W & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{rrrrrrr|r} -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & M & M & 1 & 0 \end{array}\right]. \end{array}$$

Ahora hacemos el procedimiento para obtener las tablas I, II y III.

TABLA SIMPLEX I

	x_1	x_2	s_1	s_2	t_1	t_2	W		Cocientes
variable saliente → t_1	-2	**1**	-1	0	1	0	0	1	$1 \div 1 = 1.$
t_2	1	1	0	-1	0	1	0	2	$2 \div 1 = 2.$
W	$1 + 3M$	$2 - 2M$	M	M	0	0	1	$-3M$	

↑ variable entrante (columna x_2); indicadores (fila W, columnas x_1 a t_2)

TABLA SIMPLEX II

	x_1	x_2	s_1	s_2	t_1	t_2	W		Cocientes
x_2	-2	1	-1	0	1	0	0	1	
variable saliente → t_2	-1	0	**1**	-1	-1	1	0	1	$1 \div 1 = 1.$
W	$5 - M$	0	$2 - M$	M	$-2 + 2M$	0	1	$-2 - M$	

↗ variable entrante (columna s_1); indicadores (fila W, columnas x_1 a t_2)

TABLA SIMPLEX III

	x_1	x_2	s_1	s_2	t_1	t_2	W	
x_2	-1	1	0	-1	0	1	0	2
s_1	1	0	1	-1	-1	1	0	1
W	3	0	0	2	M	$-2 + M$	1	-4

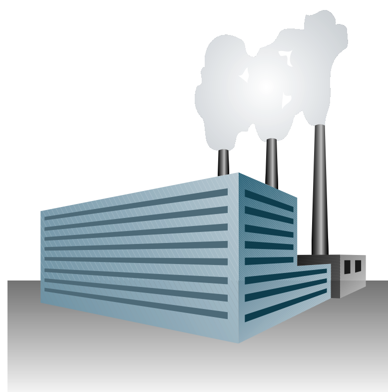
indicadores (fila W, columnas x_1 a t_2)

La S.B.F., correspondiente a la tabla III tiene ambas variables artificiales iguales a cero. De este modo las columnas t_1 y t_2 ya no son necesarias. Sin embargo, los indicadores en las columnas x_1, x_2, s_1, y s_2 son no negativos y, en consecuencia, una solución óptima ha sido alcanzada. Ya que $W = -Z$, cuando $t_1 = t_2 = 0$, el valor máximo de $-Z$ es -4. Por tanto, el valor *mínimo* de Z es $-(-4)$ o 4, que ocurre cuando $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$. ■

Aquí está un ejemplo interesante que trata del control de emisiones.

EJEMPLO 2 Reducción de emisiones de polvo

Una planta de cemento produce 2,500,000 *barriles de cemento por año. Los hornos emiten* 2 *libras de polvo por cada barril producido. Una agencia gubernamental para protección del ambiente requiere que la planta reduzca sus emisiones de polvo a no más de* 800,000 *libras anuales. Existen dos dispositivos de control de emisiones disponibles*, A *y* B. *El dispositivo* A *reduce las emisiones a* $\frac{1}{2}$ *libra por barril y su costo es de* \$0.20 *por barril de cemento producido. Para el dispositivo* B, *las emisiones son reducidas a* $\frac{1}{5}$ *libra por barril y el costo es de* \$0.25 *por barril de cemento producido. Determinar el plan de acción más económico que la planta debe tomar de modo que cumpla con el requerimiento de la agencia, y también mantenga su producción anual de* 2,500,000 *barriles de cemento.*[5]



Solución: debemos minimizar el costo anual del control de emisiones. Sean x_1, x_2 y x_3 el número anual de barriles de cemento producidos en los hornos que utilizan el dispositivo A, B y sin dispositivo, respectivamente. Entonces x_1, x_2, $x_3 \geq 0$ y el costo anual del control de emisiones, C, es

$$C = \tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + 0x_3. \tag{6}$$

Ya que se producen 2,500,000 barriles de cemento cada año,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2{,}500{,}000. \tag{7}$$

El número de libras de polvo emitidas anualmente por los hornos que utilizan el dispositivo A, el dispositivo B y sin dispositivo son $\frac{1}{2}x_1$, $\frac{1}{5}x_2$ y $2x_3$, respectivamente. Como el número total de libras de emisión de polvo no debe ser mayor que 800,000,

$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + 2x_3 \leq 800{,}000. \tag{8}$$

Para minimizar C sujeta a las restricciones (7) y (8), en donde $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, primero se maximiza $-C$ utilizando el método simplex. Las ecuaciones por considerar son

$$x_1 + x_2 + x_3 + t_1 = 2{,}500{,}000 \tag{9}$$

y

$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + 2x_3 + s_2 = 800{,}000, \tag{10}$$

en donde t_1 y s_2 son la variable artificial y la variable de holgura, respectivamente. La ecuación objetivo artificial es $W = (-C) - Mt_1$,o en forma equivalente,

$$\tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + 0x_3 + Mt_1 + W = 0, \tag{11}$$

donde M es un número positivo grande. La matriz aumentada de las ecuaciones (9), (10) y (11) es

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & s_2 & t_1 & W & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccccc|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2{,}500{,}000 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 2 & 1 & 0 & 0 & 800{,}000 \\ \hline \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & M & 1 & 0 \end{array}\right]. \end{array}$$

[5]Este ejemplo está adaptado de Robert E. Kohn, "A Mathematical Model for Air Pollution Control", *School Science and Mathematics*, 69 (1969), pp. 487-494.

Después de determinar nuestra tabla simplex inicial, procedemos y obtenemos (después de tres tablas adicionales) nuestra tabla final:

$$\begin{array}{c} \\ x_2 \\ x_1 \\ \\ -C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_2 & -C \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -5 & -\frac{10}{3} & 0 & 1{,}500{,}000 \\ 1 & 0 & 6 & \frac{10}{3} & 0 & 1{,}000{,}000 \\ \hdashline 0 & 0 & \frac{1}{20} & \frac{1}{6} & 1 & -575{,}000 \end{array}\right] \end{array}.$$

indicadores

Observe que W es reemplazada por $-C$ cuando $t_1 = 0$. El valor máximo de $-C$ es $-575{,}000$, que ocurre cuando $x_1 = 1{,}000{,}000$, $x_2 = 1{,}500{,}000$ y $x_3 = 0$. Por tanto, el costo anual *mínimo* del control de emisiones debe ser de $-(-575{,}000) = \$575{,}000$. El dispositivo A debe instalarse en hornos que produzcan 1,000,000 barriles de cemento anuales, y el dispositivo B en hornos que produzcan 1,500,000 barriles anuales.

Ejercicio 7.7

Utilice el método simplex para resolver los problemas siguientes.

1. Minimizar

$$Z = 3x_1 + 6x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geq 6, \\ x_1 + x_2 &\geq 10, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

2. Minimizar

$$Z = 8x_1 + 12x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\geq 1, \\ x_1 + 3x_2 &\geq 2, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

3. Minimizar

$$Z = 12x_1 + 6x_2 + 3x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &\geq 18, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

4. Minimizar

$$Z = x_1 + x_2 + 2x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 4, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

5. Minimizar

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6, \\ x_1 - x_3 &\leq -4, \\ x_2 + x_3 &\leq 5, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

6. Minimizar

$$Z = 4x_1 + x_2 + 2x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &\leq 3, \\ x_1 + x_3 &\leq 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

7. Minimizar

$$Z = x_1 - x_2 - 3x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4, \\ x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 &\leq 6, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

8. Minimizar

$$Z = x_1 + x_2 - 2x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\leq 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &\geq 6, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

9. Minimizar

$$Z = x_1 + 8x_2 + 5x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 8, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 2, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

10. Minimizar

$$Z = 4x_1 + 4x_2 + 6x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &\leq 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\geq 3, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

11. **Control de emisiones** Una planta de cemento produce 3,300,000 barriles de cemento por año. Los hornos emiten 2 libras de polvo por cada barril producido. La planta debe reducir sus emisiones a no más de 1,000,000 libras anuales. Hay dos dispositivos de control disponibles, A y B. El dispositivo A reducirá las emisiones a $\frac{1}{2}$ libra por barril y el costo es de $0.25 por barril de cemento producido. Para el dispositivo B, las emisiones son reducidas a $\frac{1}{4}$ libra por barril y el costo es de $0.40 por barril de cemento producido. Determine el plan de acción más económico que la planta debe tomar de modo que mantenga su producción anual de exactamente 3,300,000 barriles de cemento.

12. **Programación de envíos por camión** A causa de un incremento en los negocios, un servicio de abastecimiento encuentra que debe rentar camiones de entrega adicionales. Las necesidades mínimas son de 12 unidades de espacio con refrigeración y 12 unidades de espacio sin refrigeración. En el mercado de renta hay disponibles dos tipos de camiones. El tipo A tiene 2 unidades de espacio con refrigeración y 1 unidad de espacio sin refrigeración. El tipo B tiene 2 unidades de espacio con refrigeración y 3 unidades sin refrigeración. El costo por milla es de $0.40 para A y de $0.60 para B. ¿Cuántos camiones de cada tipo deben rentarse de modo que se minimice el costo total por milla? ¿Cuál es el costo total por milla?

13. **Costo de transportación** Un vendedor tiene tiendas en Exton y Whyton, y tiene bodegas A y B en otras dos ciudades. Cada tienda requiere del envío de exactamente 15 refrigeradores. En la bodega A hay 25 refrigeradores y en la B hay 10.

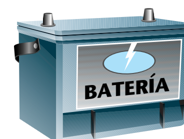


Los costos de transportación para enviar refrigeradores desde los almacenes a las tiendas están dados en la tabla siguiente:

	Exton	Whyton
Bodega A	$15	$13
Bodega B	11	12

Por ejemplo, el costo para enviar un refrigerador desde A a la tienda de Exton es de $15. ¿Cómo debe pedir el vendedor los refrigeradores de modo que los requerimientos de las tiendas se satisfagan, y los costos totales de transportación se minimicen? ¿Cuál es el costo mínimo de transportación?

14. **Compra de baterías** Un fabricante de automóviles compra baterías de dos proveedores, X y Y. El fabricante tiene dos plantas A y B, y requiere exactamente de 6000 baterías para la planta A y de exactamente 4000 para la planta B. El proveedor X cobra $30 y $32 por batería (incluyendo costos de transporte) a A y B, respectivamente. Para estos precios, X requiere que el fabricante de automóviles ordene al menos un total de 2000 baterías. Sin embargo, X no puede proveer más de 4000 baterías. El proveedor Y cobra $34 y $28 por batería a A y B, respectivamente, y requiere una orden mínima de 6000 baterías. Determine cómo debe hacer los pedidos de baterías el fabricante de automóviles, a fin de que su costo total sea mínimo. ¿Cuál es el costo mínimo?



15. **Producción de papel para envoltura** Una compañía de papel almacena su papel para envoltura en rollos de 48 pulgadas de ancho, llamados rollos de almacenamiento, y los corta en anchos más pequeños dependiendo de los pedidos de los clientes. Suponga que se recibe un pedido de 50 rollos de papel de 15 pulgadas de ancho y de 60 rollos de 10 pulgadas de ancho. De un rollo de almacenamiento la compañía puede cortar tres rollos de 15 pulgadas de ancho, y un rollo de 3 pulgadas de ancho (véase la fig. 7.27). Como el rollo de 3 pulgadas de ancho no puede utilizarse en esta orden, entonces es el recorte que se desperdicia de este rollo.

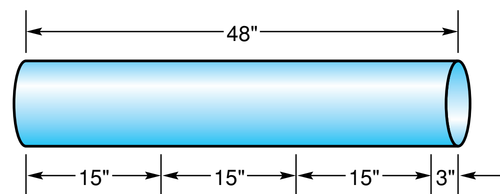


FIGURA 7.27 Diagrama para el problema 15.

Del mismo modo, de un rollo de almacenamiento se pueden cortar dos rollos de 15 pulgadas de ancho, un rollo de 10 pulgadas de ancho y otro de 8 pulgadas de ancho. En este caso el desperdicio sería de 8 pulgadas. La tabla siguiente indica el número de rollos de 15 y 10 pulgadas, junto con el desperdicio que pueden cortarse de un rollo de almacenamiento

Ancho del rollo	15 pulgadas	3	2	1	—
	10 pulgadas	0	1	—	—
Desperdicio		3	8	—	—

(a) Complete las últimas dos columnas de la tabla. (b) Suponga que la compañía tiene suficientes rollos de almacenamiento para cubrir la orden y que *al menos* 50 rollos de 15 pulgadas y 60 rollos de 10 pulgadas de ancho de papel para envoltura serán cortados. Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son los números de rollos de almacenamiento que se cortan en una de las formas descritas en las columnas de la 1 a la 4 de la tabla, respectivamente, determine los valores de las x, en tal forma que se minimice el desperdicio total. (c) ¿Cuál es la cantidad mínima de desperdicio total?

OBJETIVO Presentar de manera informal y después definir de manera formal el dual de un problema de programación lineal.

7.8 DUAL

Existe un principio fundamental llamado *dualidad*, que nos permite resolver un problema de maximización, al resolver el problema de minimización relacionado con él. Ilustremos esto.

Suponga que una compañía fabrica dos tipos de artículos, manuales y eléctricos, y cada uno requiere el uso de las máquinas A y B para su producción. La tabla 7.2 indica que un artículo manual requiere del uso de A durante 1 hora y de B durante otra hora. Un artículo eléctrico requiere de A durante 2 horas y de B durante 4 horas. Los números máximos de horas disponibles por mes para las máquinas A y B, son 120 y 180, respectivamente. La utilidad por un artículo manual es de \$10 y por un artículo eléctrico es de \$24. Suponiendo que la compañía puede vender todos los artículos que produce, determine la utilidad mensual máxima. Si x_1 y x_2 son los números de artículos manuales y eléctricos que se producen por mes, respectivamente, entonces queremos maximizar la función de utilidad mensual

$$P = 10x_1 + 24x_2,$$

TABLA 7.2

	Máquina A	Máquina B	Utilidad/unidad
Manual	1 hr	1 hr	\$10
Eléctrico	2 hr	4 hr	\$24
Horas disponibles	120	180	

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 \leq 120, \tag{1}$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 180, \tag{2}$$

y $x_1, x_2 \geq 0$. Escribiendo las restricciones (1) y (2) como ecuaciones, tenemos

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 120 \tag{3}$$

y

$$x_1 + 4x_2 + s_2 = 180,$$

en donde s_1 y s_2 son variables de holgura. En la ecuación (3), $x_1 + 2x_2$ es el número de horas que utiliza la máquina A. Como hay disponibles 120 horas para A, entonces s_1 es el número de horas disponibles que *no* se utilizan para la producción. Esto es, s_1 representa para A la capacidad no usada (horas). Del mismo modo, s_2 representa la capacidad no utilizada para B. Resolviendo este problema por el método simplex, encontramos que la tabla final es

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ P \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & P & & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 30 \\ \hdashline 0 & 0 & 8 & 2 & 1 & 1320 \end{array}\right]\end{array}. \tag{4}$$

(indicadores: 0, 0, 8, 2)

Así, la utilidad máxima mensual es de \$1320, que ocurre cuando $x_1 = 60$ y $x_2 = 30$.

Ahora, veamos la situación desde un punto de vista diferente. Suponga que la compañía desea rentar sus máquinas A y B. ¿Cuál es la renta mensual mínima que debe cobrar? Ciertamente, si el cobro es muy alto, nadie le rentaría las máquinas. Por otra parte, si el cobro es muy bajo, no le convendría rentarlas todo el tiempo. Es obvio que la renta mínima debe ser de $1320. Esto es, el mínimo que la compañía debe cobrar es la utilidad que podría tener utilizando ella misma las máquinas. Podemos llegar a este costo de renta mínimo de manera directa, resolviendo un problema de programación lineal.

Sea R el costo de la renta mensual. Para determinar R, suponemos que la compañía asigna valores monetarios a cada hora de capacidad en las máquinas A y B. Sean estos valores y_1 y y_2 dólares, respectivamente, en donde $y_1, y_2 \geq 0$. Entonces el valor mensual de la máquina A es $120y_1$ y para la B es $180y_2$. Por tanto,

$$R = 120y_1 + 180y_2.$$

El valor total del tiempo de máquina para producir un artículo manual es $1y_1 + 1y_2$. Esto debe ser al menos igual a los $10 de utilidad que la compañía puede recibir por producir dicho artículo. Si no, la compañía ganaría más dinero utilizando el tiempo de la máquina para producir un artículo manual. De acuerdo con esto,

$$1y_1 + 1y_2 \geq 10.$$

Del mismo modo, el valor total del tiempo de máquina para producir un artículo eléctrico debe ser al menos de $24:

$$2y_1 + 4y_2 \geq 24.$$

Por tanto, la compañía necesita

$$\text{minimizar } R = 120y_1 + 180y_2,$$

sujeta a

$$y_1 + y_2 \geq 10, \qquad (5)$$

$$2y_1 + 4y_2 \geq 24, \qquad (6)$$

y $y_1, y_2 \geq 0$.

Para minimizar R, se maximiza $-R$. Ya que las restricciones (5) y (6) tienen la forma $a_1y_1 + a_2y_2 \geq b$, donde $b \geq 0$, consideraremos un problema artificial. Si r_1 y r_2 son variables de holgura, y t_1 y t_2 son variables artificiales, entonces queremos maximizar

$$W = (-R) - Mt_1 - Mt_2,$$

donde M es un número positivo grande, tal que

$$y_1 + y_2 - r_1 + t_1 = 10,$$

$$2y_1 + 4y_2 - r_2 + t_2 = 24,$$

y las y, r y t son no negativas. La tabla simplex final para este problema (con las columnas de las variables artificiales eliminadas y W cambiada a $-R$) es

$$\begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ -R \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & r_1 & r_2 & -R \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 60 & 30 & 1 & -1320 \end{array}\right]. \end{array}$$

indicadores

Ya que el valor máximo de $-R$ es -1320, el valor *mínimo* de R es $[-(-1320)] = \$1320$ (como se anticipó). Esto ocurre cuando $y_1 = 8$ y $y_2 = 2$. Por tanto, hemos determinado el valor óptimo de un problema de programación lineal (maximización de utilidad), encontrando el valor óptimo de otro problema de programación lineal (minimización del costo de la renta).

Los valores $y_1 = 8$ y $y_2 = 2$ podríamos haberlos anticipado de la tabla final del problema de maximización. En (4), el indicador 8 en la columna s_1 significa que en el nivel óptimo de producción, si s_1 aumenta una unidad, entonces la utilidad P *disminuye* en 8. De este modo, 1 hora de capacidad sin uso de A disminuye la utilidad máxima en \$8. Entonces, una hora de capacidad de A tiene un valor monetario de \$8. Decimos que el **precio sombra** o **precio contable** de 1 hora de capacidad de A es de \$8. Ahora, recuerde que y_1 en el problema de la renta es el valor de 1 hora de capacidad de A. Así, y_1 debe ser igual a 8 en la solución óptima para ese problema. Del mismo modo, ya que el indicador en la columna s_2 es 2, el precio sombra de 1 hora de capacidad de B es de \$2, el cual es el valor de y_2 en la solución óptima del problema de la renta.

Ahora analicemos la estructura de nuestros dos problemas de programación lineal:

Maximizar

$$P = 10x_1 + 24x_2,$$

sujeta a

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 180 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

y $x_1, x_2 \geq 0$.

Minimizar

$$R = 120y_1 + 180y_2,$$

sujeta a

$$\left.\begin{aligned} y_1 + y_2 &\geq 10 \\ 2y_1 + 4y_2 &\geq 24 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

y $y_1, y_2 \geq 0$.

Observe que en (7) las desigualdades son todas $\leq$, pero en (8) son todas $\geq$. Los coeficientes de la función objetivo en el problema de minimización son los términos constantes en (7). Los términos constantes en (8) son los coeficientes de la función objetivo del problema de maximización. Los coeficientes de y_1 en (8) son los coeficientes de x_1 y x_2 en la primera restricción de (7); los coeficientes de y_2 en (8) son los de x_1 y x_2 en la segunda restricción de (7). El problema de minimización es llamado el *dual* del problema de maximización y viceversa.

En general, con cualquier problema de programación lineal es posible asociar otro problema de programación lineal llamado su **dual.** El problema dado se llama **primal.** Si el primal es un problema de maximización, entonces su dual es un problema de minimización. Del mismo modo, si el problema primal implica minimización, su dual implica maximización.

Cualquier problema primal de maximización puede escribirse en la forma indicada en la tabla 7.3. Observe que no existen restricciones sobre las b.[6] El correspondiente problema dual de minimización puede escribirse en la forma de la tabla 7.4. De manera similar, cualquier problema primal de minimización puede escribirse en la forma de la tabla 7.4, y su dual es el problema de maximización que se da en la tabla 7.3.

---

[6]Si una restricción de desigualdad incluye $\geq$, multiplicando ambos miembros por -1 se obtiene una desigualdad que incluye $\leq$. Si una restricción es una igualdad, puede reescribirse en términos de dos desigualdades: una que involucre $\leq$ y otra que involucre $\geq$.

TABLA 7.3 Primal (Dual)

Maximizar $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$,

sujeta a

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{array}\right\} \quad (9)$$

y $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$.

TABLA 7.4 Dual (Primal)

Maximizar $W = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$,

sujeta a

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \quad\vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{array}\right\} \quad (10)$$

y $y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0$.

Comparemos el primal y su dual en las tablas 7.3 y 7.4. Por conveniencia, cuando aquí hablemos de restricciones, nos referiremos a aquéllas en (9) o (10); no incluiremos las condiciones de no negatividad. Observe que si todas las restricciones en el problema primal involucran $\leq$ ($\geq$), entonces todas las restricciones en su dual involucran $\geq$ ($\leq$). Los coeficientes en la función objetivo del dual son los términos constantes en las restricciones del primal. Del mismo modo, los términos constantes en las restricciones del dual son los coeficientes de la función objetivo del primal. La matriz de coeficientes de los lados izquierdos de las restricciones del dual, es la *transpuesta* de la matriz de coeficientes de los lados izquierdos de las restricciones del primal. Esto es,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Si el primal involucra n variables de decisión (estructurales) y m variables de holgura, entonces el dual involucra m variables de decisión y n variables de holgura. Debe notarse que el dual del *dual* es el primal.

Existe una relación importante entre el primal y el dual:

> Si el primal tiene una solución óptima, también la tendrá el dual, y el valor óptimo de la función objetivo del primal es el *mismo* que el del dual.

Además, suponga que la función objetivo del primal es

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

Entonces

> Si s_i es la variable de holgura asociada con la i-ésima restricción en el dual, entonces el indicador en la columna s_i de la tabla simplex final del dual, es el valor de x_i en la solución óptima del primal.

Por eso podemos resolver el problema primal con sólo resolver el dual. En ocasiones esto es más conveniente que resolver de manera directa el primal.

Principios en práctica 1

Determinación del dual de un problema de maximización

Encuentre el dual del problema siguiente.

Suponga que una compañía tiene \$60,000 para la compra de materiales para fabricar tres tipos de dispositivos. La compañía tiene asignadas un total de 2000 horas para tiempo de ensamblado y 120 horas para empaquetar los dispositivos. La tabla siguiente proporciona los costos, el número de horas y la utilidad por dispositivo de cada tipo:

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Costo/dispositivo	\$300	\$220	\$180
Horas de ensambleado/dispositivo	20	40	20
Horas de empaque/dispositivo	3	1	2
Utilidad	\$300	\$200	\$200

EJEMPLO 1 Determinación del dual de un problema de maximización

Determinar el dual de lo siguiente:

$$\textit{Maximizar } Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3,$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 \leq 10,$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10,$$

and $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Solución: el primal es de la forma de la tabla 7.3. Por tanto, el dual es

$$\text{minimizar } W = 10y_1 + 10y_2,$$

sujeta a

$$y_1 + 2y_2 \geq 3,$$
$$2y_1 + 2y_2 \geq 4,$$
$$0y_1 + y_2 \geq 2,$$

y $y_1, y_2 \geq 0$.

EJEMPLO 2 Determinación del dual de un problema de minimización

Determinar el dual de lo siguiente:

$$\textit{Minimizar } Z = 4x_1 + 3x_2,$$

sujeta a

$$3x_1 - x_2 \geq 2, \quad \textbf{(11)}$$
$$x_1 + x_2 \leq 1, \quad \textbf{(12)}$$
$$-4x_1 + x_2 \leq 3, \quad \textbf{(13)}$$

y $x_1, x_2 \geq 0$.

Solución: ya que el primal es un problema de minimización, queremos que las restricciones (12) y (13) involucren $\geq$ (véase la tabla 7.4). Multiplicando ambos miembros de (12) y (13) por -1, obtenemos $-x_1 - x_2 \geq -1$ y $4x_1 - x_2 \geq -3$. De este modo las restricciones (11), (12) y (13) se convierten en

$$3x_1 - x_2 \geq 2,$$
$$-x_1 - x_2 \geq -1,$$
$$4x_1 - x_2 \geq -3.$$

El dual es

$$\text{maximizar } W = 2y_1 - y_2 - 3y_3,$$

sujeta a

$$3y_1 - y_2 + 4y_3 \leq 4,$$
$$-y_1 - y_2 - y_3 \leq 3,$$

y $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

Principios en práctica 2

Determinación del dual de un problema de minimización

Encuentre el dual del problema siguiente.

Una persona decide tomar dos diferentes suplementos dietéticos. Cada suplemento contiene dos ingredientes esenciales, A y B, para los cuales existen requerimientos mínimos diarios, y cada uno contiene un tercer ingrediente, C, que necesita minimizarse.

	Suplemento 1	Suplemento 2	Requerimiento diario
A	20 mg/oz	6 mg/oz	98 mg
B	8 mg/oz	16 mg/oz	80 mg
C	6 mg/oz	2 mg/oz	

Principios en práctica 3

Aplicación del método simplex al dual

Una compañía produce tres clases de dispositivos que requieren tres diferentes procesos de producción. La compañía ha destinado un total de 300 horas para el proceso 1, 400 horas para el proceso 2 y 600 horas para el proceso 3. La tabla siguiente da el número de horas por dispositivo para cada proceso:

	Disp. 1	Disp. 2	Disp. 3
Proceso 1	30	15	10
Proceso 2	20	30	20
Proceso 3	40	30	25

Si la utilidad es de \$30 por dispositivo 1, de \$20 por dispositivo 2 y de \$20 por dispositivo 3, entonces, usando el dual y el método simplex, determine el número de dispositivos de cada clase que la compañía debe producir para maximizar la utilidad.

EJEMPLO 3 Aplicación del método simplex al dual

Utilizar el dual y el método simplex para

$$\text{maximizar } Z = 4x_1 - x_2 - x_3,$$

sujeta a

$$3x_1 + x_2 - x_3 \leq 4,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2,$$

y $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Solución: el dual es

$$\text{minimizar } W = 4y_1 + 2y_2,$$

sujeta a

$$3y_1 + y_2 \geq 4, \quad (14)$$
$$y_1 + y_2 \geq -1, \quad (15)$$
$$-y_1 + y_2 \geq -1, \quad (16)$$

y $y_1, y_2 \geq 0$. Para utilizar el método simplex debemos tener constantes no negativas en (15) y (16). Multiplicando ambos miembros de (15) y (16) por -1, se obtiene

$$-y_1 - y_2 \leq 1, \quad (17)$$
$$y_1 - y_2 \leq 1. \quad (18)$$

Ya que (14) involucra $\geq$, se requiere una variable artificial. Las ecuaciones correspondientes de (14), (17) y (18) son, respectivamente,

$$3y_1 + y_2 - s_1 + t_1 = 4,$$
$$-y_1 - y_2 + s_2 = 1,$$

y

$$y_1 - y_2 + s_3 = 1,$$

donde t_1 es una variable artificial y s_1, s_2 y s_3 son variables de holgura. Para minimizar W, maximizamos $-W$. La función objetivo artificial es $U = (-W) - Mt_1$, donde M es un número positivo grande. Después de hacer los cálculos encontramos que la tabla simplex final es

$$\begin{array}{c} \\ y_2 \\ s_2 \\ y_1 \\ -W \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc|c} y_1 & y_2 & s_1 & s_2 & s_3 & -W & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4} \\ \hline 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{11}{2} \end{array}\right]. \end{array}$$

indicadores

El valor máximo de $-W$ es $-\frac{11}{2}$, de modo que el valor *mínimo* de W es $\frac{11}{2}$. De aquí que el valor máximo de Z también sea $\frac{11}{2}$. Note que los indicadores de las columnas s_1, s_2 y s_3 son $\frac{3}{2}$, 0 y $\frac{1}{2}$, respectivamente. Por tanto, el valor máximo de Z ocurre cuando $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 0$ y $x_3 = \frac{1}{2}$.

Este estudio muestra la ventaja de resolver el problema dual.

En el ejemplo 1 de la sección 7.7 utilizamos el método simplex para

$$\text{minimizar } Z = x_1 + 2x_2$$

sujeta a

$$-2x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$-x_1 + x_2 \geq 2,$$

y $x_1, x_2 \geq 0$. La tabla simplex inicial tiene 24 entradas e involucra dos variables artificiales. La tabla del dual sólo tiene 18 entradas y *ninguna variable artificial*, y es más fácil de manipular, como lo mostrará el ejemplo 4. Por tanto, puede ser una clara ventaja resolver el dual para determinar la solución del primal.

EJEMPLO 4 Uso del dual y el método simplex

Utilizar el dual y el método simplex para

$$\textit{minimizar } Z = x_1 + 2x_2,$$

sujeta a

$$-2x_1 + x_2 \geq 1,$$
$$-x_1 + x_2 \geq 2,$$

y $x_1, x_2 \geq 0$.

Solución: el dual es

$$\text{maximizar } W = y_1 + 2y_2,$$

sujeta a

$$-2y_1 - y_2 \leq 1,$$
$$y_1 + y_2 \leq 2,$$

y $y_1, y_2 \geq 0$. La tabla simplex inicial es la tabla I:

TABLA SIMPLEX I

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ \rightarrow s_2 \\ W \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} y_1 & y_2 & s_1 & s_2 & W & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \text{Cocientes} \\ \\ 2 \div 1 = 2. \\ \\ \end{array}$$

variable saliente: s_2 (→)

indicadores: $-1, -2, 0, 0$ (↑ variable entrante: y_2)

Continuamos para obtener la tabla II.

TABLA SIMPLEX II

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ y_2 \\ W \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} y_1 & y_2 & s_1 & s_2 & W & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]. \end{array}$$

indicadores: $1, 0, 0, 2$

Ya que en la tabla II todos los indicadores son no negativos, el valor máximo de W es 4. De aquí que el valor mínimo de Z también sea 4. Los indicadores 0 y 2 en las columnas s_1 y s_2 en la tabla II, significan que el valor mínimo de Z ocurre cuando $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$.

Ejercicio 7.8

En los problemas del 1 al 8 encuentre los duales. No los resuelva.

1. Maximizar

$$Z = 2x_1 + 3x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6, \\ -x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

2. Maximizar

$$Z = 2x_1 + x_2 - x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 2, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

3. Minimizar

$$Z = x_1 + 8x_2 + 5x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 8, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 2, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

4. Minimizar

$$Z = 8x_1 + 12x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\geq 1, \\ x_1 + 3x_2 &\geq 2, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

5. Maximizar

$$Z = x_1 - x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 13, \\ -x_1 + x_2 &\geq 3, \\ x_1 + x_2 &\geq 11, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

6. Maximizar

$$Z = x_1 - x_2 + 4x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq 6, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

7. Minimizar

$$Z = 4x_1 + 4x_2 + 6x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &\leq 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\geq 3, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

8. Minimizar

$$Z = 6x_1 + 3x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} -3x_1 + 4x_1 &\geq -12, \\ 13x_1 - 8x_2 &\leq 80, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

En los problemas del 9 al 14 resuelva utilizando los duales y el método simplex.

9. Minimizar

$$Z = 4x_1 + 4x_2 + 6x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\geq 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\geq 2, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0, \end{aligned}$$

10. Minimizar

$$Z = 2x_1 + 2x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\geq 28, \\ 2x_1 - x_2 &\geq 2, \\ -3x_1 + 8x_2 &\geq 16, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

11. Maximizar

$$Z = 3x_1 + 8x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 8, \\ x_1 + 6x_2 &\leq 12, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

12. Maximizar

$$Z = 2x_1 + 6x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 12, \\ x_1 + x_2 &\leq 8, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

13. Minimizar

$$Z = 6x_1 + 4x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_1 + x_2 &\geq 3, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

14. Minimizar

$$Z = x_1 + x_2 + 2x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &\leq 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\geq 2, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

15. Anuncios Una compañía está comparando los costos de publicidad en dos medios: periódico y radio. La tabla siguiente muestra el número de personas, por grupo de ingresos, que por cada dólar de publicidad alcanza cada uno de estos medios.

	Menos de $40,000	**$40,000 o más**
Periódico	40	100
Radio	50	25

La compañía quiere captar al menos 80,000 personas con ingresos menores de \$40,000, y al menos 60,000 con ingresos de \$40,000 o más. Utilice el dual y el método simplex para determinar las cantidades que la compañía debe gastar en publicidad en periódico y en radio, de modo que capte este número de personas con un costo mínimo. ¿Cuál es el costo mínimo de publicidad?

16. Utilice el dual y el método simplex para determinar el costo total mínimo por milla en el problema 12 del ejercicio 7.7.

17. Costo de mano de obra Una compañía paga a sus trabajadores calificados y semicalificados en su departamento de ensamblado \$14 y \$8 por hora, respectivamente. En el departamento de embarques, a los empleados se les paga \$9 por hora y a los aprendices \$6 por hora. La compañía requiere al menos de 90 trabajadores en el departamento de ensamblado y 60 empleados en el departamento de embarques. Debido a acuerdos sindicales, deben emplearse al menos el doble de trabajadores semicalificados que de calificados. También, deben contratarse al menos el doble de los empleados de embarques que de aprendices. Utilice el dual y el método simplex para determinar el número de trabajadores de cada tipo que la compañía debe emplear, de modo que el total de salarios por hora sea mínimo. ¿Cuál es el costo mínimo en salarios por hora?

7.9 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 7.1 desigualdad lineal   semiplano (abierto, cerrado)   sistema de desigualdades

Sección 7.2 restricciones   funciones lineales en x y y problema de programación lineal   función objetivo   solución factible   condiciones de no negatividad   región factible   línea de isoutilidad   vértice (punto extremo, esquina)   región factible acotada   región factible no acotada   región factible no vacía   región factible vacía   línea de isocosto   solución no acotada

Sección 7.3 soluciones óptimas múltiples

Sección 7.4 problema de programación lineal estándar   variable de holgura   variable de decisión (estructural)   solución básica factible   variable no básica   variable básica   tabla simplex   renglón objetivo   variable entrante   indicador   variable saliente   entrada pivote   método simplex   degenerada

Sección 7.6 problema artificial   variable artificial   función objetivo artificial

Sección 7.8 precio sombra   dual   primal

Resumen

La solución para un sistema de desigualdades lineales consiste en todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen de manera simultánea todas las desigualdades. De manera geométrica, para dos variables es la región común para todas las regiones determinadas por las desigualdades.

La programación lineal involucra la maximización o minimización de una función lineal (la función objetivo) sujeta a un sistema de restricciones, que son desigualdades lineales o ecuaciones lineales. Uno de los métodos para encontrar una solución óptima para una región factible no vacía es el método de los vértices. La función objetivo se evalúa en cada uno de los vértices de la región factible, y se selecciona un vértice en el que la función objetivo sea óptima.

Para un problema que involucre más de dos variables, el método de los vértices es poco práctico o imposible. En su lugar utilizamos un método matricial conocido como método simplex, que es eficiente y completamente mecánico.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 10 resuelva la desigualdad o el sistema de desigualdades.

1. $-3x + 2y > -6.$

2. $x - 2y + 6 \geq 0.$

3. $2y \leq -3.$

4. $-x < 2.$

5. $\begin{cases} y - 3x < 6, \\ x - y > -3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 2y > 4, \\ x + y > 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - y < 4, \\ y - x < 4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x > y, \\ x + y < 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x + y > -4, \\ x - y > -5, \\ x \geq 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - y > 4, \\ x < 2, \\ y < -4. \end{cases}$

En los problemas del 11 al 18 no utilice el método simplex.

11. Maximizar

$$Z = x - 2y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y - x &\le 2, \\ x + y &\le 4, \\ x &\le 3, \\ x, y &\ge 0. \end{aligned}$$

12. Maximizar

$$Z = 4x + 2y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y &\le 10, \\ x &\le 4, \\ y &\ge 1, \\ x, y &\ge 0. \end{aligned}$$

13. Minimizar

$$Z = 2x - y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x - y &\ge -2, \\ x + y &\ge 1, \\ x - 2y &\le 2, \\ x, y &\ge 0. \end{aligned}$$

14. Minimizar

$$Z = x + y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + 3y &\le 15, \\ 3x + 2y &\le 17, \\ x - 5y &\le 0, \\ x, y &\ge 0. \end{aligned}$$

15. Minimizar

$$Z = 4x - 3y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + y &\le 3, \\ 2x + 3y &\le 12, \\ 5x + 8y &\ge 40, \\ x, y &\ge 0. \end{aligned}$$

16. Minimizar

$$Z = 2x + 2y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + y &\ge 4, \\ -x + 3y &\le 18, \\ x &\le 6, \\ x, y &\ge 0. \end{aligned}$$

[7]**17.** Maximizar

$$Z = 9x + 6y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y &\le 8, \\ 3x + 2y &\le 12, \\ x, y &\ge 0. \end{aligned}$$

18. Maximizar

$$Z = 4x + y,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x + 2y &\ge 16, \\ 3x + 2y &\ge 24, \\ x, y &\ge 0. \end{aligned}$$

En los problemas del 19 al 28 utilice el método simplex.

19. Maximizar

$$Z = 4x_1 + 5x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 &\le 12, \\ x_1 + 2x_2 &\le 8, \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

20. Maximizar

$$Z = 18x_1 + 20x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 18, \\ 4x_1 + 3x_2 &\le 24, \\ x_2 &\le 5, \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

21. Minimizar

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\ge 6, \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

22. Minimizar

$$Z = x_1 + x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\ge 24, \\ x_2 &\ge 3, \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

23. Maximizar

$$Z = x_1 + 2x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 12, \\ x_1 + x_2 &\ge 5, \\ x_1 &\le 10, \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

24. Minimizar

$$Z = 2x_1 + x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 6, \\ x_1 + x_2 &\ge 1, \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

25. Minimizar

$$Z = x_1 + 2x_2 + x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &\le -1, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 12, \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

26. Maximizar

$$Z = x_1 + 3x_2 + 2x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 &\ge 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 4, \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

[8]**27.** Maximizar

$$Z = x_1 + 4x_2 + 2x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &\le 2, \\ -10x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 1, \\ x_1, x_2, x_3 &\le 0. \end{aligned}$$

[8]**28.** Minimizar

$$Z = x_1 + x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 4, \\ x_3 &\ge 1, \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

---

[7]Consulte la sección 7.3.

[8]Consulte la sección 7.5.

En los problemas 29 y 30 resuelva utilizando duales y el método simplex.

29. Minimizar

$$Z = 2x_1 + 7x_2 + 8x_3,$$

sujeta a

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 35,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 25,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

30. Maximizar

$$Z = x_1 - 2x_2,$$

sujeta a

$$x_1 - x_2 \leq 3,$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4,$$
$$4x_1 + x_2 \geq 2,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

31. Plan de producción Una compañía fabrica tres productos: X, Y y Z. Cada producto requiere del uso de tiempo de las máquinas A y B, como se indica en la tabla siguiente.

	Máquina A	Máquina B
Producto X	1 hr	1 hr
Producto Y	2 hr	1 hr
Producto Z	2 hr	2 hr

El número de horas por semana que A y B están disponibles para la producción son 40 y 34, respectivamente. La utilidad por unidad sobre X, Y y Z es de $10, $15 y $22, respectivamente. ¿Cuál debe ser el plan de producción semanal para obtener la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?

32. Repita el problema 31, si la compañía debe producir al menos un total de 24 unidades por semana.

33. Transportación de petróleo Una compañía petrolera tiene instalaciones de almacenamiento para combustible de calefacción en la ciudades A, B, C y D. Las ciudades C y D necesitan cada una exactamente 500,000 galones de combustible. La compañía determina que A y B pueden proveer cada una un máximo de 600,000 galones para satisfacer las necesidades de C y D. La tabla que se muestra a continuación proporciona los costos por galón para transportar el combustible entre las ciudades.

	Hacia	
Desde	**C**	**D**
A	$0.01	$0.02
B	0.02	0.04

¿Cómo debe distribuirse el combustible para minimizar el costo total del transporte? ¿Cuál es el costo mínimo de transporte?

34. Utilidad J. Smith, quien opera desde un puesto de pago por teléfono, vende dos tipos de dispositivos electrónicos, Zeta y Gamma. Estos dispositivos son construidos para Smith por tres amigos: A, B y C, cada uno de los cuales debe hacer parte del trabajo en cada dispositivo. El tiempo que cada uno invierte en la fabricación de cada dispositivo se da en la tabla siguiente:

	Amigo A	Amigo B	Amigo C
Zeta	2 hr	1 hr	1 hr
Gamma	1 hr	1 hr	3 hr

Los amigos de Smith tienen otro trabajo que hacer, pero determinan que cada mes pueden invertir hasta 70, 50 y 90 horas, respectivamente, para trabajar en los productos de Smith. Éste obtiene una utilidad de $5 en cada dispositivo Zeta, y $7 en cada dispositivo Gamma. ¿Cuántos dispositivos de cada tipo debe construir Smith cada mes para maximizar la utilidad, y cuál será esta utilidad máxima?

35. Formulación de una dieta Un técnico en un zoológico debe formular una dieta para cierto grupo de animales, con base en dos productos comerciales, el alimento A y el alimento B. Cada 200 gramos del alimento A contienen 16 gramos de grasa, 32 gramos de carbohidratos y 4 gramos de proteína; cada 200 gramos del alimento B contienen 8 gramos de grasa, 64 gramos de carbohidratos y 10 gramos de proteína. Los requerimientos mínimos diarios son 176 gramos de grasa, 1024 gramos de carbohidratos y 200 gramos de proteína. Si el alimento A cuesta 8 centavos por cada 100 gramos y el alimento B cuesta 22 centavos por cada 100 gramos, ¿cuántos gramos de cada alimento deben utilizarse para cumplir con los requerimientos diarios a un costo menor? (Suponga que existe un costo mínimo.)

En los problemas 36 y 37 no utilice el método simplex. Redondee sus respuestas a dos decimales.

 **36.** Minimizar

$$Z = 4.2x - 2.1y,$$

sujeta a

$$y \leq 3.4 + 1.2x,$$
$$y \leq -7.6 + 3.5x,$$
$$y \leq 18.7 - 0.6x,$$
$$x, y \geq 0.$$

 **37.** Maximizar

$$Z = 12.4x + 8.3y,$$

sujeta a

$$1.4x + 1.7y \leq 15.9,$$
$$3.6x + 2.6y \geq -10.7,$$
$$1.3x + 4.3y \leq -5.2,$$
$$x, y \geq 0.$$

Aplicación práctica

Terapias con fármacos y radiación[9]



Con frecuencia existen formas alternativas de tratamiento para pacientes a los que se les diagnostica una enfermedad particular compleja. Con cada tratamiento puede haber no sólo efectos positivos en el paciente, sino también efectos negativos, como toxicidad o malestar. Un médico debe hacer la mejor elección de estos tratamientos o combinación de ellos. Esta elección dependerá no sólo de los efectos curativos, sino también de los efectos tóxicos y de malestar.

Suponga que usted es un médico con un paciente de cáncer bajo su cuidado y existen dos posibles tratamientos disponibles: administración de medicamentos y terapia con radiación. Supongamos que la eficacia de los tratamientos está expresada en unidades comunes, digamos, unidades curativas. La medicina contiene 1000 unidades curativas por onza y la radiación proporciona 1000 unidades curativas por minuto. Sus análisis indican que el paciente debe recibir al menos 3000 unidades curativas.

Sin embargo, un grado de toxicidad está implícito en cada tratamiento. Suponga que los efectos tóxicos de cada tratamiento están medidos en una unidad común de toxicidad, digamos, una unidad tóxica. La medicina contiene 400 unidades tóxicas por onza y la radiación produce 1000 unidades tóxicas por minuto. Con base en sus estudios, usted cree que el paciente no debe recibir más de 2000 unidades tóxicas.

Además, cada tratamiento implica un grado de malestar al paciente. La medicina provoca el triple de malestar por onza que la radiación por minuto.

La tabla 7.5 resume la información. El problema que se le plantea es determinar las dosis de la medicina y radiación que pueden satisfacer los requerimientos curativos y de toxicidad y, al mismo tiempo, minimizar el malestar al paciente.

TABLA 7.5

	Unidades curativas	Unidades Tóxicas	Malestar relativo
Medicina (por onza)	1000	400	3
Radiación (por minuto)	1000	1000	1
Requerimiento	≥3000	≤2000	

Sea x_1 el número de onzas de la medicina y x_2 el de minutos de radiación que serán administrados. Entonces usted quiere minimizar el malestar D dado por

$$D = 3x_1 + x_2,$$

sujeta a la condición curativa

$$1000x_1 + 1000x_2 \geq 3000$$

y a la condición de toxicidad

$$400x_1 + 1000x_2 \leq 2000,$$

donde $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Debe reconocer que éste es un problema de programación lineal. Al graficar se obtiene la región factible de la figura 7.28. Los vértices son

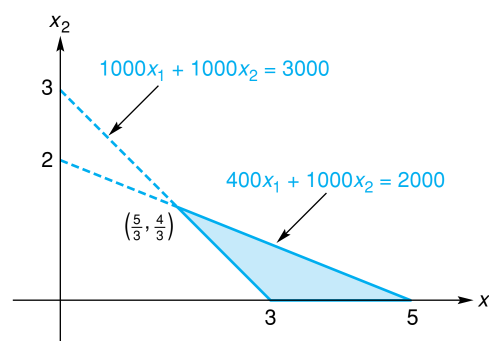


FIGURA 7.28 Región factible para el problema de las terapias con fármacos y radiación.

[9]Adaptado de R. S. Ledley y L. B. Lusted, "Medical Diagnosis and Modern Decision Making", *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, vol. XIV; *Mathematical Problems in the Biological Sciences* (American Mathematical Society, 1962).

$(3, 0)$, $(5, 0)$ y $(\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$. Evaluando D en cada vértice se obtiene lo siguiente:

$$\text{en } (3,0), \quad D = 3(3) + 0 = 9,$$

$$\text{en } (5,0), \quad D = 3(5) + 0 = 15,$$

y

$$\text{en } (\tfrac{5}{3}, \tfrac{4}{3}), \quad D = 3(\tfrac{5}{3}) + \tfrac{4}{3} = \tfrac{19}{3} \approx 6.3.$$

Puesto que D es mínimo en $(\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$, usted debe prescribir un tratamiento de $\frac{5}{3}$ de onza de la medicina y $\frac{4}{3}$ minutos (1 minuto y 20 segundos) de radiación. Así, al resolver un problema de programación lineal, ha determinado el "mejor" tratamiento para el paciente.

El Instituto Nacional de Salud de Estados Unidos tiene un sitio en la Web, `www.nih.gov/health`, que contiene información actualizada en diversas áreas relacionadas con la salud.

También podría querer buscar en la Web sitios que utilicen *applets* para demostrar el método simplex. Sólo introduzca "método simplex" y "applet" en cualquier buscador de Internet.

Ejercicios

1. Suponga que para un paciente están disponibles tratamientos medicinales y por radiación. Cada onza de medicamento contiene 500 unidades curativas y 400 unidades tóxicas. Cada minuto de radiación proporciona 1000 unidades curativas y 600 unidades tóxicas. El paciente requiere al menos de 2000 unidades curativas y puede tolerar no más de 1400 unidades tóxicas. Si cada onza de la medicina provoca el mismo malestar que cada minuto de radiación, determine las dosis de medicamento y radiación de modo de minimizar el malestar en el paciente.

2. Suponga que el medicamento A, el B y la terapia con radiación son tratamientos disponibles para un paciente. Cada onza de la medicina A contiene 600 unidades curativas y 500 tóxicas. Cada onza de la medicina B contiene 500 unidades curativas y 100 tóxicas. Cada minuto de radiación proporciona 1000 unidades curativas y 1000 tóxicas. El paciente requiere al menos de 3000 unidades curativas y puede tolerar no más de 2000 unidades tóxicas. Si cada onza de A y cada minuto de radiación provocan el mismo malestar, y cada onza de B provoca dos veces más malestar que cada onza de A, determine las dosis de medicamentos y radiación de modo de minimizar el malestar para el paciente. Utilice el método simplex.

3. ¿Usted cuál método cree que es más fácil de efectuar en programación lineal, el método simplex o un método geométrico asistido por la tecnología? Dé razones para su respuesta.

CAPÍTULO 8

Matemáticas financieras

Para personas a quienes les gustan los automóviles y pueden permitirse comprar uno, un viaje a una concesionaria de automóviles puede ser muy divertido. Sin embargo, comprar un automóvil también tiene un lado que a la gente no le gusta: la negociación. El "estira y afloja" verbal con el vendedor es especialmente difícil, si el comprador está planeando comprar en un plan a plazos y no comprende los números que se están cotizando.

Por ejemplo, ¿cómo el hecho de que el vendedor esté ofreciendo el automóvil en $12,800 se traduce en pagos mensuales de $281.54? La respuesta es mediante la amortización. El término proviene del francés, de la raíz latina *mort-*, que significa "muerte"; de ésta también se obtiene *mortal* y *mortificado*. Una deuda que se paga gradualmente, al final "se mata" y el plan de pagos para hacer esto se denomina plan de amortización. El plan está determinado por una fórmula que usted aprenderá en la sección 8.3 y aplicará en la sección 8.4.

Mediante dicha fórmula podemos calcular el pago mensual para el automóvil. Si uno hace un pago inicial de $900 sobre un automóvil de $12,800, y paga el resto en un plazo de cuatro años al 4.8% de interés anual compuesto mensualmente, el pago mensual para el capital y el interés sólo debe ser de $272.97. Si el pago es mayor que esto, podría contener cargos adicionales, como impuestos a la venta, gastos de registro o primas de seguros, acerca de los cuales el comprador debe preguntar, ya que algunos de ellos podrían ser opcionales. La comprensión de las matemáticas financieras puede ayudar al consumidor a hacer decisiones más convenientes acerca de compras e inversiones.

OBJETIVO Ampliar la noción de interés compuesto para incluir tasas efectivas y resolver problemas de interés cuya solución requiere el uso de logaritmos.

8.1 Interés compuesto

En este capítulo estudiaremos temas de finanzas que tratan del valor del dinero en el tiempo, como inversiones, préstamos, etc. En los capítulos posteriores, cuando hayamos aprendido más matemáticas, se revisarán y ampliarán algunos temas.

Primero revisaremos algunos tópicos de la sección 5.1, donde se introdujo la noción de interés compuesto. Al invertir a una determinada tasa de interés compuesto, al final de cada periodo de interés, el interés generado en ese periodo se agrega al *principal* (capital o cantidad invertida), de modo que también, genere interés en el siguiente periodo de interés. La fórmula básica para el valor (o *monto total*) de una inversión después de n periodos de interés compuesto es como sigue:

Fórmula de interés compuesto

Para un principal original de P, la fórmula

$$S = P(1 + r)^n \qquad (1)$$

proporciona el **monto total** S al final de n *periodos de interés* (o *de conversión*) a una *tasa r por periodo*.

El monto total también se llama *monto acumulado*, y la diferencia entre el monto total y el principal original, $S - P$, se llama *interés compuesto*.

Recuerde que una tasa de interés en general se establece como una *tasa anual*, llamada *tasa nominal* o *tasa de porcentaje anual* (TPA). La tasa periódica (o tasa por periodo de conversión) se obtiene dividiendo la tasa nominal entre el número de periodos de conversión por año.

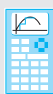
Por ejemplo, calculemos el monto total cuando se invierten \$1000 por 5 años a la tasa nominal de 8% compuesto cada trimestre. La tasa *por periodo* es de 0.08/4 y el número de periodos de interés es 5(4). De la ecuación (1) tenemos

Tenga a la mano una calculadora al leer este capítulo.

$$S = 1000\left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{5(4)}$$

$$= 1000(1 + 0.02)^{20} \approx \$1485.95.$$

Principios en práctica 1



Interés compuesto

Supóngase que usted deja una cantidad inicial de \$518 en una cuenta de ahorros durante tres años. Si el interés se capitaliza diariamente (365 veces por año), utilice una calculadora gráfica para graficar el monto compuesto S como una función de la tasa de interés nominal. Con base en la gráfica, estime la tasa de interés nominal de modo que haya \$600 después de tres años.

EJEMPLO 1 Interés compuesto

Supóngase que \$500 *crecen a* \$588.38 *en una cuenta de ahorros después de* 3 *años. Si el interés fue capitalizado semestralmente, encontrar la tasa de interés nominal, compuesta cada semestre, que fue devengada por el dinero.*

Solución: sea r la tasa semestral. Existen 2(3) = 6 periodos de interés. De la ecuación (1)

$$500(1 + r)^6 = 588.38,$$

$$(1 + r)^6 = \frac{588.38}{500},$$

$$1 + r = \sqrt[6]{\frac{588.38}{500}},$$

$$r = \sqrt[6]{\frac{588.38}{500}} - 1 \approx 0.0275.$$

Por tanto, la tasa semestral fue de 2.75%, de modo que la tasa nominal fue de $5\frac{1}{2}$% capitalizada cada semestre.

EJEMPLO 2 Duplicación del dinero

¿A qué tasa de interés nominal, compuesta cada año, el dinero se duplicará en 8 años?

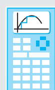
Solución: sea r la tasa a la cual un principal de P se duplica en 8 años. Entonces el monto total es $2P$. De la ecuación (1),

$$P(1 + r)^8 = 2P,$$
$$(1 + r)^8 = 2,$$
$$1 + r = \sqrt[8]{2},$$
$$r = \sqrt[8]{2} - 1 \approx 0.0905.$$

Observe que la tasa de duplicación es independiente del capital P.

Por tanto, la tasa deseada es de 9.05%.

Podemos determinar cuánto tiempo toma para que un principal dado ascienda a un monto particular utilizando logaritmos, como lo muestra el ejemplo 3.



Principios en práctica 2
Interés compuesto

Supóngase que usted deja un monto inicial de \$520 en una cuenta de ahorros a una tasa anual de 5.2% capitalizable diariamente (365 días por año). Utilice una calculadora gráfica para graficar la cantidad compuesta S como una función de los periodos de interés. Con base en la gráfica, estime cuánto tiempo pasa para que la cantidad se convierta en \$750.

EJEMPLO 3 Interés compuesto

¿Cuánto tiempo tomará para que \$600 *se conviertan en* \$900 *a una tasa anual de* 6% *compuesto trimestralmente?*

Solución: la tasa periódica es $r = 0.06/4 = 0.015$. Sea n el número de periodos de interés que le toma a un principal de $P = 600$ ascender a $S = 900$. Entonces de la ecuación (1),

$$900 = 600(1.015)^n, \tag{2}$$
$$(1.015)^n = \frac{900}{600},$$
$$(1.015)^n = 1.5.$$

Para resolver para n, primero tomamos el logaritmo natural de ambos miembros:

$$\ln(1.015)^n = \ln 1.5,$$
$$n \ln 1.015 = \ln 1.5 \qquad \text{ya que } \ln m^r = r \ln m,$$
$$n = \frac{\ln 1.5}{\ln 1.015} \approx 27.233.$$

El número de años que corresponden a 27.233 periodos de interés trimestral es $27.233/4 \approx 6.8083$, que es alrededor de 6 años y 9 meses y medio. En realidad, el principal no asciende a \$900 sino hasta pasados 7 años, ya que el interés se capitaliza cada trimestre.

Tecnología

Podemos resolver la ecuación (2) del ejemplo 3 haciendo las gráficas de

$$Y_1 = 900$$

$$Y_2 = 600(1.015)\text{^}X$$

y encontrando la intersección (véase la fig. 8.1).

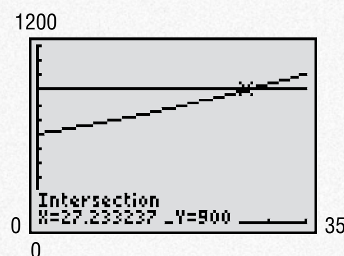


FIGURA 8.1 Solución del ejemplo 3.

Tasa efectiva

Si se invierten P dólares a una tasa nominal de 10% capitalizable cada trimestre, durante un año, el principal devengará más de 10% en ese año. De hecho, el interés compuesto es

$$S - P = P\left(1 + \frac{0.10}{4}\right)^4 - P = [(1.025)^4 - 1]P$$

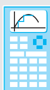
$$\approx 0.103813P,$$

lo que es alrededor de 10.38% de P. Esto es, 10.38% es la tasa aproximada de interés compuesto *cada año* que realmente se genera, la que se conoce como **tasa efectiva** de interés o **rendimiento.** La tasa efectiva es independiente de P. En general, la tasa efectiva de interés sólo es la tasa de interés *simple* generado durante un periodo de 1 año. Por tanto, hemos mostrado que la tasa nominal de 10% compuesta cada trimestre es equivalente a una tasa efectiva de 10.38%. Siguiendo el procedimiento anterior, podemos generalizar nuestro resultado:

Tasa efectiva

La **tasa efectiva** r_e que es equivalente a una tasa nominal de r compuesta n veces durante un año está dada por

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1. \quad (3)$$



Principios en práctica 3

Tasa efectiva

Una inversión se capitaliza mensualmente. Utilice una calculadora gráfica para hacer la gráfica de la tasa efectiva r_e como una función de la tasa nominal r. Después utilice la gráfica para determinar la tasa nominal que es equivalente a una tasa efectiva de 8%.

EJEMPLO 4 Tasa efectiva

¿Cuál tasa efectiva es equivalente a una tasa nominal de 6% compuesta (a) semestralmente y (b) trimestralmente?

Solución:

a. De la ecuación (3) la tasa efectiva es

$$r_e = \left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^2 - 1 = (1.03)^2 - 1 = 0.0609, \quad \text{o} \quad 6.09\%.$$

b. La tasa efectiva es

$$r_e = \left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^4 - 1 = (1.015)^4 - 1 \approx 0.061364, \quad \text{o} \quad 6.14\%.$$

Para una tasa nominal dada r, el ejemplo 4 ilustra que la tasa efectiva aumenta conforme el número, n, de periodos de interés por año aumenta. Sin embargo, en la sección 9.3, la tasa efectiva que puede obtenerse es $e^r - 1$.

EJEMPLO 5 Tasa efectiva

¿A qué monto ascenderán \$12,000 *en* 15 *años, si se invierten a una tasa efectiva de* 5%?

Solución: ya que la tasa efectiva es compuesta cada año, tenemos

$$S = 12{,}000(1.05)^{15} \approx \$24{,}947.14.$$

EJEMPLO 6 Duplicación de dinero

¿Cuántos años tomará que el dinero se duplique a la tasa efectiva de r?

Solución: sea n el número de años que pasan, para que un principal de P se duplique. Entonces el monto total es $2P$. Por tanto,

$$2P = P(1 + r)^n,$$

$$2 = (1 + r)^n,$$

$$\ln 2 = n \ln(1 + r) \quad \text{(tomando logaritmos de ambos lados).}$$

De aquí que,

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + r)}.$$

Por ejemplo, si $r = 0.06$, el número de años que le toma duplicarse a un principal es

$$\frac{\ln 2}{\ln 1.06} \approx 11.9 \text{ años.}$$

Hacemos notar que cuando están disponibles tasas alternas de interés para un inversionista, se utilizan las tasas efectivas para compararlas, esto es, para determinar cuál de ellas es la "mejor". El ejemplo siguiente lo ilustra.

Principios en práctica 4

Comparación de tasas de interés

Supóngase que tiene dos oportunidades de inversión. Puede invertir \$10,000 al 11% capitalizable mensualmente, o puede invertir \$9700 al 11.25% capitalizable trimestralmente. ¿Cuál tiene una mejor tasa efectiva de interés? ¿Cuál es la mejor inversión en un periodo de 20 años?

EJEMPLO 7 Comparación de tasas de interés

Si un inversionista tiene la opción de invertir dinero al 6% *compuesto diariamente, o bien al* $6\frac{1}{8}$% *compuesto cada trimestre, ¿cuál será la mejor elección?*

Solución:

Estrategia: determinamos la tasa de interés efectiva equivalente para cada una de las tasas nominales, y después comparamos nuestros resultados.

Las tasas efectivas de interés son

$$r_e = \left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365} - 1 \approx 6.18\%$$

y

$$r_e = \left(1 + \frac{0.06125}{4}\right)^{4} - 1 \approx 6.27\%.$$

Ya que la segunda opción es la que da la tasa efectiva mayor, será la mejor elección (a pesar de que la capitalización diaria puede parecer psicológicamente más atractiva).

Ejercicio 8.1

En los problemas 1 y 2 encuentre (a) el monto total (compuesto) y (b) el interés compuesto para la inversión y tasa dadas.

1. \$6000 durante 8 años a una tasa efectiva de 8%.

2. \$750 durante 12 meses a una tasa efectiva de 7%.

En los problemas del 3 al 6 encuentre la tasa efectiva que corresponda a la tasa nominal dada. Redondee las respuestas a tres decimales.

3. 4% compuesto cada trimestre.

4. 6% compuesto cada mes.

5. 4% compuesto diariamente.

6. 6% compuesto diariamente.

7. Encuentre la tasa efectiva de interés (redondeada a tres decimales) que es equivalente a una tasa nominal de 10% capitalizada como sigue:

a. Cada año.
b. Cada semestre.
c. Cada trimestre.
d. Cada mes.
e. Diariamente.

8. Encuentre (i) el interés compuesto (redondeado a dos decimales) y (ii) la tasa efectiva (a tres decimales), si se invierten \$1000 por 5 años a una tasa anual de 7%, compuesto como sigue:

a. Cada trimestre.
b. Cada mes.
c. Cada semana.
d. Diariamente.

9. Durante un periodo de 5 años, un principal original de \$2000 ascendió a \$2950 en una cuenta donde el interés fue capitalizado trimestralmente. Determine la tasa efectiva de interés redondeada a dos decimales.

10. Suponga que durante un periodo de 6 años, \$1000 ascendieron a \$1725 en un certificado de inversión en el que el interés fue compuesto cada trimestre. Encuentre la tasa nominal de interés, compuesta cada trimestre, que fue generada. Redondee su respuesta a dos decimales.

En los problemas 11 y 12 encuentre cuántos años le tomaría duplicar un principal a la tasa efectiva dada. Dé su respuesta con un decimal.

11. 8%.

12. 5%.

13. Un certificado de depósito de \$6000 se compra en \$6000 y se mantiene durante 7 años. Si el certificado devenga una tasa efectiva de 8%, ¿cuál es su valor al final de ese periodo?

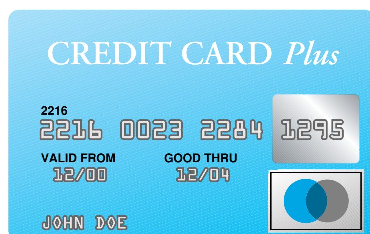
14. ¿Cuántos años tomará para que el dinero se triplique a la tasa efectiva de r?

15. **Costo de la universidad** Supóngase que asistir a cierta universidad cuesta \$21,500 en el año escolar 2000-2001. Este precio incluye matrícula, habitación, alimentación, libros y otros gastos. Suponiendo una tasa efectiva de inflación de 6% para estos costos, determine cuáles serán los costos universitarios en el año escolar 2010-2011.

16. **Costo de la universidad** Vuelva a resolver el problema 15 para una tasa de inflación de 6% compuesta semestralmente.

17. **Cargo financiero** Una compañía importante de tarjetas de crédito tiene un cargo financiero del $1\frac{1}{2}\%$ mensual sobre el saldo no pagado. (a) ¿Cuál es la tasa

nominal compuesta mensualmente? (b)¿Cuál es la tasa efectiva?



18. ¿Cuánto tiempo tomará para que un principal P se duplique, si el valor del dinero es 12% compuesto mensualmente? Dé su respuesta aproximada al mes más cercano.

19. ¿A cuánto ascenderán $2000 en 8 años, si se invirtieron a una tasa efectiva de 6% durante los primeros 4 años y de ahí en adelante al 6% compuesto semestralmente?

20. ¿Cuánto tiempo tomará para que $500 asciendan a $700, si se invierten al 8% compuesto cada trimestre?

21. Un inversionista tiene la opción de invertir una cantidad de dinero al 8% compuesto anualmente, o bien al 7.8% compuesto semestralmente. ¿Cuál es la mejor de las dos tasas?

22. ¿Cuál es la tasa nominal de interés compuesta trimestralmente que corresponde a una tasa efectiva de 4%?

23. **Cuenta de ahorros** Un banco anuncia que paga interés sobre las cuentas de ahorro a la tasa de $5\frac{1}{4}$% compuesto diariamente. Encuentre la tasa efectiva, si para determinar la *tasa diaria*, el banco supone que un año consta de (a) 360 días o (b) 365 días. Suponga que la capitalización ocurre 365 veces en un año y redondee su respuesta a dos decimales.

24. **Cuenta de ahorros** Suponga que $700 ascienden a $801.06 en una cuenta de ahorros después de 2 años. Si el interés fue capitalizado trimestralmente, encuentre la tasa nominal de interés, compuesta cada trimestre, que fue devengada por el dinero.

25. **Inflación** Como una cobertura contra la inflación, un inversionista compró una pintura en 1990 por $100,000, que se vendió en el año 2000 por $300,000. ¿Cuál es la tasa efectiva en que se apreció la pintura?

26. **Inflación** Si la tasa de inflación de ciertos bienes es del $7\frac{1}{4}$% compuesto diariamente, ¿cuántos años tomará para que el precio promedio de tales bienes se duplique?

27. **Bono de cupón cero** Un *bono de cupón cero* es un bono que se vende por menos de su valor nominal (esto es, es *descontado*) y no tiene pagos periódicos de interés. En lugar de eso, el bono se redime por su valor nominal a su vencimiento. Por tanto, en este sentido, el interés se paga al vencimiento. Suponga que un bono de cupón cero se vende por $420 y puede redimirse dentro de 14 años por su valor nominal de $1000. ¿A qué tasa nominal compuesta semestralmente el bono genera interés?

28. **Inflación** Suponga que unas personas esconden $1000 bajo el colchón para ponerlos a salvo. A consecuencia de la inflación, cada año el poder de compra del dinero es 97% de lo que fue el año previo. Después de cinco años, ¿cuál es el poder de compra de los $1000? [*Sugerencia:* considere la ecuación (1) con $r = -0.03$.]

OBJETIVO Estudiar el valor presente y resolver problemas que incluyan el valor del dinero en el tiempo por medio del uso de la ecuación del valor. Introducir el valor presente neto de flujos de efectivo.

8.2 VALOR PRESENTE

Suponga que se depositan $100 en una cuenta de ahorros que paga 6% anual. Entonces, al final de 2 años la cuenta vale

$$100(1.06)^2 = 112.36.$$

Para describir esta relación, decimos que el monto compuesto de $112.36 es el *valor futuro* de los $100, y que $100 es el *valor presente* o *actual* de los $112.36. En general, hay veces que podemos conocer el valor futuro de una inversión y deseamos encontrar su valor presente. Para obtener una fórmula para esto, resolvemos la ecuación $S = P(1 + r)^n$ para P. Esto da $P = S/(1 + r)^n = S(1 + r)^{-n}$.

Valor presente (o actual)

El principal P que debe invertirse a la tasa periódica r durante n periodos de interés de modo que el monto total sea S, está dado por

$$P = S(1 + r)^{-n} \qquad \textbf{(1)}$$

y se llama el **valor presente** de S.

EJEMPLO 1 Valor presente

Encontrar el valor presente de \$1000 *que se deben pagar dentro de* 3 *años, si la tasa de interés es de* 9% *compuesto cada mes.*

Solución: utilizamos la ecuación (1) con $S = 1000$, $r = 0.09/12 = 0.0075$ y $n = 3(12) = 36$:

$$P = 1000(1.0075)^{-36} \approx \$764.15.$$

Esto significa que \$764.15 deben invertirse al 9% compuesto cada mes para tener \$1000 dentro de 3 años.

Si la tasa de interés del ejemplo 1 fuera de 10% compuesto cada mes, el valor presente sería

$$P = 1000\left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^{-36} \approx \$741.74,$$

que es menor que la anterior. Es común que el valor presente para un valor futuro dado, disminuya conforme la tasa de interés por periodo de conversión aumenta.

EJEMPLO 2 Pago único a un fondo de inversión

Se contrata un fondo de inversión para la educación de un niño, y se establece que será por medio de un solo pago, de modo que al final de 15 *años habrá* \$50,000. *Si el fondo devenga interés a la tasa de* 7% *compuesto semestralmente, ¿cuánto dinero debe pagarse al fondo?*

Solución: queremos el valor presente de \$50,000 que se pagarán dentro de 15 años. Con base en la ecuación (1) con $S = 50{,}000$, $r = 0.07/2 = 0.035$ y $n = 15(2) = 30$, tenemos

$$P = 50{,}000(1.035)^{-30} \approx \$17{,}813.92.$$

Ecuaciones de valor

Suponga que el Sr. Smith debe al Sr. Jones dos cantidades de dinero: \$1000 pagaderos dentro de 2 años y \$600 pagaderos dentro de 5 años. Si el Sr. Smith desea saldar ahora la deuda total por medio de un solo pago, ¿de cuánto debe ser el pago? Suponga una tasa de interés de 8% compuesta cada trimestre.

El pago único x pagado ahora debe ser tal que crezca y eventualmente salde las deudas cuando deban ser pagadas. Esto es, debe ser igual a la suma de los valores presentes de los pagos futuros. Como se muestra en la figura 8.2, tenemos

$$x = 1000(1.02)^{-8} + 600(1.02)^{-20}. \quad \textbf{(2)}$$

La figura 8.2 es útil para visualizar el valor del dinero en el tiempo. Es una gran ayuda establecer una ecuación de valor.

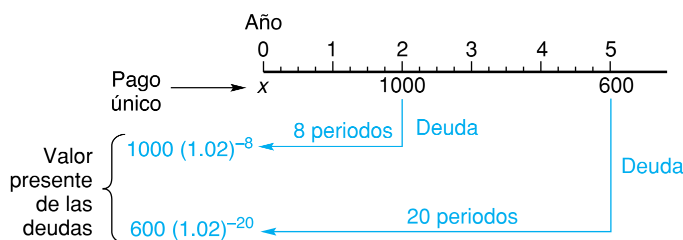


FIGURA 8.2 Reemplazo de dos pagos futuros por un solo pago ahora.

Esta ecuación se llama *ecuación de valor*. Encontramos que

$$x \approx \$1257.27.$$

Por tanto, el pago único ahora debe ser de $1257.27. Analicemos la situación con mayor detalle. Hay dos métodos diferentes de pago de la deuda: un solo pago ahora o dos pagos diferentes en el futuro. Observe que la ecuación (2) indica que el valor *actual* de todos los pagos bajo un método, debe ser igual al valor *actual* de todos lo pagos bajo el otro método. En general, esto es cierto no sólo *ahora* sino en *cualquier tiempo*. Por ejemplo, si multiplicamos ambos miembros de la ecuación (2) por $(1.02)^{20}$, obtenemos la ecuación de valores equivalentes

$$x(1.02)^{20} = 1000(1.02)^{12} + 600. \quad (3)$$

El lado izquierdo de la ecuación (3) da el valor para dentro de 5 años, a partir de ahora, del pago único (véase la fig. 8.3), mientras que el lado derecho da el valor para dentro de 5 años, a partir de ahora, de todos los pagos bajo el otro método. Resolviendo la ecuación (3) para x se obtiene el mismo resultado, $x \approx 1257.27$. En general, una **ecuación de valor** ilustra que cuando uno está considerando dos métodos para pagar una deuda (u otra transacción), en *cualquier tiempo* el valor de todos los pagos bajo uno de los métodos debe ser igual al valor de todos los pagos bajo el otro método.

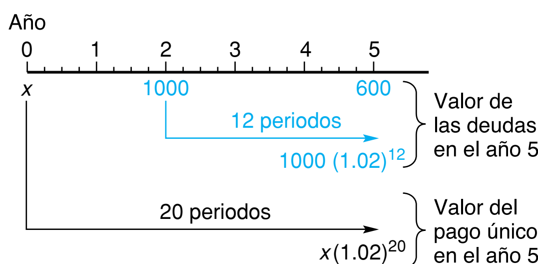


FIGURA 8.3 Diagrama para la ecuación de valor.

En ciertas situaciones una ecuación de valor puede ser más conveniente que la otra, como lo ilustra el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Ecuación de valor

Una deuda de $3000 *se debe pagar dentro de* 6 *años a partir de ahora, pero en lugar de eso será saldada por medio de tres pagos:* $500 *ahora,* $1500 *dentro de* 3 *años y un pago final al término de* 5 *años. ¿Cuál será este pago si se supone un interés de* 6% *compuesto anualmente?*

Solución: sea x el pago final a los 5 años. Por conveniencia de los cálculos, establecemos una ecuación de valor para representar la situación al final de ese tiempo, de tal manera que el coeficiente de x sea 1, como se ve en la figura 8.4. Observe que en el año 5 calculamos los valores futuros de $500, de $1500 y el valor presente de $3000. La ecuación de valor es

$$500(1.06)^5 + 1500(1.06)^2 + x = 3000(1.06)^{-1},$$

de modo que

$$x = 3000(1.06)^{-1} - 500(1.06)^5 - 1500(1.06)^2$$
$$\approx \$475.68.$$

Cuando uno está considerando elegir entre dos inversiones, debe realizar una comparación de los valores de cada inversión en cierto tiempo, como lo muestra el ejemplo 4.

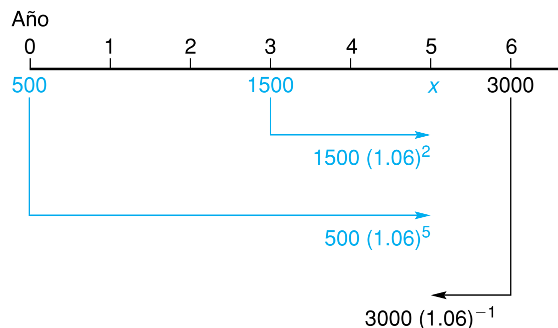


FIGURA 8.4 Valores de los pagos en el tiempo para el ejemplo 3.

EJEMPLO 4 Comparación de inversiones

Suponga que tuviera la oportunidad de invertir \$5000 *en un negocio en el que el valor de la inversión después de* 5 *años fuera de* \$6300. *Por otra parte, en lugar de eso podría poner los* \$5000 *en una cuenta de ahorros que paga un* 6% *compuesto semestralmente. ¿Cuál inversión es mejor?*

Solución: consideremos el valor de cada inversión al final de los 5 años. En ese tiempo la inversión en el negocio sería de \$6300, mientras que la cuenta de ahorros tendrá un valor de $5000(1.03)^{10} \approx \$6719.58$. Es claro que la mejor elección será poner el dinero en la cuenta de ahorros.

Valor presente neto

Si una inversión inicial producirá pagos en el futuro, los pagos se denominan **flujos de efectivo.** El **valor presente neto,** denotado como VPN, de los flujos de efectivo, se define como la suma de los valores presentes de los flujos de efectivo menos la inversión inicial. Si VPN > 0, entonces la inversión es redituable; si VPN < 0, la inversión no es redituable.

EJEMPLO 5 Valor presente neto

Suponga que puede invertir \$20,000 *en un negocio que le garantiza flujos de efectivo al final de los años* 2, 3 y 5, *como se indica en la tabla de la izquierda. Suponga una tasa de interés de* 7% *compuesto anualmente y encuentre el valor presente neto de los flujos de efectivo.*

Año	Flujo de efectivo
2	\$10,000
3	8000
5	6000

Solución: restando la inversión inicial a la suma de los valores presentes de los flujos de efectivo se obtiene

$$\begin{aligned} \text{NPV} &= 10{,}000(1.07)^{-2} + 8000(1.07)^{-3} + 6000(1.07)^{-5} - 20{,}000 \\ &\approx -\$457.31. \end{aligned}$$

Ya que el VPN < 0, la empresa comercial no es redituable si uno considera el valor del dinero en el tiempo. Sería mejor invertir los \$20,000 en un banco que pague un 7%, ya que en la empresa es equivalente a invertir sólo $\$20{,}000 - \$457.31 = \$19{,}542.69$.

Ejercicio 8.2

En los problemas del 1 al 10 encuentre el valor presente de los pagos futuros dados a la tasa de interés especificada.

1. \$6000 pagaderos dentro de 20 años al 5% compuesto por año.

2. \$3500 pagaderos dentro de 8 años al 6% efectivo.

3. \$4000 pagaderos dentro de 12 años al 7% compuesto semestralmente.

4. \$750 pagaderos dentro de 3 años al 18% compuesto mensualmente.

5. \$8000 pagaderos dentro de $7\frac{1}{2}$ años al 6% compuesto trimestralmente.

6. \$6000 pagaderos dentro de $6\frac{1}{2}$ años al 10% compuesto semestralmente.

7. \$8000 pagaderos dentro de 5 años al 10% compuesto mensualmente.

8. \$500 pagaderos dentro de 3 años al $8\frac{3}{4}$% compuesto trimestralmente.

9. \$10000 pagaderos dentro de 4 años al $9\frac{1}{2}$% compuesto diariamente.

10. \$1250 pagaderos dentro de $1\frac{1}{2}$ años al $13\frac{1}{2}$% compuesto semanalmente.

---

11. Un cuenta bancaria paga 6% de interés anual, capitalizable cada mes. ¿Cuánto debe depositarse ahora de modo que la cuenta tenga exactamente \$10,000 al final de un año?

12. Repita el problema 11 para una tasa nominal de 3% compuesto cada trimestre.

13. **Fondo de inversión** Se contrata un fondo de inversión para un niño que ahora tiene 10 años de edad, y se especifica que será por medio de un pago único, de modo que cuando cumpla 21 años reciba \$27,000. Encuentre de cuánto debe ser el pago si se supone una tasa de interés de 6% compuesto semestralmente.

14. Una deuda de \$550 que debe pagarse en 4 años y otra de \$550 pagadera dentro de 5 años se saldarán por medio de un pago único ahora. Encuentre de cuánto es el pago si se supone una tasa de interés de 10% compuesto trimestralmente.

15. Una deuda de \$600 que debe pagarse dentro de 3 años y otra de \$800 a 4 años, se saldarán por medio de un pago único dentro de 2 años a partir de ahora. Si la tasa de interés es de 8% compuesto semestralmente, ¿de cuánto será el pago?

16. Una deuda de \$5000 que debe pagarse dentro de 5 años se saldará por medio de un pago de \$2000 ahora, y un segundo pago al final de 6 años. ¿De cuánto debe ser el segundo pago si la tasa de interés es de 6% compuesto trimestralmente?

17. Una deuda de \$5000 debe pagarse dentro de 5 años a partir de ahora y otros \$5000 deben pagarse dentro de 10 años a partir de ahora, pero las dos serán saldadas por medio de un pago de \$2000 dentro de 2 años, un pago de \$4000 dentro de 4 años y un pago final al término de 6 años. Si la tasa de interés es de 2.5% compuesto anualmente, ¿de cuánto será el pago final?

18. Una deuda de \$2000 pagaderos dentro de 3 años y \$3000 pagaderos dentro de 7 años, será saldada por medio de un pago de \$1000 ahora y dos pagos iguales dentro de 1 año y 4 años a partir de ahora. Si la tasa de interés es de 6% compuesto anualmente, ¿de cuánto es cada uno de los pagos iguales?

19. **Flujo de efectivo** Una inversión inicial de \$25,000 en un negocio garantiza los siguientes flujos de efectivo.

Año	Flujo de efectivo
3	\$ 8,000
4	\$10,000
6	\$14,000

Suponga una tasa de interés de 5% compuesto semestralmente.

a. Encuentre el valor presente neto de los flujos de efectivo.
b. ¿Es redituable la inversión?

20. **Flujo de efectivo** Repita el problema 19 para la tasa de interés de 6% compuesto semestralmente.

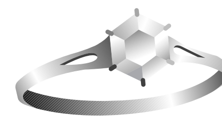
21. **Toma de decisión** Suponga que una persona tiene las opciones siguientes para invertir \$10,000:

a. Colocarlos en una cuenta de ahorros que paga el 6% compuesto semestralmente.
b. Invertir en un negocio en el que el valor de la inversión después de 8 años sea de \$16,000.

¿Cuál será la mejor elección?

22. A debe a B dos cantidades de dinero: \$1000 más interés al 7% compuesto anualmente, que será pagado dentro de 5 años, y \$2000 más interés al 8% compuesto semestralmente, que será pagado dentro de 7 años. Si ambas deudas se saldarán en un solo pago al final de 6 años, encuentre el monto del pago si el valor del dinero es de 6% compuesto trimestralmente.

23. **Incentivo de compras** Una joyería anuncia que por cada \$1000 en compras de alhajas, el comprador recibe un bono de \$1000 absolutamente sin costo. En realidad, los \$1000 son el valor al vencimiento de un bono de cupón cero (véase el problema 27 del ejercicio 8.1), que el almacén compra a un precio extremadamente reducido. Si el bono devenga interés a la tasa de 7.5% compuesto trimestralmente y vence después de 20 años, ¿cuánto le cuesta el bono al almacén?



24. Encuentre el valor presente de \$3000 pagaderos dentro de 2 años a una tasa bancaria de 8% compuesto diariamente. Suponga que el banco utiliza 360 días para determinar la tasa diaria y que hay 365 días en un año, esto es, la capitalización ocurre 365 veces en un año.

25. **Pagaré** Un *pagaré* es un convenio por escrito para pagar una cantidad de dinero, ya sea a petición expresa o a un tiempo futuro definido. Cuando un pagaré se compra por su valor presente a una tasa de interés dada, se dice que se *descuenta* el pagaré, y la tasa de interés se denomina *tasa de descuento*. Suponga que un pagaré de \$10,000 debe pagarse dentro de 8 años a partir de ahora, y se vende a una institución financiera por \$4700. ¿Cuál es la tasa de descuento nominal con capitalización trimestral?

OBJETIVO Introducir las nociones de anualidades ordinarias y anualidades anticipadas. Utilizar series geométricas para modelar el valor presente y valor futuro de una anualidad. Determinar pagos que se depositarán en un fondo de amortización.

8.3 ANUALIDADES

Sucesiones y series geométricas

En matemáticas usamos la palabra **sucesión** para describir una lista de números, llamados *términos*, que se acomodan en un orden definido. Por ejemplo, la lista

$$2, 4, 6, 8$$

es una sucesión (finita). El primer término es 2, el segundo 4 y así sucesivamente.

En la sucesión

$$3, 6, 12, 24, 48,$$

cada término, después del primero, puede obtenerse multiplicando el término anterior por 2:

$$6 = 3(2), \qquad 12 = 6(2), \qquad \text{y así sucesivamente.}$$

Esto significa que la *razón* de cada dos términos consecutivos es 2:

$$\frac{6}{3} = 2, \qquad \frac{12}{6} = 2, \qquad \text{y así sucesivamente.}$$

Llamamos a esta sucesión una *sucesión geométrica* con *razón común* 2. Observe que puede escribirse como

$$3, 3(2), 3(2)(2), 3(2)(2)(2), 3(2)(2)(2)(2)$$

o en la forma

$$3, 3(2), 3(2^2), 3(2^3), 3(2^4).$$

Con mayor generalidad, si una sucesión geométrica tiene n términos tales que el primer término es a y la razón común es la constante r, entonces la sucesión tiene la forma

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}.$$

Observe que el n-ésimo término en la sucesión es ar^{n-1}.

Definición

La sucesión de n números

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}, \text{ donde } a \neq 0,^1$$

es llamada ***sucesión geométrica*** con ***primer término a*** y ***razón constante r.***

Principios en práctica 1
Sucesiones geométricas

Una pelota de hule siempre rebota a $\frac{3}{4}$ de su altura previa. Si la pelota se deja caer desde una altura de 64 pies, ¿cuáles son las siguientes cinco alturas que alcanza la pelota?

EJEMPLO 1 Sucesiones geométricas

a. La sucesión geométrica con $a = 3$, razón común $\frac{1}{2}$ y $n = 5$ es

$$3, 3(\tfrac{1}{2}), 3(\tfrac{1}{2})^2, 3(\tfrac{1}{2})^3, 3(\tfrac{1}{2})^4,$$

o

$$3, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{3}{16}.$$

b. Los números

$$1, 0.1, 0.01, 0.001$$

forman una sucesión geométrica con $a = 1$, $r = 0.1$ y $n = 4$.

[1]Si $a = 0$, la sucesión es $0, 0, 0, \ldots, 0$. No consideraremos este caso ya que carece de interés.

Principios en práctica 2
Sucesión geométrica

Supóngase que el número de bacterias crece a una tasa de 50% cada minuto, durante seis minutos. Si la población inicial es de 500, liste la población al final de cada minuto como una sucesión geométrica.

EJEMPLO 2 Sucesión geométrica

Si se invierten \$100 a la tasa de 6% compuesto anualmente, entonces la lista de montos compuestos al final de cada año durante 8 años es

$$100(1.06), 100(1.06)^2, 100(1.06)^3, \ldots, 100(1.06)^8.$$

Ésta es una sucesión geométrica con razón común 1.06.

La suma indicada de los términos de la sucesión geométrica $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$ se llama **serie geométrica:**

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}. \quad \textbf{(1)}$$

Por ejemplo,

$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^6$$

es una serie geométrica con $a = 1$, razón común $r = \frac{1}{2}$ y $n = 7$.

Calculemos la suma s de la serie geométrica en (1):

$$s = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}. \quad \textbf{(2)}$$

Podemos expresar s en una forma más compacta. Multiplicando ambos miembros por r se obtiene

$$rs = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \quad \textbf{(3)}$$

Restando los lados correspondientes de la ecuación (3) de los de la ecuación (2) se obtiene

$$s - rs = a - ar^n,$$

$$s(1 - r) = a(1 - r^n) \quad \text{(factorizando).}$$

Dividiendo ambos lados entre $1 - r$, tenemos $s = a(1 - r^n)/(1 - r)$.

Suma de una serie geométrica

La **suma** s de una serie geométrica[2] de n términos cuyo primer término es a y su razón común r, está dada por

$$s = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}. \quad \textbf{(4)}$$

Principios en práctica 3
Suma de una serie geométrica

Después de cada rebote, una pelota rebota a $\frac{2}{3}$ de su altura previa. Si la pelota se lanza hacia arriba hasta una altura de 6 metros, ¿cuánto ha recorrido en el aire cuando golpea el piso por duodécima ocasión?

EJEMPLO 3 Suma de una serie geométrica

Encontrar la suma de la serie geométrica

$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^6.$$

Solución: aquí $a = 1$, $r = \frac{1}{2}$ y $n = 7$ (no 6). De la ecuación (4) tenemos

$$s = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{1[1 - (\frac{1}{2})^7]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{127}{128}}{\frac{1}{2}} = \frac{127}{64}.$$

[2] Esta fórmula supone que $r \neq 1$. Sin embargo, si $r = 1$, entonces $s = a + \cdots + a = na$.

Principios en práctica 4
Suma de una serie geométrica

Una compañía genera una utilidad de \$2000 en su primer mes. Suponga que la utilidad aumenta 10% cada mes durante dos años. Determine el monto total de la utilidad que la compañía genera en sus primeros dos años.

EJEMPLO 4 Suma de una serie geométrica

Encontrar la suma de la serie geométrica

$$3^5 + 3^6 + 3^7 + \cdots + 3^{11}.$$

Solución: aquí $a = 3^5$, $r = 3$ y $n = 7$. De la ecuación (4) tenemos

$$s = \frac{3^5(1 - 3^7)}{1 - 3} = \frac{243(1 - 2187)}{-2} = 265{,}599.$$

Valor presente de una anualidad

La noción de una serie geométrica es la base del modelo matemático de una *anualidad*. Básicamente, una **anualidad** es una sucesión de pagos realizados por periodos fijos a lo largo de un intervalo de tiempo. El periodo fijo es llamado **periodo de pago** y el intervalo de tiempo dado es el **plazo** de la anualidad. Un ejemplo de una anualidad es el depósito de \$100 en una cuenta de ahorros cada 3 meses durante un año.

El **valor presente de una anualidad** es la suma de los *valores presentes* de todos los pagos. Representa el monto que debe invertirse ahora para comprar los pagos que vencen en el futuro. A menos que se especifique otra cosa, supondremos que cada pago se realiza al *final* del periodo de pago; tal anualidad se conoce como **anualidad vencida** (ordinaria). También supondremos que el interés se calcula al final de cada periodo de pago.

Consideremos una anualidad de n pagos de R (dólares) cada uno, donde la tasa de interés *por periodo* es r (véase la fig. 8.5) y el primer pago se realiza en un periodo a partir de ahora. El valor presente de una anualidad está dado por

$$A = R(1 + r)^{-1} + R(1 + r)^{-2} + \cdots + R(1 + r)^{-n}.$$

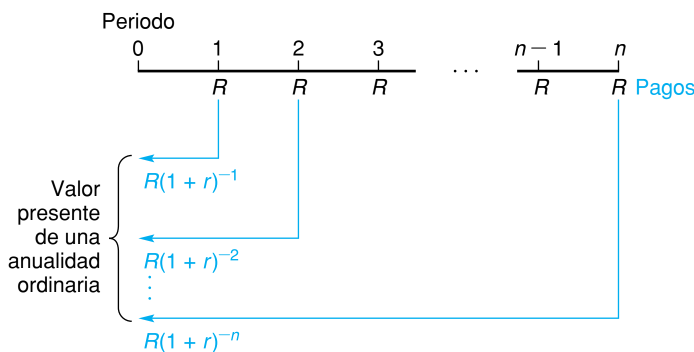


FIGURA 8.5 Valor presente de una anualidad ordinaria.

Ésta es una serie geométrica de n términos con primer término $R(1 + r)^{-1}$ y razón común $(1 + r)^{-1}$. Por lo que, de la ecuación (4) obtenemos la fórmula

$$\begin{aligned} A &= \frac{R(1 + r)^{-1}[1 - (1 + r)^{-n}]}{1 - (1 + r)^{-1}} \\ &= \frac{R[1 - (1 + r)^{-n}]}{(1 + r)[1 - (1 + r)^{-1}]} = \frac{R[1 - (1 + r)^{-n}]}{(1 + r) - 1} \\ &= R \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}. \end{aligned}$$

Valor presente de una anualidad

La fórmula

$$A = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \qquad (5)$$

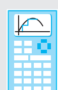
da el **valor presente** A de una anualidad vencida (ordinaria) de R dólares por periodo de pago, durante n periodos, a la tasa de interés r por periodo.

En la ecuación (5) la expresión $[1-(1+r)^{-n}]/r$ es denotada por $a_{\overline{n}|r}$, y [haciendo $R = 1$, en la ecuación (5)] representa el valor actual de una anualidad de \$1 por periodo. El símbolo $a_{\overline{n}|r}$ se lee "anualidad a n periodos a una tasa r". Por tanto, la ecuación (5) puede escribirse como sigue:

Siempre que un valor deseado de $a_{\overline{n}|r}$ no aparezca en el apéndice B, utilizaremos una calculadora para obtenerlo.

$$A = Ra_{\overline{n}|r} \qquad (6)$$

En el apéndice B están dados valores seleccionados de $a_{\overline{n}|r}$ (la mayoría son aproximaciones).



Principios en práctica 5

Valor presente de una anualidad

Dados pagos de \$500 mensuales durante seis años, utilice una calculadora gráfica para hacer la gráfica del valor presente A como una función de la tasa de interés mensual, r. Determine la tasa nominal, si el valor presente de la anualidad es de \$30,000.

EJEMPLO 5 Valor presente de una anualidad

Encontrar el valor presente de una anualidad de \$100 *por mes durante* $3\frac{1}{2}$ *años a una tasa de interés de* 6% *compuesto cada mes.*

Solución: sustituyendo en la ecuación (6), tomamos $R = 100$, $r = 0.06/12 = 0.005$ y $n = (3\frac{1}{2})(12) = 42$. Por tanto,

$$A = 100a_{\overline{42}|0.005}.$$

Del apéndice B, $a_{\overline{42}|0.005} \approx 37.798300$. De aquí que,

$$A \approx 100(37.798300) = \$3779.83.$$

Principios en práctica 6

Valor presente de una anualidad

Suponga que una persona compra una casa con un pago inicial de \$20,000 y después hace pagos trimestrales: \$2000 al final de cada trimestre durante seis años y \$3500 al final de cada trimestre durante ocho años más. Dada una tasa de interés de 6% capitalizable cada trimestre, determine el valor presente de los pagos y el precio de lista de la casa.

EJEMPLO 6 Valor presente de una anualidad

Dada una tasa de interés de 5% *compuesto anualmente, encontrar el valor presente de una anualidad de* \$2000 *que vencen al final de cada año durante* 3 *años, y* \$5000 *pagaderos de ahí en adelante al final de cada año durante* 4 *años (*véase la fig. 8.6*).*

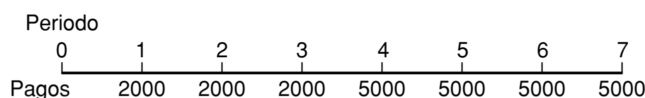


FIGURA 8.6 Anualidad del ejemplo 6.

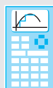
Solución: el valor presente se obtiene sumando los valores presentes de todos los pagos:

$$2000(1.05)^{-1} + 2000(1.05)^{-2} + 2000(1.05)^{-3} + 5000(1.05)^{-4} + 5000(1.05)^{-5} + 5000(1.05)^{-6} + 5000(1.05)^{-7}.$$

En lugar de evaluar esta expresión, podemos simplificar nuestro trabajo considerando que los pagos serán una anualidad de \$5000 durante 7 años, menos

una anualidad de \$3000 durante 3 años, de modo que los tres primeros pagos serán de \$2000 cada uno. Por tanto, el valor presente es

$$\begin{aligned} &5000a_{\overline{7}|0.05} - 3000a_{\overline{3}|0.05} \\ \approx\ &5000(5.786373) - 3000(2.723248) \\ \approx\ &\$20,762.12. \end{aligned}$$



Principios en práctica 7

Pagos periódicos de una anualidad

Dada una anualidad con pagos iguales al final de cada trimestre durante seis años y una tasa de interés de 4.8% compuesto trimestralmente, utilice una calculadora gráfica para hacer la gráfica del valor presente A como una función de los pagos mensuales R. Determine el pago mensual, si el valor presente de la anualidad es de \$15,000.

EJEMPLO 7 Pagos periódicos de una anualidad

Si \$10,000 se utilizan para comprar una anualidad que consiste en pagos iguales al final de cada año durante los siguientes 4 años, y la tasa de interés es de 6% compuesto cada año, determinar el monto de cada pago.

Solución: aquí $A = \$10,000$, $n = 4$, $r = 0.06$ y queremos encontrar R. De la ecuación (6),

$$10,000 = Ra_{\overline{4}|0.06}.$$

Resolviendo para R se obtiene

$$R = \frac{10,000}{a_{\overline{4}|0.06}} \approx \frac{10,000}{3.465106} \approx \$2885.91.$$

En general, la fórmula

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|r}}$$

da el pago periódico R de una anualidad vencida cuyo valor presente es A.

EJEMPLO 8 Anualidad anticipada

Las primas sobre una póliza de seguros son de \$50 por trimestre, pagaderos al inicio de cada trimestre. Si el asegurado desea pagar 1 año de primas por adelantado, ¿cuánto debe pagar suponiendo que la tasa de interés es de 4% compuesto cada trimestre?

Un ejemplo de una situación que involucra una anualidad anticipada, es la renta de un departamento para el que el primer pago se hace de manera inmediata.

Solución: queremos el valor presente de una anualidad de \$50 por periodo durante cuatro periodos a una tasa de 1% por periodo. Sin embargo, cada pago se realiza al *inicio* de un periodo de pago. Tal anualidad es llamada **anualidad anticipada.** La anualidad dada puede pensarse como un pago inicial de \$50, seguido por una anualidad vencida de \$50 durante tres periodos (véase la fig. 8.7). Por tanto, el valor presente es

$$50 + 50a_{\overline{3}|0.01} \approx 50 + 50(2.940985) \approx \$197.05.$$

Hacemos notar que la fórmula general para el **valor presente de una anualidad anticipada** es $A = R + Ra_{\overline{n-1}|r}$ o bien

$$A = R(1 + a_{\overline{n-1}|r}).$$

Principios en práctica 8

Anualidad anticipada

Una persona hace pagos de su casa de \$1200 al inicio de cada mes. Si la persona desea pagar, por anticipado, 1 año de pagos, y la tasa de interés es de 6.8% compuesto mensualmente, ¿cuánto debe pagar?

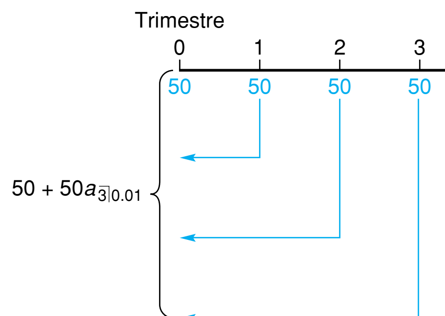


FIGURA 8.7 Anualidad anticipada (valor presente).

Monto de una anualidad

El monto (o **valor futuro**) **de una anualidad** es el valor de todos los pagos al final del plazo. Esto es, la suma de los montos acumulados de todos los pagos. Consideremos una anualidad vencida de n pagos de R (dólares) cada uno, donde la tasa de interés por periodo es r. El monto total del último pago es R, ya que ocurre al final del último periodo de interés y entonces no acumula interés

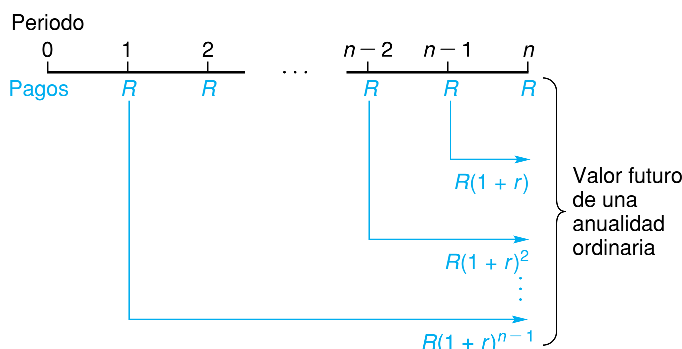


FIGURA 8.8 Valor futuro de una anualidad ordinaria.

(véase la fig. 8.8). El $(n-1)$-ésimo pago devenga interés durante un periodo, y así sucesivamente, y el primer pago devenga interés por $n - 1$ periodos. De aquí que el valor futuro de la anualidad sea

$$R + R(1 + r) + R(1 + r)^2 + \cdots + R(1 + r)^{n-1}.$$

Ésta es una serie geométrica de n términos con primer término R y razón común $1 + r$. En consecuencia, su suma S es [utilizando la ecuación (4)]

$$S = \frac{R[1 - (1 + r)^n]}{1 - (1 + r)} = R \cdot \frac{1 - (1 + r)^n}{-r} = R \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}.$$

Monto de una anualidad

La fórmula

$$S = R \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \tag{7}$$

da el **monto** S de una anualidad vencida de R (dólares) por periodo de pago, durante n periodos a la tasa de interés r por periodo.

La expresión $[(1 + r)^n - 1]/r$ se abrevia como $s_{\overline{n}|r}$; en el apéndice B se dan algunos valores aproximados de $s_{\overline{n}|r}$. Por tanto,

$$S = Rs_{\overline{n}|r}. \tag{8}$$

EJEMPLO 9 Monto de una anualidad

Encontrar el monto de una anualidad que consiste en pagos de \$50 *al final de cada 3 meses durante tres años, a la tasa de 6% compuesto cada trimestre. También encontrar el interés compuesto.*

Solución: para encontrar el monto de la anualidad utilizamos la ecuación (8) con $R = 50, n = 4(3) = 12$ y $r = 0.06/4 = 0.015$

$$S = 50s_{\overline{12}|0.015} \approx 50(13.041211) \approx \$652.06.$$

El interés compuesto es la diferencia entre el monto de la anualidad y la suma de los pagos, a saber

$$652.06 - 12(50) = 652.06 - 600 = \$52.06.$$

■ ***Principios en práctica 9***

Monto de una anualidad

Suponga que invierte en un fondo, depositando durante los siguientes 15 años \$2000 al final de cada año fiscal. Si la tasa de interés es de 5.7% compuesto anualmente, ¿cuánto tendrá al final de los 15 años?

EJEMPLO 10 Monto de una anualidad anticipada

Al inicio de cada trimestre, se depositan \$50 *en una cuenta de ahorros que paga un 6% compuesto cada trimestre. Determinar el saldo en la cuenta al final de 3 años.*

Solución: ya que los depósitos se realizan al inicio de un periodo de pago, queremos el monto de una *anualidad anticipada* como se definió en el ejemplo 8 (véase la fig. 8.9). La anualidad dada puede pensarse como una anualidad vencida de \$50 durante 13 periodos menos el pago final de \$50. Por tanto, el monto es

$$50s_{\overline{13}|0.015} - 50 \approx 50(14.236830) - 50 \approx \$661.84.$$

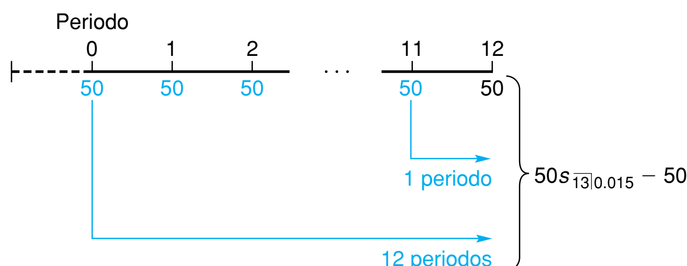


FIGURA 8.9 Valor futuro de una anualidad anticipada.

La fórmula para el **valor futuro de una anualidad anticipada** es $S = Rs_{\overline{n+1}|r} - R$ o bien

$$S = R(s_{\overline{n+1}|r} - 1).$$

■ ***Principios en práctica 10***

Monto de una anualidad anticipada

Suponga que invierte en un fondo depositando \$2000 al inicio de cada año fiscal durante cada uno de los siguientes 15 años. Si la tasa de interés es 5.7% compuesto anualmente, ¿cuánto tendrá al final de los 15 años?

Fondo de amortización

Nuestros últimos ejemplos involucran la noción de *fondo de amortización*.

EJEMPLO 11 Fondo de amortización

Un ***fondo de amortización*** *es un fondo al cual se hacen pagos periódicos con el fin de satisfacer una obligación futura. Suponga que una máquina que cuesta* \$7000 *será reemplazada al final de* 8 *años, tiempo en el cual tendrá un valor de desecho (o rescate) de* \$700. *Con el fin de disponer de dinero en ese momento para comprar una nueva máquina con el mismo costo, se establece un fondo de amortización. La cantidad en el fondo en ese momento será la diferencia entre el costo de reemplazo y el valor de desecho. Si se colocan pagos iguales al final de cada trimestre y el fondo devenga un* 8% *compuesto cada trimestre, ¿de cuánto debe ser cada pago?*

Solución: la cantidad necesaria después de 8 años es $7000 - 700 = \$6300$. Sea R el pago trimestral. Los pagos al fondo de amortización forman una anualidad con $n = 4(8) = 32$, $r = 0.08/4 = 0.02$ y $S = 6300$. Por tanto, de la ecuación (8) tenemos

$$6300 = Rs_{\overline{32}|0.02},$$

$$R = \frac{6300}{s_{\overline{32}|0.02}} \approx \frac{6300}{44.227030} \approx \$142.45.$$

En general, la fórmula

$$R = \frac{S}{s_{\overline{n}|r}}$$

proporciona el pago periódico R de una anualidad, la cual asciende a S.

EJEMPLO 12 Fondo de amortización

Una compañía arrendadora estima que si compra una máquina, ésta rendirá una ganancia neta anual de \$1000 *durante* 6 *años, después de los cuales la máquina quedará sin valor. ¿Cuánto debe pagar la compañía por la máquina si quiere ganar un* 7% *anualmente sobre su inversión y también establecer un fondo de amortización para reemplazar el precio de compra? Para el fondo, suponga pagos anuales y una tasa de* 5% *compuesto anualmente.*

Solución: sea x el precio de compra. Cada año la ganancia sobre la inversión es de $0.07x$. Ya que la máquina da una ganancia de \$1000 anuales, la cantidad restante que se colocará en el fondo cada año es $1000 - 0.07x$. Estos pagos deben acumularse a x. De aquí que

$$\begin{aligned}
(1000 - 0.07x)s_{\overline{6}|0.05} &= x,\\
1000s_{\overline{6}|0.05} - 0.07xs_{\overline{6}|0.05} &= x,\\
1000s_{\overline{6}|0.05} &= x(1 + 0.07s_{\overline{6}|0.05}),\\
\frac{1000s_{\overline{6}|0.05}}{1 + 0.07s_{\overline{6}|0.05}} &= x,\\
x &\approx \frac{1000(6.801913)}{1 + 0.07(6.801913)}\\
&\approx \$4607.92.
\end{aligned}$$

Otra manera de enfocar el problema es como sigue. Cada año los $1000 deben proporcionar un rendimiento de $0.07x$ y también un pago de $\frac{x}{s_{\overline{6}|0.05}}$, al fondo de amortización. De aquí que tenemos $1000 = 0.07x + \frac{x}{s_{\overline{6}|0.05}}$, el cual cuando se resuelve da el mismo resultado.

Ejercicio 8.3

En los problemas del 1 al 4 escriba la sucesión geométrica que satisface las condiciones dadas. Simplifique los términos.

1. $a = 64, r = \frac{1}{2}, n = 5.$

2. $a = 2, r = -3, n = 4.$

3. $a = 100, r = 1.02, n = 3.$

4. $a = 81, r = 3^{-1}, n = 4.$

En los problemas del 5 al 8 encuentre la suma de las series geométricas dadas, utilizando la ecuación (4) *de esta sección.*

5. $\frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + \cdots + (\frac{2}{3})^5.$

6. $1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + \cdots + (\frac{1}{4})^5.$

7. $1 + 0.1 + (0.1)^2 + \cdots + (0.1)^5.$

8. $(1.1)^{-1} + (1.1)^{-2} + \cdots + (1.1)^{-6}.$

En los problemas del 9 al 12 utilice el apéndice B y encuentre el valor de la expresión dada.

9. $a_{\overline{35}|0.04}.$

10. $a_{\overline{15}|0.07}.$

11. $s_{\overline{8}|0.0075}.$

12. $s_{\overline{12}|0.005}.$

En los problemas del 13 al 16 encuentre el valor presente de la anualidad (vencida) dada.

13. $500 por año, durante cinco años a la tasa de 7% compuesto anualmente.

14. $1000 cada seis meses durante cuatro años, a la tasa de 10% compuesto cada año.

15. $2000 por trimestre, durante $4\frac{1}{2}$ años a la tasa de 8% compuesto cada trimestre.

16. $1500 por mes durante 15 meses a la tasa de 9% compuesto cada mes.

En los problemas 17 y 18 determine el valor presente de la anualidad anticipada dada.

17. $800 pagaderos al inicio de cada seis meses durante seis años, a la tasa de 7% compuesto cada semestre.

18. $100 pagaderos al inicio de cada trimestre durante cinco años, a la tasa de 6% compuesto cada trimestre.

En los problemas del 19 al 22 determine el valor futuro de la anualidad (vencida) dada.

19. $2000 por mes durante tres años, a la tasa de 15% compuesto cada mes.

20. $600 por trimestre durante cuatro años, a la tasa de 8% compuesto cada trimestre.

21. $5000 por año durante 20 años, a la tasa de 7% compuesto anualmente.

22. $2000 cada seis meses durante 10 años, a la tasa de 6% compuesto cada semestre.

En los problemas 23 y 24 encuentre el valor futuro de la anualidad anticipada dada.

23. $1200 cada año durante 12 años, a la tasa de 8% compuesto anualmente.

24. $500 cada trimestre durante $5\frac{3}{4}$ años, a la tasa de 5% compuesto cada trimestre.

25. Para una tasa de interés de 6% compuesto cada mes, encuentre el valor presente de una anualidad de $50 al final de cada mes durante 6 meses, y de $75 de ahí en adelante al final de cada mes durante dos años.

26. Arrendamiento de espacio para oficinas Una compañía desea arrendar temporalmente un espacio para oficinas durante un periodo de seis meses. El pago de la renta es de $1500 mensuales por adelantado. Suponga que la compañía quiere realizar un pago total, al inicio del periodo de renta, para cubrir la renta de los seis meses. Si el valor del dinero es de 9% compuesto mensualmente, ¿de cuánto debe ser el pago?

27. Una anualidad que consiste en pagos iguales al final de cada trimestre durante 3 años será comprada por $5000. Si la tasa de interés es de 6% compuesto trimestralmente, ¿de cuánto es cada pago?

28. **Compra de equipo** Una máquina se compra en $3000 al contado, y pagos de $250 al final de cada seis meses durante seis años. Si el interés es de 8% compuesto semestralmente, encuentre el precio total de contado de la máquina.

29. Suponga que $50 se colocan en una cuenta de ahorros al final de cada mes durante 4 años. Si no se hacen depósitos posteriores, (a) ¿cuánto habrá en la cuenta después de 6 años?, y (b) ¿cuánto de esto es interés compuesto? Suponga que la cuenta de ahorros paga 6% compuesto mensualmente.

30. **Opción de liquidación de seguro** El beneficiario de una póliza de seguro tiene la opción de recibir un pago global de $135,000 o 10 pagos anuales iguales, en donde el primer pago se da de inmediato. Si el interés es al 4% compuesto anualmente, determine el monto de los pagos anuales.

31. **Fondo de amortización** En 10 años una máquina de $40,000 tendrá un valor de rescate de $4000. Una máquina nueva en ese tiempo se espera que cueste $52,000. Con el fin de disponer de fondos para cubrir la diferencia entre el costo de reemplazo y el valor de rescate, se establece un fondo de amortización en el que se colocan pagos iguales al final de cada año. Si el fondo devenga 7% compuesto anualmente, ¿de cuánto debe ser el pago?

32. **Fondo de amortización** Una compañía papelera está considerando la compra de un bosque que se estima puede dar una ganancia anual de $50,000 durante 10 años, después de lo cual no tendrá valor. La compañía desea tener un rendimiento de 8% sobre su inversión, y también establecer un fondo de amortización para reemplazar el precio de compra. Si el dinero se coloca en el fondo al final de cada año, y devenga un 6% compuesto anualmente, encuentre el precio que la compañía deberá pagar por el bosque. Redondee su respuesta a la centena de dólar más cercana.

33. **Fondo de amortización** Con el fin de reemplazar en el futuro una máquina, una compañía está depositando pagos iguales en un fondo de amortización al final de cada año, de modo que después de 10 años el monto del fondo sea de $25,000. El fondo devenga un 6% compuesto anualmente. Después de 6 años, la tasa de interés aumenta, de manera que el fondo paga el 7% compuesto anualmente. A causa de la alta tasa de interés, la compañía disminuye la cantidad de los pagos restantes. Encuentre el monto de los nuevos pagos. Redondee su respuesta al dólar más cercano.

34. A pide prestada a B la cantidad de $5000 y acuerda pagarle $1000 al final de cada año durante 5 años y un pago al final del sexto año. ¿De cuánto debe ser el último pago si el interés es de 8% compuesto anualmente?

En los problemas del 35 al 43 utilice las fórmulas siguientes.

$$a_{\overline{n}|r} = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r},$$

$$s_{\overline{n}|r} = \frac{(1+r)^{-n}-1}{r},$$

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|r}} = \frac{Ar}{1-(1+r)^{-n}} = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1},$$

$$R = \frac{S}{s_{\overline{n}|r}} = \frac{Sr}{(1+r)^n-1}.$$

35. Encuentre $s_{\overline{60}|0.017}$ con cinco decimales.

36. Encuentre $a_{\overline{10}|0.073}$ con cinco decimales.

37. Encuentre $700a_{\overline{360}|0.0125}$ con dos decimales.

38. Encuentre $1000s_{\overline{120}|0.01}$ con dos decimales.

39. En una cuenta de ahorros se depositarán pagos iguales al final de cada trimestre durante 5 años, de modo que al final de ese tiempo haya $3000. Si el interés es al $5\frac{1}{2}\%$ compuesto trimestralmente, encuentre el pago de cada trimestre.

40. **Beneficios de seguros** Suponga que los beneficios de un seguro de $25,000 se utilizan para comprar una anualidad de pagos iguales al final de cada mes durante 5 años. Si el interés es a la tasa de 10% compuesto mensualmente, encuentre el monto de cada pago.

41. **Lotería** Mary Jones ganó una lotería estatal por $4,000,000 y recibirá un cheque por $200,000 ahora y uno similar cada año durante los siguientes 19 años. Para garantizar estos 20 pagos, la Comisión Estatal de Loterías compró una anualidad anticipada a la tasa de interés de 10% compuesto anualmente. ¿Cuánto le costó la anualidad a la Comisión?

42. **Opción de plan de pensión** Suponga que un empleado se jubila y puede elegir entre dos opciones de beneficios de acuerdo con el plan de pensiones de su compañía. La opción A consiste en un pago garantizado de $450 al final de cada mes durante 10 años. De manera alterna, con la opción B el empleado recibe un solo pago que es igual al valor presente de los pagos descritos en la opción A.

a. Encuentre la suma de los pagos de la opción A.
b. Encuentre el pago total de la opción B utilizando una tasa de interés de 6% compuesto mensualmente. Redondee su respuesta al dólar más cercano.

43. Un inicio anticipado de inversión Una agente de seguros ofrece servicios a quienes están preocupados acerca de su plan financiero personal para su retiro. Para enfatizar las ventajas de un comienzo anticipado de inversiones, ella destaca que una persona de 25 años que ahorre $2000 anuales durante 10 años (y no haga más contribuciones después de la edad de 34 años), ganará más que si espera 10 años para ahorrar $2000 anuales desde la edad de 35 años hasta su jubilación, a los 65 (un total de 30 contribuciones). Encuentre la utilidad neta (monto acumulado − contribución total) a la edad de 65 años para ambas situaciones. Suponga una tasa anual efectiva de 7% y que los depósitos se realizan al inicio de cada año. Redondee las respuestas al dólar más cercano.

OBJETIVO Aprender cómo amortizar un préstamo y establecer un programa de amortización.

8.4 Amortización de préstamos

Suponga que un banco hace un préstamo por $1500 y cobra un interés a la tasa nominal de 12% compuesto mensualmente. Los $1500 más el interés serán saldados en pagos iguales de R dólares al final de cada mes durante tres meses. En esencia, al pagar al prestatario $1500, el banco está comprando una anualidad de tres pagos de R cada uno. Utilizando la fórmula del ejemplo 7 de la sección anterior, encontramos que el pago mensual R está dado por

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|r}} = \frac{1500}{a_{\overline{3}|0.01}} \approx \frac{1500}{2.940985} \approx \$510.0332.$$

Redondearemos el pago a $510.03, que puede resultar en un pago final ligeramente mayor. Sin embargo, no es raro para un banco redondear *hacia arriba* al centavo más cercano, en cuyo caso el pago final puede ser menor que los otros pagos.

El banco puede considerar cada pago como si consistiera en dos partes: (1) interés sobre el saldo insoluto, y (2) el pago de parte del préstamo. Esto se llama **amortización.** Un préstamo es **amortizado** cuando parte de cada pago se utiliza para pagar el interés y la parte restante para reducir el saldo insoluto. Ya que cada pago reduce el saldo insoluto, la parte del interés de un pago decrece conforme el tiempo avanza. Analicemos el préstamo descrito anteriormente.

Al final del primer mes el deudor paga $510.03. El interés sobre el saldo insoluto es $0.01(1500) = \$15$. El saldo del pago, $510.03 - 15 = \$495.03$, es entonces aplicado para reducir el adeudo. De aquí el saldo insoluto es $1500 - 495.03 = \$1004.97$. Al final del segundo mes, el interés será $0.01(1004.97) \approx \$10.05$. Por tanto, la cantidad del préstamo saldada será $510.03 - 10.05 = \$499.98$ y el saldo insoluto será $1004.97 - 499.98 = \$504.99$. El interés que se paga al final del tercer mes será $0.01(504.99) \approx \$5.05$ de modo que el monto del préstamo saldado es $510.03 - 5.05 = \$504.98$. Esto dejaría un saldo de $504.99 - 504.98 = \$0.01$, de modo que el último pago será de $510.04 y la deuda estará saldada. Como se dijo antes, el pago final se ajusta para compensar los errores de redondeo. Un análisis de cómo se maneja cada pago del préstamo puede presentarse en una tabla llamada **plan de amortización** (véase la tabla 8.1). El interés total pagado es de $30.10, que con frecuencia se llama **cargo financiero.**

Muchos estados de cuenta anuales de una hipoteca se emiten en la forma de una tabla de amortización.

Cuando uno está amortizando un préstamo, al inicio de cualquier periodo el principal adeudado es el valor presente de los pagos restantes. Utilizando este hecho junto con nuestro desarrollo previo, obtuvimos las fórmulas de la tabla 8.2 que describen la amortización de un préstamo de A dólares, a una tasa de r por periodo, por n pagos iguales de R dólares cada uno, y que tales pagos se hacen al final de cada periodo. En particular, nótese que la fórmula 1 para el

TABLA 8.1 Plan de amortización

Periodo	Saldo insoluto al inicio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Principal saldo al final del periodo
1	$1500	$15	$510.03	$495.03
2	1004.97	10.05	510.03	499.98
3	504.99	5.05	510.04	504.99
Total		30.10	1530.10	1500.00

pago periódico R involucra $a_{\overline{n}|r}$ el cual, como recordará, está definido como $[1 - (1 + r)^{-n}]/\text{r}$.

TABLA 8.2 Fórmulas de amortización

1. Pago periódico: $R = \dfrac{A}{a_{\overline{n}|r}} = A \cdot \dfrac{r}{1 - (1 + r)^{-n}}$

2. Saldo insoluto al inicio del k-ésimo periodo:

$$Ra_{\overline{n-k+1}|r} = R \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n+k-1}}{r}$$

3. Interés en el k-ésimo pago: $Rra_{\overline{n-k+1}|r}$

4. Principal contenido en el k-ésimo pago: $R[1 - ra_{\overline{n-k+1}|r}]$

5. Interés total pagado: $R(n - a_{\overline{n}|r})$, o $nR - A$

EJEMPLO 1 Amortización de un préstamo

Una persona amortiza un préstamo de $170,000 *para una casa nueva, por medio de una hipoteca a* 20 *años y a una tasa de* 7.5% *compuesto mensualmente. Determinar (a) el pago mensual, (b) los cargos totales por intereses, y (c) el saldo insoluto después de* 5 *años.*

Solución:

a. El número de periodos de pago son $n = 12(20) = 240$, la tasa de interés por periodo es $r = 0.075/12 = 0.00625$ y $A = 170{,}000$. Con base en la fórmula 1 de la tabla 8.2, el pago mensual R es $170{,}000/a_{\overline{240}|0.00625}$. Como $a_{\overline{240}|0.00625}$ no está en el apéndice B, utilizamos la siguiente fórmula equivalente y una calculadora:

$$R = 170{,}000\left[\frac{0.00625}{1 - (1.00625)^{-240}}\right]$$
$$\approx \$1369.51.$$

b. Con base en la fórmula 5, los cargos totales por interés son

$$240(1369.51) - 170{,}000 = 328{,}682.40 - 170{,}000$$
$$= \$158{,}682.40.$$

Esto es casi tanto como el préstamo mismo.

c. Después de 5 años, estamos al inicio del periodo 61. Por medio de la fórmula 2 con $n - k + 1 = 240 - 61 + 1 = 180$, encontramos que el capital restante es

$$1369.51\left[\frac{1-(1.00625)^{-180}}{0.00625}\right] \approx \$147{,}733.74.$$

En algún tiempo un tipo muy común de pago de un préstamo involucraba el "método aditivo" para determinar el cargo financiero. Con este método el cargo financiero se encontraba aplicando una tasa anual nominal de interés (interés simple, esto es, no compuesto) al monto del préstamo. El cargo se añadía entonces al principal y ese total era dividido entre el número de *meses* del préstamo para determinar el pago mensual. En préstamos de este tipo, el deudor no puede darse cuenta de inmediato que la tasa anual verdadera es significativamente mayor que la tasa nominal, como lo muestra el ejemplo de tecnología siguiente.

Tecnología

Problema: se toma un préstamo de $1000 durante un año a una tasa de 9% de interés bajo el método *aditivo*. Estime la tasa de interés verdadera si se supone composición mensual.

Solución: ya que el método *aditivo* se utiliza, los pagos se harán cada mes. El cargo financiero para $1000 al 9% de interés simple durante un año es 0.09(1000) = $90. Sumando esto al monto del préstamo se obtiene 1000 + 90 = $1090. Por tanto, el pago mensual es 1090/12 ≈ $90.83. Así tenemos un préstamo de $1000 con 12 pagos iguales de $90.83. A partir de la fórmula 1, en la tabla 8.2, tenemos

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|r}},$$

$$\frac{1090}{12} = \frac{1000}{a_{\overline{12}|r}},$$

$$a_{\overline{12}|r} = \frac{1000(12)}{1090} \approx 11.009174.$$

Ahora resolvemos $a_{\overline{12}|r} = 11.009174$ para la tasa mensual r. Tenemos

$$\frac{1-(1+r)^{-12}}{r} = 11.009174.$$

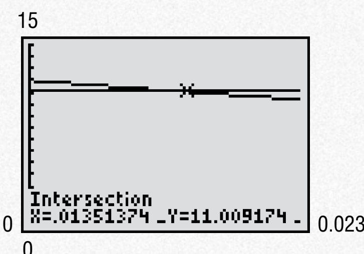


FIGURA 8.10 Solución de $a_{\overline{12}|r} = 11.009174$.

Graficando

$$Y_1 = (1 - (1 + X)\wedge -12)/X$$

$$Y_2 = 11.009174$$

y encontrando la intersección (véase la fig. 8.10) se obtiene

$$r \approx 0.01351374,$$

que corresponde a una tasa anual del

$$12(0.01351374) \approx 0.1622, \text{ o } 16.22\%.$$

Por tanto, la tasa anual verdadera es de 16.22%. Las reglamentaciones federales en Estados Unidos, concernientes a la Ley de Veracidad en los Préstamos ha hecho virtualmente obsoleto el método *aditivo*.

La fórmula de la anualidad

$$A = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

puede resolverse para n y obtener el número de periodos de un préstamo. Multiplicando ambos miembros por $\frac{r}{R}$ se obtiene

$$\frac{Ar}{R} = 1 - (1 + r)^{-n},$$

$$(1 + r)^{-n} = 1 - \frac{Ar}{R} = \frac{R - Ar}{R},$$

$$-n\ln(1 + r) = \ln\left(\frac{R - Ar}{R}\right) \qquad \text{(tomando logaritmos de ambos miembros),}$$

$$n = -\frac{\ln\left(\frac{R - Ar}{R}\right)}{\ln(1 + r)}.$$

Con base en las propiedades de los logaritmos, eliminamos el signo menos invirtiendo el cociente en el numerador:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{R}{R - Ar}\right)}{\ln(1 + r)}. \tag{1}$$

EJEMPLO 2 Periodos de un préstamo

Muhammar Smith compró recientemente una computadora por \$1500 *y acordó saldarla en pagos mensuales de* \$75*. Si el almacén cobra un interés de* 12% *compuesto cada mes, ¿cuántos meses le tomará saldar la deuda?*

Solución: de la ecuación (1),

$$n = \frac{\ln\left[\frac{75}{75 - 1500(0.01)}\right]}{\ln(1.01)} \approx 22.4 \text{ meses.}$$

En realidad son 23 pagos, sin embargo, el pago final será menor de \$75.

Ejercicio 8.4

1. Una persona pide prestados \$2000 a un banco y conviene en saldarlos en pagos iguales al final de cada mes durante 3 años. Si el interés es de 15% compuesto mensualmente, ¿de cuánto será cada pago?
2. Una persona desea pedir un préstamo a 3 años y puede realizar pagos de \$50 al final de cada mes. Si el interés es de 12% compuesto mensualmente, ¿cuánto puede pedir prestado esta persona?
3. **Costo financiero** Determine el costo financiero sobre un préstamo automotriz a 36 meses de \$8000 con pagos mensuales, si el interés es a la tasa de 4% compuesto mensualmente.
4. Para un préstamo a un año de \$500 a una tasa de 15% compuesto mensualmente, encuentre (a) el pago mensual, y (b) el cargo financiero.
5. **Préstamo para automóvil** Una persona está amortizando un préstamo automotriz de \$7500 a 36 meses con interés a la tasa de 4% compuesto mensualmente. Determine (a) el pago mensual, (b) el interés en el primer mes, y (c) el capital saldado con el primer pago.
6. **Préstamos en bienes inmuebles** Una persona está amortizando un préstamo de \$10,000 a 48 meses para el terreno de una casa. Si la tasa de interés es de 9% compuesto mensualmente, encuentre (a) el pago mensual, (b) el interés en el primer pago, y (c) el principal saldado en el primer pago.

En los problemas del 7 al 10 configure planes de amortización para las deudas indicadas. Ajuste los pagos finales si es necesario.

7. $5000 saldados en cuatro pagos anuales iguales con interés de 7% compuesto anualmente.

8. $8000 saldados en seis pagos semestrales iguales con interés del 8% compuesto semestralmente.

9. $900 saldados en cinco pagos trimestrales iguales con interés de 10% compuesto trimestralmente

10. $10,000 saldados en cinco pagos mensuales iguales con interés de 9% compuesto mensualmente.

---

11. Un préstamo de $1000 se va a saldar en pagos trimestrales de $100. Si el interés es de 8% compuesto cada trimestre, ¿cuántos pagos *completos* se realizarán?

12. Un préstamo de $2000 se va a amortizar en 48 meses a una tasa de interés de 12% compuesto mensualmente. Encuentre:

a. El pago mensual.
b. El saldo insoluto al inicio del mes 36.
c. El interés en el pago número 36.
d. El capital en el pago número 36.
e. El total del interés pagado.

13. Una deuda de $10,000 se va a saldar en 10 pagos semestrales iguales, con el primer pago dentro de seis meses. El interés es de 8% compuesto semestralmente. Sin embargo, después de 2 años la tasa de interés aumentará al 10% compuesto semestralmente. Si la deuda debe pagarse en la fecha que originalmente se convino, encuentre el nuevo pago anual. Dé su respuesta aproximada al dólar más cercano.

14. Una persona pide prestados $2000 y los saldará en pagos iguales al final de cada mes durante 5 años. Si el interés es de 16.8% compuesto mensualmente, ¿de cuánto será cada pago?

15. Hipoteca Una hipoteca de $245,000 a 25 años para una nueva casa se obtiene a la tasa de 9.2% compuesto mensualmente. Determine (a) el pago mensual, (b) el interés en el primer pago, (c) el capital saldado en el primer pago y (d) el cargo financiero.

16. Préstamo para automóvil Un préstamo automotriz de $8500 será amortizado en 48 meses a una tasa de interés de 13.2% compuesto mensualmente. Encuentre, (a) el pago mensual y (b) el cargo financiero.

17. Préstamo para muebles Una persona compra muebles por $2000 y acepta pagar este monto en pagos mensuales de $100. Si el interés aplicado es de 18% compuesto mensualmente, ¿cuántos pagos *completos* serán?

18. Encuentre el pago mensual de un préstamo a 5 años por $7000, si el interés es de 12.12% compuesto mensualmente.

19. Hipoteca Bob y Mary Rodgers quieren comprar una casa nueva y creen que pueden comprometerse a pagos hipotecarios de $600 mensuales. Ellos son capaces de obtener una hipoteca a 30 años a una tasa de 7.6% (compuesto mensualmente), pero deben hacer un pago inicial de 25% del costo de la casa. Suponiendo que ellos tienen ahorros suficientes para el pago inicial, ¿cuál es el valor máximo que pueden pagar por una casa? Dé su respuesta aproximada al dólar más cercano.

20. Hipoteca Suponga que tiene que elegir entre tomar una hipoteca de $180,000 al 8% compuesto mensualmente, ya sea a 15 o a 30 años. ¿Cuánto se ahorraría en el cargo financiero si eligiese la hipoteca a 15 años?

21. En un préstamo de $25,000 a cinco años, ¿cuánto se ahorraría en cada pago mensual, si la tasa fuese de 12% en lugar de 15%, ambas compuestos cada mes?

22. Préstamo para una casa El gobierno federal tiene un programa para ayudar a los propietarios de casa con bajos ingresos en áreas urbanas. Este programa permite que ciertos propietarios calificados obtengan préstamos a bajos intereses para mejorar su propiedad. Cada préstamo es procesado por medio de un banco comercial. El banco realiza préstamos para mejoras a una tasa anual del $9\frac{1}{4}\%$, compuesto mensualmente. Sin embargo, el gobierno subsidia al banco, de modo que el préstamo a los propietarios es a la tasa anual de 4%, compuesto mensualmente. Si el pago mensual a la tasa de 4% es de x dólares (x dólares es el pago mensual del propietario), y el pago mensual a la tasa mensual de $9\frac{1}{4}\%$ es y dólares (y dólares es el pago mensual que el banco debe recibir), entonces cada mes el gobierno completa la diferencia $y-x$ al banco. Desde un punto de vista práctico, el gobierno no quiere molestarse con los pagos *mensuales*. En lugar de eso, al inicio del préstamo paga el valor presente de tales diferencias a la tasa anual de $9\frac{1}{4}\%$ compuesto mensualmente.

Si un propietario de casa calificado obtiene un préstamo de $5000 a 5 años, determine el pago que el gobierno hace al banco al inicio del préstamo.

8.5 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 8.1 tasa efectiva   rendimiento

Sección 8.2 valor presente (o actual)   valor futuro   ecuación de valor   flujo de efectivo
valor presente neto

Sección 8.3 sucesión geométrica   serie geométrica   razón común   anualidad
anualidad vencida (ordinaria)   anualidad anticipada   valor presente de una anualidad, $a_{\overline{n}|r}$
monto de una anualidad, $s_{\overline{n}|r}$

Sección 8.4 amortización   plan de amortización   cargo financiero

Resumen

El concepto de interés compuesto es una parte central de cualquier estudio que trate con el valor del dinero en el tiempo, esto es, el valor presente del dinero que será pagado en el futuro, o el valor futuro del dinero invertido en el presente. A una tasa de interés compuesto, el interés se convierte en principal y genera interés. Las fórmulas básicas de interés compuesto son:

$$S = P(1 + r)^n \qquad \text{(valor futuro)},$$

$$P = S(1 + r)^{-n} \qquad \text{(valor presente)},$$

donde $S =$ monto compuesto (valor futuro),

$P =$ principal (valor presente),

$r =$ tasa periódica,

$n =$ número de periodos de conversión.

Las tasas de interés, por lo general, se establecen como una tasa anual llamada tasa nominal. La tasa periódica se obtiene dividiendo la tasa nominal entre el número de periodos de conversión de cada año. La tasa efectiva es la tasa de interés simple anual, que es equivalente a la tasa nominal de r capitalizada n veces durante un año, y está dada por

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1 \qquad \text{(tasa efectiva)}.$$

Las tasas efectivas se utilizan para comparar diferentes tasas de interés.

Una anualidad es una sucesión de pagos realizados en periodos fijos durante cierto tiempo. La base matemática para las fórmulas que tratan con anualidades, es la noción de suma de una serie geométrica, esto es,

$$s = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad \text{(suma de una serie geométrica)},$$

donde $s =$ suma,

$a =$ primer término,

$r =$ razón común,

$n =$ número de términos.

Una anualidad vencida es aquélla en la que cada pago se realiza al *final* del periodo de pago, mientras que una anualidad anticipada es cuando el pago se realiza al *inicio* de un periodo de pago. Las fórmulas concernientes a anualidades vencidas son

$$A = R \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} = Ra_{\overline{n}|r} \quad \text{(valor presente)},$$

$$S = R \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r} = Rs_{\overline{n}|r} \quad \text{(valor futuro)},$$

donde $A =$ valor presente de la anualidad,

$S =$ monto de la anualidad (valor futuro),

$R =$ monto de cada pago,

$n =$ número de periodos de pago,

$r =$ tasa periódica.

Para una anualidad anticipada las fórmulas correspondientes son

$$A = R(1 + a_{\overline{n-1}|r}) \qquad \text{(valor presente)},$$

$$S = R(s_{\overline{n+1}|r} - 1) \qquad \text{(valor futuro)}.$$

Un préstamo, tal como una hipoteca, es amortizado cuando parte de cada pago se utiliza para pagar el interés y la parte restante se aplica para reducir el principal. Un análisis completo de cada pago se presenta en una tabla de amortización. Las fórmulas siguientes se ocupan de la amortización de un préstamo de A dólares, a la tasa periódica de r, por medio de n pagos iguales de R dólares cada uno, de manera que cada pago se realiza al final de cada periodo.

Pago periódico:

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|r}} = A \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}.$$

Saldo insoluto al inicio del k-ésimo periodo:

$$Ra_{\overline{n-k+1}|r} = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n+k-1}}{r}.$$

Interés en el k-ésimo pago: $Rra_{\overline{n-k+1}|r}$.

Capital contenido en el k-ésimo pago:

$$R[1 - ra_{\overline{n-k+1}|r}].$$

Interés total pagado: $R(n - a_{\overline{n}|r})$ o $nR - A$.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

1. Determine la suma de la serie geométrica

$$2 + 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + 2(\tfrac{1}{2})^5.$$

2. Determine la tasa efectiva que corresponde a una tasa nominal de 6% compuesto cada trimestre.

3. Un inversionista tiene que elegir entre invertir una suma de dinero ya sea a 8.5% compuesto anualmente, o bien 8.2% compuesto cada semestre. ¿Cuál es la mejor opción?

4. Flujo de efectivo Determine el valor presente de los flujos de efectivo siguientes, que pueden comprarse por medio de una inversión inicial de $7000:

Año	Flujo de efectivo
2	$3400
4	3500

Suponga que el interés es de 7% compuesto cada semestre?

5. Una deuda de $1200 pagaderos dentro de cuatro años y $1000 pagaderos dentro de seis años, se saldará por medio de un pago de $1000 ahora y un segundo pago dentro de dos años. ¿De cuánto debe ser el segundo pago, si el interés es de 8% compuesto cada semestre?

6. Determine el valor presente de una anualidad de $250 al final de cada mes durante cuatro años, si el interés es de 6% compuesto cada mes.

7. Para una anualidad de $200 al final de cada seis meses durante $6\frac{1}{2}$ años, determine, (a) el valor presente y (b) el valor futuro a una tasa de interés de 8% compuesto cada semestre.

8. Determine el monto de una anualidad anticipada que consiste en 10 pagos anuales de $100, suponiendo que la tasa de interés es de 6% compuesto cada año.

9. Suponga que al inicio se depositan $100 en una cuenta de ahorros y $100 se depositan al final de cada seis meses durante los siguientes cuatro años. Si el interés es de 7% compuesto cada semestre, ¿cuánto habrá en la cuenta al final de cuatro años?

10. Una cuenta de ahorros paga interés a la tasa de 5% compuesto cada semestre. ¿Qué cantidad debe depositarse ahora, de modo que $250 puedan retirarse al final de cada seis meses durante los siguientes diez años?

11. Fondo de amortización Una compañía pide prestados $5000 sobre los cuales pagará al final de cada año a la tasa anual de 11%. Además, un fondo de amortización se establece de modo que los $5000 puedan pagarse al final de los cinco años. Pagos iguales se colocan en el fondo al final de cada año, y el fondo genera intereses a la tasa efectiva de 6%. Determine el pago anual en el *fondo de amortización*.

12. Préstamo para un automóvil Un deudor debe amortizar un préstamo automotriz de $7000 por medio de pagos iguales al final de cada mes durante 36 meses. Si el interés es al 4% compuesto mensualmente, determine, (a) el monto de cada pago y (b) el cargo financiero.

13. Una persona tiene deudas de $500 pagaderos dentro de tres años con interés de 5% compuesto cada año, y de $500 pagaderos dentro de cuatro años con interés al 6% compuesto cada semestre. El deudor quiere pagar estas deudas mediante dos pagos: el primer pago ahora, y el segundo, que será el doble del primer pago, al final del tercer año. Si el dinero tiene un valor de 7% compuesto anualmente, ¿de cuánto es el primer pago?

14. Construya un programa de amortización para un préstamo de $2000 que se saldarán por medio de tres pagos mensuales con interés al 12% compuesto cada mes.

15. Construya un programa de amortización para un préstamo de $15,000 que se saldarán por medio de cinco pagos mensuales con interés de 9% compuesto cada mes.

16. Determine el valor presente de una anualidad ordinaria de $540 cada mes durante siete años, a la tasa de 10% compuesto cada mes.

17. Préstamo para un auto Determine el cargo financiero para un préstamo para la compra de un automóvil a 48 meses de $11,000, con pagos mensuales a la tasa de 5.5% compuesto mensualmente.



Aplicación práctica
Bonos del tesoro

El tipo más seguro de inversión es en emisiones de valores del Tesoro de Estados Unidos. Éstos pagan rendimientos fijos en un plan predeterminado, que puede extenderse a periodos tan breves como tres meses o tan largos como treinta años. La fecha de terminación se denomina fecha de maduración.

Aunque los valores del Tesoro inicialmente los vende el gobierno, se comercian en el mercado abierto. En consecuencia los precios son libres para subir o bajar, las tasas de rendimiento de los valores pueden cambiar con el tiempo. Por ejemplo, considere una letra del tesoro a seis meses, o *T-bill*, que tiene un valor nominal de \$10,000 y se compra en la fecha de emisión por \$9832.84. Los *T-bill* no pagan intereses antes de la fecha de maduración, pero en ella el gobierno los redime por su valor nominal. Este *T-bill*, si se conserva durante los seis meses, pagará $\frac{10{,}000}{9832.84} \approx 101.7\%$ de la inversión original, para un rendimiento anualizado (tasa efectiva anual de retorno) de $1.017^2 - 1 \approx 3.429\%$. Sin embargo, si el mismo *T-bill* se vende a la mitad del plazo por \$9913.75, el nuevo propietario tiene un posible rendimiento anualizado de $\left(\frac{10{,}000}{9913.75}\right)^4 - 1 \approx 3.526\%$ en los tres meses restantes.

Al igual que los *T-bills*, las notas y los bonos del tesoro se redimen a su valor nominal en la fecha de maduración. Sin embargo, las notas y los bonos pagan interés dos veces al año de acuerdo con una tasa nominal fija.[3] Una nota a siete años por \$20,000 y pagos de 6.5% (a estos pagos se les denomina cupones), paga $0.065(20{,}000) = \$1300$ cada seis meses. Al final de siete años, el tenedor recibe el pago del interés final más el valor nominal, para un total de \$21,300.

En forma matemática, es más fácil calcular el valor presente de una nota o un bono de un rendimiento supuesto, que encontrar el rendimiento dado de un valor presente supuesto (o precio). Las notas y los bonos sólo difieren en los tiempos de maduración: de uno a diez años para notas, de diez a treinta años para bonos. Cada nota o bono es una garantía de una suma en una fecha futura más una anualidad hasta entonces. Por lo tanto, el valor presente de una nota o bono es la suma del valor presente de la cantidad futura que se recibirá y el valor presente de la anualidad. Supondremos que las notas y los bonos son evaluados en los tiempos cuando el siguiente pago de interés es exactamente dentro de seis meses; de esa manera podemos utilizar la fórmula para el valor presente de una anualidad de la sección 8.3.

[3] En este contexto, *tasa nominal* no se refiere a la tasa de porcentaje anual. La primera es constante, mientras que la segunda cambia junto con el rendimiento.

Con capitalización semestral, un rendimiento anual de r corresponde a un pago de interés de $\sqrt{1+r}-1$ cada seis meses. Haciendo la sustitución adecuada en las fórmulas de las secciones 8.2 y 8.3, obtenemos la fórmula general siguiente para el valor presente de un pagaré o bono del Tesoro.

$$P = S(1 + \sqrt{1+r} - 1)^{-2n} + R \cdot \frac{1 - (1 + \sqrt{1+r} - 1)^{-2n}}{\sqrt{1+r} - 1},$$

o, de una manera más sencilla,

$$P = S(1+r)^{-n} + R \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{\sqrt{1+r} - 1},$$

en donde S es el valor nominal, r es la supuesta tasa de rendimiento anual y n es un múltiplo de $\frac{1}{2}$ que representa el número de años para la maduración (de modo que $2n$ es el número de periodos de seis meses). R es el monto del pago semestral de interés, esto es, S veces la mitad de la tasa nominal del bono ($0.03S$ para un bono de 6%, y así sucesivamente).

Como podemos tratar a un *T-bill* como una nota a plazo corto con una tasa nominal de 0%, esta fórmula cubre también a los *T-bill* para los cuales (como no hay componente de la anualidad), n no necesita ser un múltiplo de $\frac{1}{2}$.

Para ilustrar esto, si estamos buscando un rendimiento de 7.4% sobre una nueva emisión de *T-bill* de \$30,000 a un año (para el cual $R = 0$), debemos estar dispuestos a pagar

$$30{,}000(1.074)^{-1} \approx \$27{,}932.96.$$

Pero si estamos buscando un rendimiento de 7.4% sobre un bono de \$30,000 con cupón de 5.5% que le quedan 17 años para la maduración ($R = 0.0275 \cdot 30{,}000 = 825$), debemos estar dispuestos a pagar sólo

$$30{,}000(1.074)^{-17} + 825 \cdot \frac{1 - (1.074)^{-17}}{\sqrt{1.074} - 1} \approx 24{,}870.66.$$

Por supuesto, puede suceder que nuestras expectativas de rendimiento no sean reales y que ningún bono

esté a la venta en el precio que calculamos. En ese caso, podemos necesitar ver en los precios de mercado y considerar si podemos aceptar los rendimientos correspondientes. Pero, ¿cómo encontramos el rendimiento r de un valor a partir de su precio de mercado? Para los *T-bills*, el segundo término del lado derecho de la fórmula del valor presente se elimina, y podemos despejar a r de la fórmula simplificada para obtener

$$r = \left(\frac{S}{P}\right)^{1/n} - 1.$$

Los cálculos para *T-bills* a tres y seis meses utilizan $n = \frac{1}{4}$ y $n = \frac{1}{2}$ (por ejemplo, como en los primeros cálculos de esta sección).

Por otro lado, el cálculo del rendimiento de una nota o de un bono incluye resolver las ecuaciones completas del valor presente, y esto no se puede realizar algebraicamente. Sin embargo, puede hacerse por medio de una calculadora gráfica. Hacemos Y_1 igual al lado izquierdo de la ecuación, Y_2 igual al lado derecho y determinamos en dónde Y_1 y Y_2 son iguales. Por ejemplo, suponga que un bono de $26,000 al 6.8% se vende en $26,617.50 a once años de su maduración. Cada uno de los 22 pagos de interés ascenderán a 0.034(26,000) = $884. Para determinar el rendimiento, se hace

$$Y_1 = 26{,}617.50$$

y

$$Y_2 = 26{,}000(1 + X)\text{^}-11$$
$$+\ 884(1 - (1 + X)\text{^}-11)/(\sqrt{}(1 + X) - 1).$$

Después, se construye la gráfica de Y_1 y de Y_2, y se determina en dónde se intersecan las dos gráficas (véase la fig. 8.11).

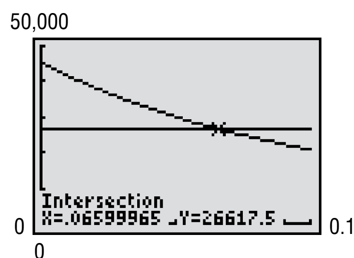


FIGURA 8.11 Determinación del rendimiento.

Las gráficas se intersecan en X ≈ 0.0660, lo que significa que el rendimiento es 6.6%.

La gráfica que describe los rendimientos actuales de los valores del Tesoro como función del tiempo de maduración se denomina curva de rendimiento. Los economistas mantienen una observación diaria sobre esta curva; usted puede seguirla de cerca en `www.bloomberg.com/usatoday`. Lo más común es que la curva de rendimiento sea parecida a la que se muestra en la figura 8.12.

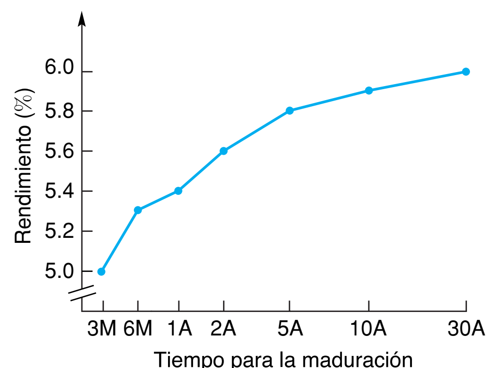


FIGURA 8.12 Una curva común de rendimiento.

Usted puede ver que entre mayor es el tiempo para la maduración, el rendimiento es mayor. La explicación usual para este patrón es que tener invertido dinero en una inversión a largo plazo, significa que se pierde la flexibilidad de la liquidez, como se le denomina, del plazo corto. Para atraer a los compradores, por lo general, los rendimientos de los valores a largo plazo deben ser ligeramente superiores que los rendimientos de los valores a plazos más cortos.

Ejercicios

1. Determine el valor presente de un bono de $15,000 a 20 años y cupones de 7.5%, suponiendo un rendimiento anual de 7.25%.
2. Determine el rendimiento de una nota de $10,000, cupones de 6.5% y que se vende en $10,389 quedándole siete años para su maduración.
3. Al final de diciembre de 2000, la curva de rendimiento para los valores del gobierno tenía la forma atípica que se muestra en la figura 8.13.

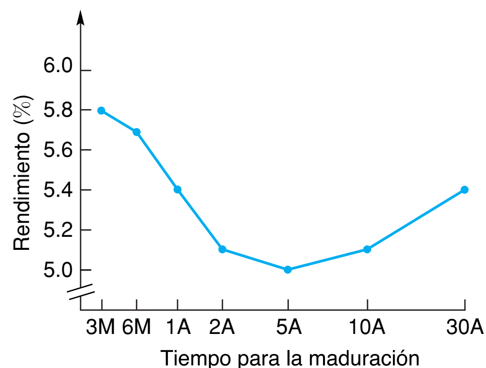


FIGURA 8.13

Los *T-bills* estaban devengando rendimientos más altos que las notas a cinco años, contrario a lo que uno esperaría. Las expectativas del inversionista acerca de las posibles ganancias, ¿cómo podrían explicar la curva de rendimiento?



CAPÍTULO 9

Límites y continuidad

El filósofo Zenón de Elea era aficionado a las paradojas acerca del movimiento. Su más famosa era algo parecida a ésta. El guerrero Aquiles acepta correr una carrera en contra de una tortuga. Aquiles puede correr 10 metros por segundo y la tortuga sólo 1 metro por segundo, de modo que la tortuga tiene una ventaja de 10 metros de la línea de salida. Aun así, como Aquiles es mucho más rápido debe ganar. Pero en el tiempo que él haya cubierto sus primeros 10 metros y llegado al lugar en donde la tortuga inició, la tortuga ya avanzó 1 metro y aún lleva la delantera. Y después de que Aquiles haya cubierto ese metro, la tortuga ha avanzado 0.1 metro y aún llevaría la delantera. Y así sucesivamente. Por tanto, Aquiles estaría cada vez más cerca de la tortuga pero nunca la alcanzaría.

Por supuesto que la audiencia de Zenón sabía que algo estaba mal en el argumento. Nosotros podemos escribir una ecuación algebraica con el avance total de Aquiles a la izquierda, el de la tortuga a la derecha y *t*, que representa el tiempo en segundos en los cuales Aquiles se empareja con la tortuga:

$$(10 \text{ m/s})t = (1 \text{ m/s})t + 10 \text{ m}.$$

La solución es $t = 1\frac{1}{9}$ segundos, tiempo en el que Aquiles ha corrido $\left(1\frac{1}{9}\text{ s}\right)(10 \text{ m/s}) = 11\frac{1}{9}$ metros.

Lo que desconcertaba a Zenón y a sus escuchas es cómo podría ser que

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = 11\frac{1}{9},$$

en donde el lado izquierdo representa una *suma infinita* y el lado derecho es un resultado finito. La solución moderna a este problema es el concepto de límite, que es el tema principal de este capítulo. El lado izquierdo de la ecuación es una serie geométrica infinita. Utilizando la notación de límite y la fórmula de la sección 8.3 para la suma de una serie geométrica, escribimos

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k} 10^{1-n} = \lim_{k\to\infty}\frac{10\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{k+1}\right)}{1 - \frac{1}{10}} = 11\frac{1}{9}.$$

OBJETIVO Estudiar límites y sus propiedades básicas.

9.1 LÍMITES

Tal vez ha estado usted en un estacionamiento en el que puede "aproximarse" al automóvil de enfrente, pero no quiere golpearlo ni tocarlo. Esta noción de estar cada vez más cerca de algo, pero sin tocarlo, es muy importante en matemáticas, y la cual está involucrada en el concepto de *límite*, en el que descansa el fundamento del cálculo. Básicamente, haremos que una variable "se aproxime" a un valor particular y examinaremos el efecto que tiene sobre los valores de la función.

Por ejemplo, considere la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

TABLA 9.1

$x < 1$		$x > 1$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.8	2.44	1.2	3.64
0.9	2.71	1.1	3.31
0.95	2.8525	1.05	3.1525
0.99	2.9701	1.01	3.0301
0.995	2.985025	1.005	3.015025
0.999	2.997001	1.001	3.003001

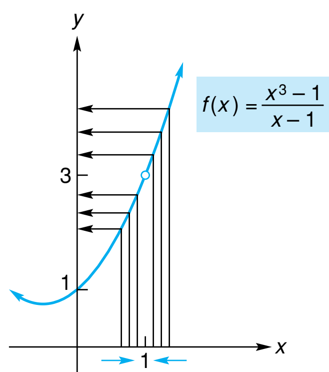


FIGURA 9.1 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$

Aunque esta función no está definida en $x = 1$, quizá desee conocer acerca del comportamiento de los valores de la función cuando x se hace muy cercana a 1. La tabla 9.1 da algunos valores de x que son un poco menores y otros un poco mayores que 1, y sus correspondientes valores funcionales. Observe que cuando x toma valores más y más próximos a 1, sin importar si x se aproxima *por la izquierda* ($x < 1$) o *por la derecha* ($x > 1$), los valores correspondientes de $f(x)$ se acercan cada vez más a un solo número, el 3. Esto también es claro de la gráfica de f en la figura 9.1. Observe que aunque la función no está definida en $x = 1$ (como se indica por un pequeño círculo vacío), los valores de la función se acercan cada vez más a 3, conforme x se acerca más y más a 1. Para expresar esto, decimos que el **límite** de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1 es 3 y escribimos

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$$

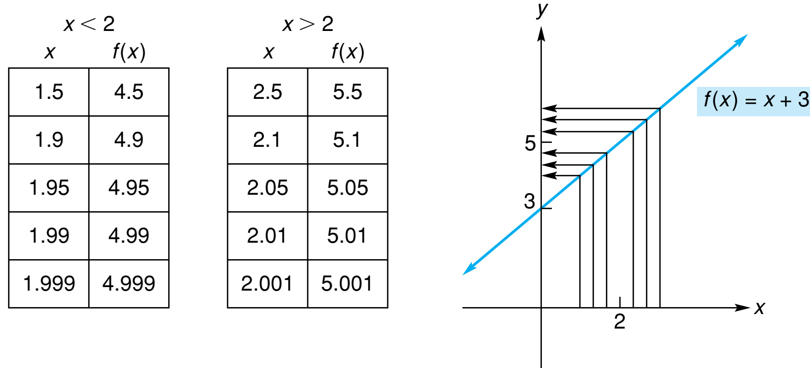
Podemos hacer $f(x)$ tan cercana a 3 como queramos, si escogemos un valor de x lo suficientemente cercano, pero diferente de 1. El límite existe en 1 aunque 1 no esté en el dominio de f.

También podemos considerar el límite de una función cuando x se aproxima a un número que está en el dominio. Examinemos el límite de $f(x) = x + 3$ cuando x tiende a 2 ($x \to 2$):

$$\lim_{x\to 2} (x + 3).$$

Obviamente, si x es cercana a 2 (pero diferente de 2), entonces $x + 3$ es cercano a 5. Esto también es claro de la tabla y la gráfica en la figura 9.2. Por tanto,

$$\lim_{x\to 2} (x + 3) = 5.$$



$x < 2$

x	$f(x)$
1.5	4.5
1.9	4.9
1.95	4.95
1.99	4.99
1.999	4.999

$x > 2$

x	$f(x)$
2.5	5.5
2.1	5.1
2.05	5.05
2.01	5.01
2.001	5.001

FIGURA 9.2 $\lim_{x \to 2} (x + 3) = 5.$

Aunque $x + 3$ es 5, cuando $x = 2$, esto no tiene relación con la existencia de un límite.

En general, para cualquier función f, tenemos la definición siguiente de un límite.

Definición

El **límite** de $f(x)$ cuando x se acerca (o tiende) a a, es el número L, escrito

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

siempre que $f(x)$ esté arbitrariamente cercana a L para toda x lo suficientemente cerca, pero diferente de a.

Enfatizamos que cuando debemos encontrar un límite, no estamos interesados en lo que le pasa a $f(x)$ cuando x es igual a a, sino sólo en lo que le sucede a $f(x)$ cuando x es cercana a a. Además, un límite debe ser independiente de la manera en que x se aproxima a a. Esto es, el límite debe ser el mismo si x se acerca a a por la izquierda o por la derecha (para $x < a$ o $x > a$, respectivamente).

EJEMPLO 1 Estimación de un límite a partir de una gráfica

a. *Estimar* $\lim_{x \to 1} f(x)$, *donde la gráfica de* f *está dada en la figura* 9.3(*a*).

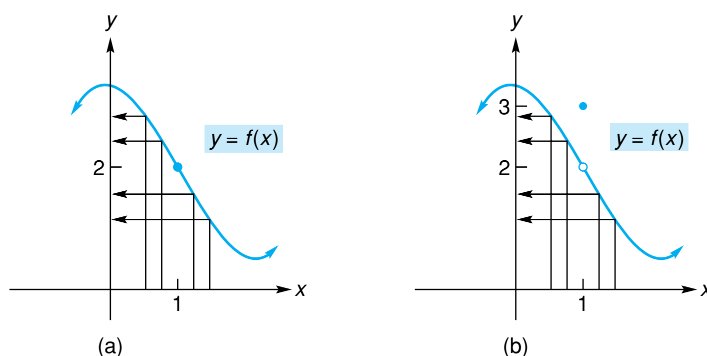


FIGURA 9.3 Investigación de $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Solución: si vemos en la gráfica los valores de x cercanos a 1, advertimos que $f(x)$ está cercana a 2. Además, cuando x se aproxima cada vez más a 1, entonces $f(x)$ parece estar cada vez más cercana a 2. Así, estimamos que

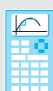
$$\lim_{x\to 1} f(x) \text{ es } 2.$$

b. *Estimar* $\lim_{x\to 1} f(x)$, *donde la gráfica de f está dada en la figura* 9.3(*b*).

Solución: aunque $f(1) = 3$, este hecho no tiene importancia sobre el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1. Vemos que cuando x se aproxima a 1, entonces $f(x)$ parece aproximarse a 2. Por tanto, estimamos que

$$\lim_{x\to 1} f(x) \text{ es } 2.$$

Hasta aquí todos los límites que hemos considerado en realidad existen. Ahora veremos algunas situaciones en las que no existe un límite.



Principios en práctica 1

Límites que no existen

En matemáticas la función mayor entero, que se denota como $f(x) = [x]$, la utilizan todos los días los cajeros que dan cambio a los clientes. Esta función proporciona la cantidad de billetes para cada monto de cambio que se debe (por ejemplo, si a un cliente se le debe \$1.25 de cambio, él o ella obtendrían \$1 en billete; así, $[1.25] = 1$). Formalmente, $[x]$ se define como el mayor entero que es menor o igual a x. Haga la gráfica de f, la cual algunas veces se denomina función escalonada, en su calculadora gráfica en el rectángulo estándar de visualización (la encontrará en el menú de números; se denomina "parte entera"). Explore esta gráfica usando TRACE. Determine si existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

EJEMPLO 2 Límites que no existen

a. *Estimar* $\lim_{x\to -2} f(x)$, *si existe, donde la gráfica de f está dada en la figura* 9.4.

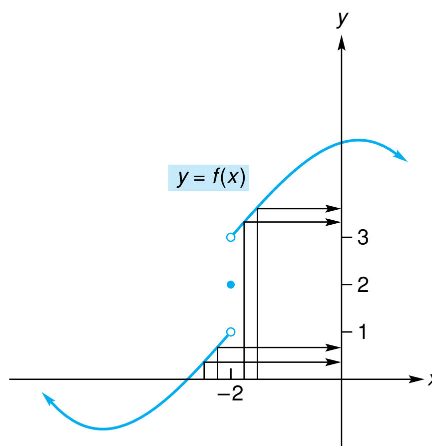


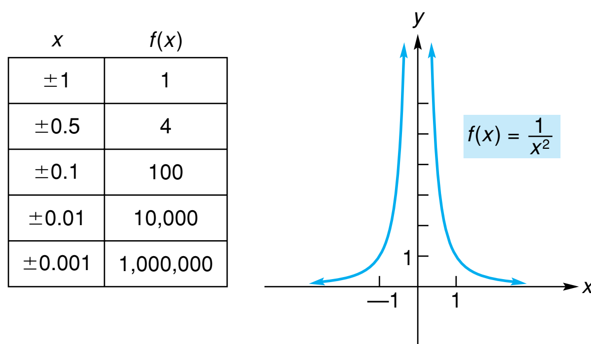
FIGURA 9.4 $\lim_{x\to -2} f(x)$ no existe.

Solución: cuando x tiende a -2 por la izquierda ($x < -2$), los valores de $f(x)$ parecen más cercanos a 1. Pero cuando x tiende a -2 por la derecha ($x > -2$), entonces $f(x)$ parece más cercana a 3. Por tanto, cuando x tiende a -2, los valores de la función no se acercan a un solo número. Concluimos que

$$\lim_{x\to -2} f(x) \text{ no existe.}$$

Observe que el límite no existe aunque la función está definida en $x = -2$.

b. *Estimar* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$, *sí existe.*



x	$f(x)$
±1	1
±0.5	4
±0.1	100
±0.01	10,000
±0.001	1,000,000

FIGURA 9.5 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ no existe.

Solución: sea $f(x) = 1/x^2$. La tabla de la figura 9.5 da los valores de $f(x)$ para algunos valores de x cercanos a 0. Conforme x se acerca más a 0, los valores de $f(x)$ se hacen más y más grandes, sin cota. También esto es claro de la gráfica. Ya que los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número cuando x tiende a 0,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \text{ no existe.}$$

Tecnología

Problema: estimar $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si

$$f(x) = \frac{x^3 + 2.1x^2 - 10.2x + 4}{x^2 + 2.5x - 9}.$$

Solución: un método para encontrar el límite es construir una tabla de valores de la función $f(x)$ cuando x es cercana a 2. De la figura 9.6, estimamos que el límite es 1.57. De manera alternativa, podemos estimar el límite a partir de la gráfica de f. La figura 9.7 muestra la gráfica de f con la ventana estándar de $[-10, 10] \times [-10, 10]$. Primero hacemos varios acercamientos alrededor de $x = 2$ y obtenemos lo que se muestra en la figura 9.8. Después rastreando alrededor de $x = 2$, estimamos que el límite es 1.57.

X	Y1
1.9	1.4688
1.99	1.5592
1.999	1.5682
1.9999	1.5691
2.01	1.5793
2.001	1.5702
2.0001	1.5693

X=2.0001

FIGURA 9.6 $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \approx 1.57.$

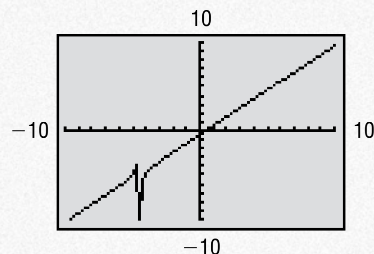


FIGURA 9.7 Gráfica de $f(x)$ en la ventana estándar.

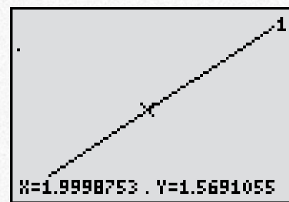


FIGURA 9.8 El acercamiento y trazado alrededor de $x = 2$ proporciona $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \approx 1.57.$

Propiedades de los límites

Para determinar límites no siempre hace falta calcular los valores de la función o hacer el esbozo de una gráfica. Existen también varias propiedades de los límites que podemos emplear. Las siguientes propiedades pueden parecerle razonables:

1. Si $f(x) = c$, es una función constante, entonces
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c.$$
2. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$, para cualquier entero positivo n.

EJEMPLO 3 Aplicación de las propiedades 1 y 2 de lo límites

a. $\lim_{x\to 2} 7 = 7; \qquad \lim_{x\to -5} 7 = 7.$

b. $\lim_{x\to 6} x^2 = 6^2 = 36.$

c. $\lim_{t\to -2} t^4 = (-2)^4 = 16.$

Algunas otras propiedades de los límites son las siguientes:

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existe, entonces

3. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$

   Esto es, el límite de una suma o diferencia es la suma o diferencia, respectivamente, de los límites.

4. $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$

   Esto es, el límite de un producto es el producto de los límites.

5. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$, donde c es una constante.

   Esto es, el límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.

Principios en práctica 2
Aplicación de las propiedades de los límites

El volumen de helio en un globo esférico (en centímetros cúbicos), como una función del radio, r, en centímetros, está dado por $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.
Determine $\lim_{r\to 1} V(r)$.

EJEMPLO 4 Aplicación de las propiedades de los límites

a.
$$\lim_{x\to 2} (x^2 + x) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} x \qquad \text{(propiedad 3)}$$
$$= 2^2 + 2 = 6 \qquad \text{(propiedad 2).}$$

b. La propiedad 3 puede aplicarse por extensión al límite de un número finito de sumas y diferencias. Por ejemplo,
$$\lim_{q\to -1} (q^3 - q + 1) = \lim_{q\to -1} q^3 - \lim_{q\to -1} q + \lim_{q\to -1} 1$$
$$= (-1)^3 - (-1) + 1 = 1.$$

c. $\lim_{x \to 2} [(x+1)(x-3)] = \lim_{x \to 2} (x+1) \cdot \lim_{x \to 2} (x-3)$ (propiedad 4)

$$= [\lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 1] \cdot [\lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 3]$$

$$= (2+1) \cdot (2-3) = 3(-1) = -3.$$

d. $\lim_{x \to -2} 3x^3 = 3 \cdot \lim_{x \to -2} x^3$ (propiedad 5)

$$= 3(-2)^3 = -24.$$

Principios en práctica 3

Límites de una función polinomial

La función de ingreso para cierto producto está dado por $R(x) = 500x - 6x^2$. Determine $\lim_{x \to 8} R(x)$.

EJEMPLO 5 Límites de una función polinomial

Sea $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0$ una función polinomial. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0)$$

$$= c_n \cdot \lim_{x \to a} x^n + c_{n-1} \cdot \lim_{x \to a} x^{n-1} + \cdots + c_1 \cdot \lim_{x \to a} x + \lim_{x \to a} c_0$$

$$= c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = f(a).$$

Si f es una función polinomial, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Esto es, el límite de una función polinomial cuando x tiende a a, sólo es el valor de la función en a.

El resultado del ejemplo 5 nos permite encontrar muchos límites cuando $x \to a$ con sólo sustituir a por x. Por ejemplo, podemos encontrar

$$\lim_{x \to -3} (x^3 + 4x^2 - 7)$$

sustituyendo -3 por x, ya que $x^3 + 4x^2 - 7$ es una función polinomial:

$$\lim_{x \to -3} (x^3 + 4x^2 - 7) = (-3)^3 + 4(-3)^2 - 7 = 2.$$

Del mismo modo,

$$\lim_{h \to 3} [2(h-1)] = 2(3-1) = 4.$$

Debemos insistir: no se calculan límites con sólo "sustituir", a menos que podamos apoyarnos en alguna regla que cubra la situación. Pudimos encontrar los dos límites anteriores por sustitución directa porque tenemos una regla que se aplica a límites de funciones polinomiales. Sin embargo, el uso indiscriminado de la sustitución puede conducir a resultados erróneos. Para ilustrarlo, en el ejemplo 1(b) tenemos $f(1) = 3$, que no es el límite cuando $x \to 1$; en el ejemplo 2(a), $f(-2) = 2$, que no es el límite cuando $x \to -2$.

Las siguientes dos propiedades de límites tratan con cocientes y raíces.

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen, entonces

6. $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \quad \text{si} \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$$

Esto es, el límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre que el denominador no tenga un límite de 0.

7. $$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}.$$[1]

EJEMPLO 6 Aplicación de las propiedades 6 y 7 de los límites

Observe que en el ejemplo 6(a) el numerador y el denominador de la función son polinomios. En general, podemos determinar el límite de una función racional cuando $x \to a$ por medio de sustitución directa, siempre y cuando el denominador no sea 0 en a.

a. $$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^3 + 4} = \frac{\lim_{x\to 1} (2x^2 + x - 3)}{\lim_{x\to 1} (x^3 + 4)} = \frac{2 + 1 - 3}{1 + 4} = \frac{0}{5} = 0.$$

b. $$\lim_{t\to 4} \sqrt{t^2 + 1} = \sqrt{\lim_{t\to 4} (t^2 + 1)} = \sqrt{17}.$$

c. $$\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{x^2 + 7} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 3} (x^2 + 7)} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}.$$

Límites y manipulación algebraica

Ahora consideremos límites para los cuales nuestras propiedades de los límites no se aplican, y no pueden evaluarse por sustitución directa. Nuestra técnica consistirá en realizar operaciones algebraicas sobre $f(x)$ de modo que obtengamos una forma en la cual nuestras propiedades de los límites puedan aplicarse.

Principios en práctica 4
Aplicación de las propiedades de los límites

La tasa de cambio de la productividad p (en número de unidades producidas por hora) aumenta con el tiempo de trabajo de acuerdo con la función

$$p = \frac{50(t^2 + 4t)}{t^2 + 3t + 20}.$$

Determine $\lim_{t\to 2} p$.

EJEMPLO 7 Determinación de un límite por factorización y cancelación

Determinar $\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Solución: cuando $x \to -1$, tanto el numerador como el denominador se aproximan a cero. Ya que el límite del denominador es 0, *no podemos* utilizar la propiedad 6. Sin embargo, como lo que le suceda al cociente cuando x es igual a -1 no nos interesa, podemos suponer que $x \neq -1$ y simplificar la fracción:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{\cancel{(x + 1)}(x - 1)}{\cancel{x + 1}} = x - 1.$$

Esta manipulación algebraica (factorización y cancelación) sobre la función original $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$ da lugar a una nueva función $x - 1$, que es igual a la función original para $x \neq -1$. Por tanto,

[1]Si n es par, requerimos que $\lim_{x\to a} f(x)$ sea positiva.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} =$$
$$\lim_{x\to -1} (x - 1) = -1 - 1 = -2.$$

Observe que, aunque la función original no está definida en -1, *tiene* un límite cuando $x \to -1$.

Cuando tanto $f(x)$ como $g(x)$ se aproximan a 0 cuando $x \to a$, entonces el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

se dice que tiene la *forma* 0/0.

En el ejemplo 7 el método para encontrar un límite por sustitución directa no funciona. Reemplazando x por -1 se obtiene $0/0$, lo cual carece de significado. Cuando surge la forma indeterminada $0/0$, la operación algebraica (como en el ejemplo 7) puede dar lugar a una forma para la cual *pueda* determinarse el límite.

Al inicio de esta sección, encontramos

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

por inspección de una tabla de valores de la función $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$, y también considerando la gráfica de f. Este límite tiene la forma $0/0$. Ahora lo determinaremos utilizando la técnica descrita en el ejemplo 7 (la técnica de factorización y cancelación).

EJEMPLO 8 Forma 0/0

Encontrar $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Solución: cuando $x \to 1$, el numerador y el denominador se aproximan a cero. De esta manera, trataremos de expresar el cociente en una forma diferente para $x \neq 1$. Factorizando, tenemos

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)} = x^2 + x + 1.$$

(Alternativamente, la división daría el mismo resultado). Por tanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3,$$

como se mostró antes.

EJEMPLO 9 Forma 0/0

Si $f(x) = x^2 + 1$, *encontrar* $\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

La expresión

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

se denomina *cociente de diferencias*. El límite del cociente de diferencias yace en el corazón del cálculo diferencial. Encontrará tales límites en el capítulo 10.

Solución:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(x + h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h}.$$

Aquí tratamos a x como una constante porque h, no x, está cambiando. Cuando $h \to 0$, el numerador y el denominador se aproximan a 0. Por tanto, trataremos de expresar el cociente en forma tal que $h \neq 0$. Tenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{[(x + h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[x^2 + 2xh + h^2 + 1] - x^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x.$$

Principios en práctica 5

Forma 0/0

La longitud de un material aumenta cuando se calienta de acuerdo con la ecuación $l = 125 + 2x$. La tasa a la cual la longitud aumenta está dada por

$$\lim_{h\to 0} \frac{125 + 2(x + h) - (125 + 2x)}{h}.$$

Calcule este límite.

Un límite especial

Concluimos esta sección con una nota concerniente a uno de los límites más importantes, a saber

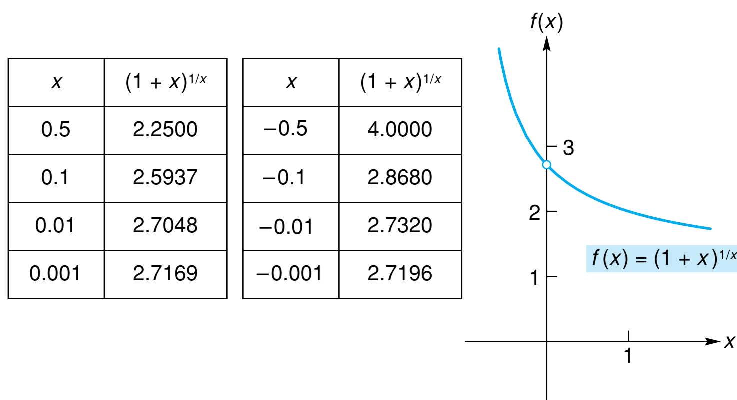
$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}.$$

La figura 9.9 muestra la gráfica de $f(x) = (1 + x)^{1/x}$. Aunque $f(0)$ no existe, cuando $x \to 0$ es claro que el límite de $(1 + x)^{1/x}$ existe. Es aproximadamente 2.71828 y se denota por la letra e. Ésta, como recordará, simboliza la base del sistema de los logaritmos naturales. El límite

Este límite se utilizará en el capítulo 11.

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

en realidad puede considerarse como la definición de e.



x	$(1 + x)^{1/x}$
0.5	2.2500
0.1	2.5937
0.01	2.7048
0.001	2.7169

x	$(1 + x)^{1/x}$
−0.5	4.0000
−0.1	2.8680
−0.01	2.7320
−0.001	2.7196

FIGURA 9.9 $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$

Ejercicio 9.1

En los problemas del 1 al 4 utilice la gráfica de f para estimar cada límite, si existe.

1. La gráfica de f aparece en la figura 9.10.

a. $\lim_{x\to 0} f(x)$. **b.** $\lim_{x\to 1} f(x)$. **c.** $\lim_{x\to 2} f(x)$.

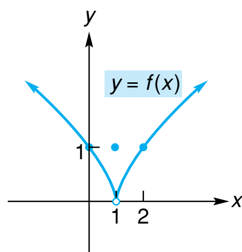


FIGURA 9.10 Diagrama para el problema 1.

2. La gráfica de f aparece en la figura 9.11.

a. $\lim_{x\to -1} f(x)$. **b.** $\lim_{x\to 0} f(x)$. **c.** $\lim_{x\to 1} f(x)$.

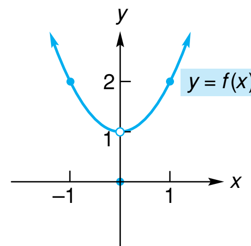


FIGURA 9.11 Diagrama para el problema 2.

3. La gráfica de f aparece en la figura 9.12.

a. $\lim_{x\to -1} f(x)$. **b.** $\lim_{x\to 1} f(x)$. **c.** $\lim_{x\to 2} f(x)$.

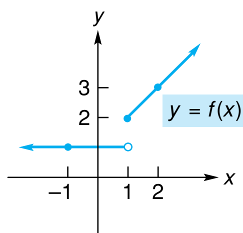


FIGURA 9.12 Diagrama para el problema 3.

4. La gráfica de f aparece en la figura 9.13.

a. $\lim_{x\to -1} f(x)$. **b.** $\lim_{x\to 0} f(x)$. **c.** $\lim_{x\to 1} f(x)$.

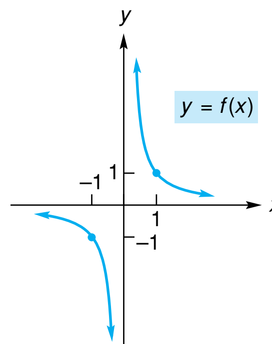


FIGURA 9.13 Diagrama para el problema 4.

En los problemas del 5 al 8 utilice su calculadora para completar la tabla, y use los resultados para estimar el límite dado.

5. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$.

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$						

6. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$.

x	−2.1	−2.01	−2.001	−1.999	−1.99	−1.9
$f(x)$						

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

x	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

8. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$.

h	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

En los problemas del 9 al 34 encuentre los límites.

9. $\lim_{x\to 2} 16$.

10. $\lim_{x\to 3} 2x$.

11. $\lim_{t\to -5} (t^2 - 5)$.

12. $\lim_{t\to 1/2} (3t - 5)$.

13. $\lim_{x\to -1} (x^3 - 3x^2 - 2x + 1)$.

14. $\lim_{r\to 9} \dfrac{4r - 3}{11}$.

15. $\lim_{t\to -3} \dfrac{t - 2}{t + 5}$.

16. $\lim_{x\to -6} \dfrac{x^2 + 6}{x - 6}$.

17. $\lim_{h\to 0} \dfrac{h}{h^2 - 7h + 1}$.

18. $\lim_{h\to 0} \dfrac{h^2 - 2h - 4}{h^3 - 1}$.

19. $\lim_{p\to 4} \sqrt{p^2 + p + 5}$.

20. $\lim_{y\to 15} \sqrt{y + 3}$.

21. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2 + 2x}{x + 2}$.

22. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x + 1}{x + 1}$.

23. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$.

24. $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^2 + 2t}{t^2 - 2t}$.

25. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$.

26. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2 - 4}{t - 2}$.

27. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$.

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x}$.

29. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 3x - 4}$.

30. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^4 - 81}{x^2 - x - 6}$.

31. $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - x - 10}{x^2 + 5x - 14}$.

32. $\lim_{x\to -4} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 5x + 4}$

33. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^2 - 2^2}{h}$.

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x + 2)^2 - 4}{x}$.

35. Encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$ tratando a x como una constante.

36. Encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{2(x + h)^2 + 5(x + h) - 2x^2 - 5x}{h}$ tratando a x como una constante.

En los problemas del 37 al 42 encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

37. $f(x) = 4 - x$.

38. $f(x) = 2x + 3$.

39. $f(x) = x^2 - 3$.

40. $f(x) = x^2 + x + 1$.

41. $f(x) = x^2 - 3x$.

42. $f(x) = 5 - 2x - 3x^2$.

43. Encuentre $\lim_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x - 2} - 2}{x - 6}$ [*Sugerencia:* primero racionalice el numerador multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{x - 2} + 2$].

44. Encuentre la constante c de modo que $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 + x + c}{x^2 - 5x + 6}$ exista. Para ese valor de c, determine el límite. [*Sugerencia*: encuentre el valor de c para el cual $x - 3$ es un factor del numerador.]

45. Planta de energía La eficiencia teórica máxima de una planta de energía está dada por

$$E = \frac{T_h - T_c}{T_h},$$

donde T_h y T_c son las temperaturas absolutas respectivas del depósito más caliente y del más frío. Encuentre (a) $\lim_{T_c\to 0} E$ y (b) $\lim_{T_c\to T_h} E$.

46. Satélite Cuando un satélite de 3200 libras gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r pies, la energía total mecánica E del sistema Tierra-satélite está dada por

$$E = -\frac{7.0 \times 10^{17}}{r} \text{ pies-libra.}$$

Encuentre el límite de E cuando $r \to 7.5 \times 10^7$ pies.

En los problemas del 47 al 50 utilice una calculadora gráfica para graficar las funciones y luego estime los límites. Redondee sus respuestas a dos decimales.

47. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4 + x^3 - 24}{x^2 - 4}$.

48. $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{2x - 8}}$.

49. $\lim_{x\to 16} \dfrac{x - \sqrt{x} - 12}{4 - \sqrt{x}}$.

50. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}$.

9.2 LÍMITES (CONTINUACIÓN)

OBJETIVO Estudiar los límites laterales, límites infinitos y límites al infinito.

Límites laterales

La figura 9.14 muestra la gráfica de un función f. Observe que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$. Cuando x tiende a 0 *por la derecha*, $f(x)$ se aproxima a 1. Escribimos esto como

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$

Por otra parte, cuando x tiende a 0 *por la izquierda*, $f(x)$ se aproxima a -1 y escribimos

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$

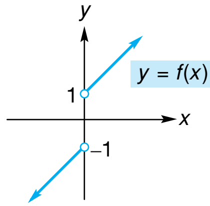


FIGURA 9.14
$\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

Los límites como éstos se conocen como **límites laterales** (o **unilaterales**). De la sección anterior sabemos que el límite de una función cuando $x \to a$ es independiente de la manera en que x se aproxima a a. Por tanto, el límite existirá si y sólo si, ambos límites existen y son iguales. Entonces concluimos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) \text{ no existe.}$$

Como otro ejemplo de un límite lateral, considere $f(x) = \sqrt{x - 3}$ cuando x tiende a 3. Ya que f está definida cuando $x \geq 3$, podemos hablar del límite cuando x tiende a 3 por la derecha. Si x es un poco mayor que 3, entonces $x - 3$ es un número positivo cercano a 0 y de este modo $\sqrt{x - 3}$ es cercano a cero. Concluimos que

$$\lim_{x\to 3^+} \sqrt{x - 3} = 0.$$

Este límite también es evidente si observamos la figura 9.15.

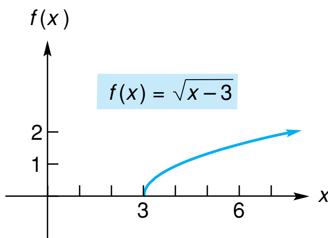


FIGURA 9.15
$\lim_{x\to 3^+} \sqrt{x - 3} = 0.$

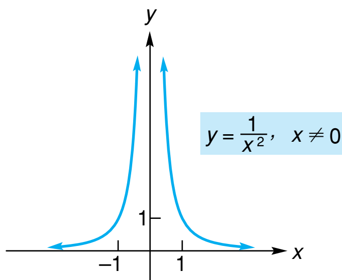
Límites infinitos

En la sección anterior consideramos límites de la forma 0/0; esto es, límites donde el numerador y el denominador se aproximan a cero. Ahora examinaremos límites donde el denominador se aproxima a cero pero el numerador tiende a un número diferente de 0. Por ejemplo, considere

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}.$$

Aquí, cuando x tiende a 0, el denominador tiende a 0 y el numerador tiende a 1. Investigaremos el comportamiento de $f(x) = 1/x^2$ cuando x es cercana a 0. El número x^2 es positivo y también cercano a 0. Por tanto, dividiendo 1 entre tal número da como resultado un número muy grande. En realidad, entre más cercana a 0 esté x, mayor es el valor de $f(x)$. Por ejemplo, véase la tabla de valores en la figura 9.16, la cual también muestra la gráfica de f. Es claro que cuando $x \to 0$ tanto por la izquierda como por la derecha, $f(x)$ aumenta sin cota. De aquí que no exista el límite en 0. Decimos que cuando $x \to 0$, $f(x)$ se vuelve infinito positivamente, y en forma simbólica expresamos este "límite infinito" escribiendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$



x	$f(x)$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.1	100
± 0.01	10,000
± 0.001	1,000,000

FIGURA 9.16 $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$

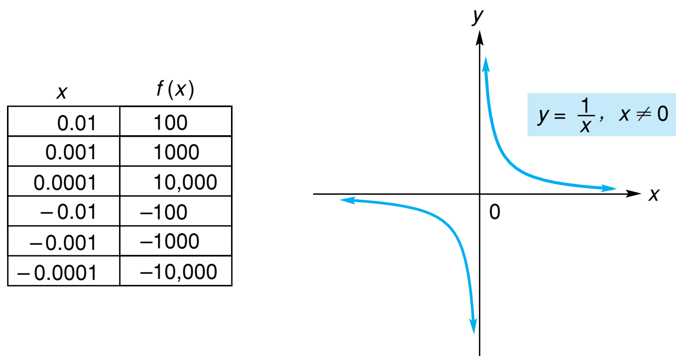
Esta advertencia es extremadamente importante.



Advertencia El uso del signo "igual" en esta situación no significa que el límite exista. Por el contrario, el símbolo (∞) aquí es una manera de decir específicamente que no hay límite e indica por qué no existe el límite.

Ahora considere la gráfica de $y = f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$ (véase la fig. 9.17). Cuando x se aproxima a 0 por la derecha, $1/x$ se hace infinito positivo; cuando x se aproxima a 0 por la izquierda, $1/x$ tiende a infinito negativo. De modo simbólico estos límites infinitos son escritos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty .$$



x	$f(x)$
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10,000
−0.01	−100
−0.001	−1000
−0.0001	−10,000

FIGURA 9.17 $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ no existe.

Cualquiera de estos dos hechos implican que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \text{ no existe.}$$

EJEMPLO 1 Límites infinitos

Encontrar el límite (si existe).

a. $\lim_{x\to -1^+} \frac{2}{x+1}$.

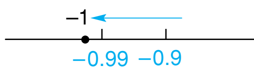


FIGURA 9.18 $x \to -1^+$.

Solución: cuando x tiende a -1 por la derecha (piense en valores de x como $-0.9, -0.99$, y así sucesivamente, como se muestra en la figura 9.18), $x + 1$ tiende a 0 pero siempre es positivo. Como estamos dividiendo 2 entre números positivos que se aproximan a 0, los resultados, $2/(x + 1)$ son números positivos que se vuelven arbitrariamente grandes.

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2}{x+1} = \infty,$$

y el límite no existe. Por un análisis similar, usted debe ser capaz de demostrar que

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2}{x+1} = -\infty.$$

b. $\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2-4}$.

Solución: cuando $x \to 2$, el numerador tiende a 4 y el denominador se aproxima a 0. Por tanto, estamos dividiendo números cercanos a 4 entre números cercanos a 0. Los resultados son números que se vuelven arbitrariamente grandes en magnitud. En esta fase podemos escribir

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x^2-4} \text{ no existe.}$$

Sin embargo, veremos si es posible utilizar el símbolo ∞ o $-\infty$ para ser más específicos acerca del "no existe". Obsérvese que

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}.$$

Como

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty,$$

entonces $\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x^2-4}$ no es ni ∞ ni $-\infty$.

El ejemplo 1 consideró límites de la forma $k/0$ donde $k \neq 0$. Es importante que distinga la forma $k/0$ de la forma $0/0$, que se estudió en la sección 9.1, pues se manejan en forma muy diferente.

EJEMPLO 2 Determinación de un límite

Encontrar $\lim_{t \to 2} \frac{t-2}{t^2-4}$.

Solución: cuando $t \to 2$, *ambos*, numerador y denominador, tienden a 0 (forma $0/0$). Así, primero simplificamos la fracción, como hicimos en la sección 9.1. y luego tomamos el límite:

$$\lim_{t \to 2} \frac{t-2}{t^2-4} = \lim_{t \to 2} \frac{t-2}{(t+2)(t-2)} = \lim_{t \to 2} \frac{1}{t+2} = \frac{1}{4}.$$

Límites al infinito

Ahora examinamos la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

cuando x se vuelve infinito, primero en sentido positivo y después en sentido negativo. De la tabla 9.2 podemos ver que cuando x aumenta sin cota tomando valores positivos, los valores de $f(x)$ se aproximan a 0. De la misma manera, cuando x disminuye sin cota tomando valores negativos, los valores de $f(x)$ se aproximan a 0. Estas observaciones son claras al ver la gráfica de la figura 9.17. Allí, cuando usted se mueve a la derecha sobre la curva tomando valores positivos de x, los correspondientes valores de y se aproximan a 0. Del mismo modo, cuando se mueve hacia la izquierda a lo largo de la curva por valores negativos

Usted debe ser capaz de obtener

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$$

sin el beneficio de una gráfica o de una tabla. Desde el punto de vista conceptual, para $x \to \infty$, aumentar los valores del denominador en $1/x$ significa que la fracción se hace cada vez más pequeña en magnitud, esto es, cada vez más cercana a cero. De manera alterna, al dividir 1 entre un número positivo grande, se obtiene como resultado un número cercano a cero. Un argumento similar puede hacerse para el límite cuando $x \to -\infty$.

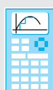
TABLA 9.2 Comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to \pm\infty$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1000	0.001	−1000	−0.001
10,000	0.0001	−10,000	−0.0001
100,000	0.00001	−100,000	−0.00001
1,000,000	0.000001	−1,000,000	−0.000001

de x, los correspondientes valores de y se aproximan a cero. En forma simbólica, escribimos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Estos límites se conocen como *límites al infinito*.



Principios en práctica 1

Límites al infinito

La función de demanda para cierto producto está dada por $p(x)=\frac{10,000}{(x+1)^2}$, en donde p es el precio en pesos y x es la cantidad vendida. Haga la gráfica de esta función en su calculadora gráfica en la ventana $[0, 10] \times [0, 10{,}000]$. Utilice la función TRACE para determinar $\lim_{x\to\infty} p(x)$. Determine lo que le sucede a la gráfica y lo que esto significa con respecto a la función de demanda.

EJEMPLO 3 Límites al infinito

Encontrar el límite (si existe).

a. $\lim_{x\to\infty}\frac{4}{(x-5)^3}$.

Solución: cuando x se vuelve muy grande, también lo hace $x - 5$. Como el cubo de un número grande también es grande, $(x-5)^3 \to \infty$. Al dividir 4 entre números muy grandes se tiene como resultado números cercanos a cero. Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{(x-5)^3}=0.$$

b. $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4-x}$.

Solución: cuando x se hace cada vez más negativa, $4 - x$ tiende a infinito positivo. Ya que la raíz cuadrada de números grandes son números grandes, concluimos que

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4-x}=\infty.$$

En nuestra siguiente exposición necesitamos un cierto límite, a saber, $\lim_{x\to\infty} 1/x^p$ donde $p > 0$. Conforme x se vuelve muy grande, también x^p. Al dividir 1 entre números grandes se tiene como resultado números cercanos a cero. Así $\lim_{x\to\infty} 1/x^p = 0$. En general,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^p}=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^p}=0,$$

donde $p > 0$.[2] Por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1/3}}=0.$$

[2]Para $\lim_{x\to-\infty} 1/x^p$, suponemos que p es tal que $1/x^p$ está definida para $x < 0$.

Ahora encontraremos el límite de la función racional

$$f(x) = \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1}$$

cuando $x \to \infty$. (Recuerde de la sección 3.2 que una función racional es un cociente de polinomios). Cuando x se vuelve cada vez más grande, *ambos,* numerador y denominador de $f(x)$, tienden a infinito. Sin embargo, la forma del cociente puede modificarse de modo que podamos sacar una conclusión de si tiene o no límite. Para hacer esto, dividimos el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x que aparezca en el denominador. En este caso es x^2. Esto da

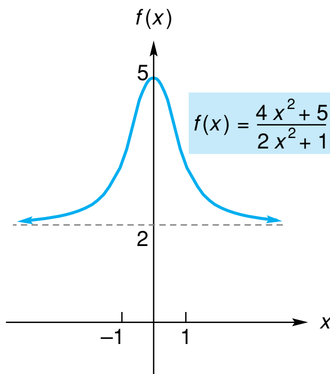


FIGURA 9.19 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2.$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{4x^2 + 5}{x^2}}{\dfrac{2x^2 + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{4x^2}{x^2} + \dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{2x^2}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4 + \dfrac{5}{x^2}}{2 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 4 + 5 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}.$$

Como $\lim_{x\to\infty} 1/x^p = 0$ para $p > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1} = \frac{4 + 5(0)}{2 + 0} = \frac{4}{2} = 2.$$

Del mismo modo, el límite cuando $x \to -\infty$ es 2. Estos límites son claros si observamos la gráfica de f en la figura 9.19.

Para la función anterior, hay una manera más sencilla de encontrar $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Para valores *grandes* de x, el término que incluye la potencia más grande de x en el numerador, a saber, $4x^2$, domina la suma $4x^2 + 5$, y el término dominante en el denominador, $2x^2 + 1$, es $2x^2$. Por tanto, cuando $x \to \infty$, $f(x)$ puede aproximarse como $(4x^2)/(2x^2)$. Como resultado, para determinar el límite de $f(x)$, basta determinar el límite de $(4x^2)/(2x^2)$. Esto es,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2,$$

como vimos antes. En general, tenemos la regla siguiente:

Límites al infinito de funciones racionales

Si $f(x)$ es una *función racional* y $a_n x^n$ y $b_m x^m$ son los términos en el numerador y denominador, respectivamente, con las mayores potencias de x, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Aplicamos esta regla a la situación donde el grado del numerador es mayor que el del denominador. Por ejemplo,

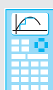
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-3x}{5-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{-2x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^3\right)=\infty.$$

(Observe que en el último paso, cuando x se vuelve muy negativa, también lo hace x^3, además, $-\frac{1}{2}$ por un número muy negativo resulta ser muy grande positivo.) Del mismo modo,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x}{5-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}x^3\right)=-\infty.$$

De esta ilustración, hacemos la conclusión siguiente:

Si el grado del numerador de una *función racional* es mayor que el del denominador, entonces la función no tiene límite cuando $x\to\infty$ o cuando $x\to-\infty$.



Principios en práctica 2

Límites al infinito para funciones racionales

Los montos anuales de ventas, y, de cierta compañía (en miles de dólares) están relacionados con la cantidad de dinero que la compañía gasta en publicidad, x (en miles de pesos), de acuerdo con la ecuación $y(x)=\frac{500x}{x+20}$. Haga la gráfica de esta función en su calculadora gráfica en la ventana $[0, 1000]\times[0, 550]$. Utilice TRACE para explorar $\lim_{x\to\infty} y(x)$, y determine lo que esto significa para la compañía.

EJEMPLO 4 Límites al infinito de funciones racionales

Encontrar el límite (si existe).

a. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{7-2x+8x^2}$.

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{7-2x+8x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{8x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

b. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(3x-1)^2}$.

Solución:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(3x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{9x^2-6x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{9x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{9x}=\frac{1}{9}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{9}(0)=0.$$

c. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-x^4}{x^4-x^3+2}$.

Solución: como el grado del numerador es mayor que el del denominador, no existe el límite. Con mayor precisión,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-x^4}{x^4-x^3+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^4}=\lim_{x\to\infty}x=\infty.$$



Advertencia La técnica anterior sólo se aplica a límites al *infinito* de funciones racionales. Para encontrar $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{7-2x+8x^2}$, no determinamos el límite de $\frac{x^2}{8x^2}$, ya que x no se aproxima a ∞ o a $-\infty$. En lugar de eso, tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{7-2x+8x^2}=\frac{0-1}{7-0+0}=-\frac{1}{7}.$$

Ahora consideremos el límite de la función polinomial $f(x) = 8x^2 - 2x$ cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} (8x^2 - 2x).$$

Ya que un polinomio es una función racional con denominador 1, tenemos

$$\lim_{x\to\infty} (8x^2 - 2x) = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2 - 2x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2}{1} = \lim_{x\to\infty} 8x^2.$$

Esto es, el límite de $8x^2 - 2x$ cuando $x \to \infty$ es el mismo que el límite del término que incluye a la mayor potencia de x, a saber, $8x^2$. Cuando x se vuelve muy grande, también $8x^2$. Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty} (8x^2 - 2x) = \lim_{x\to\infty} 8x^2 = \infty.$$

En general, tenemos lo siguiente:

Cuando $x \to \infty$ (o $x \to -\infty$), el límite de una *función polinomial* es el mismo que el de su término que involucra la mayor potencia de x.



Principios en práctica 3

Límites al infinito para funciones polinomiales

El costo C de producir x unidades de cierto producto está dado por $C(x) = 50{,}000 + 200x + 0.3x^2$. Utilice su calculadora gráfica para explorar $\lim_{x\to\infty} C(x)$ y determine lo que esto significa.

EJEMPLO 5 Límites al infinito para funciones polinomiales

a. $\lim_{x\to-\infty} (x^3 - x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} x^3$. Cuando x se vuelve muy negativa, también lo hace x^3. Por tanto,

$$\lim_{x\to-\infty} (x^3 - x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

b. $\lim_{x\to-\infty} (-2x^3 + 9x) = \lim_{x\to-\infty} -2x^3 = \infty$, porque -2 veces un número muy negativo es un número positivo muy grande.

No utilice los términos dominantes cuando una función no es racional.

La técnica de poner atención a los términos dominantes para encontrar los límites cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$ es válida para *funciones racionales*, pero no es necesariamente válida para otros tipos de funciones. Por ejemplo, considere

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x). \qquad (1)$$

Obsérvese que $\sqrt{x^2 + x} - x$ no es una función racional. Es *incorrecto* inferir que como x^2 domina en $x^2 + x$, el límite en (1) es el mismo que

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2} - x) = \lim_{x\to\infty} (x - x) = \lim_{x\to\infty} 0 = 0.$$

Puede demostrarse (véase el problema 62) que el límite en (1) no es 0, sino $\frac{1}{2}$.

Las ideas presentadas en esta sección se aplicarán ahora a una función definida por partes.

EJEMPLO 6 Límite de una función definida por partes

Si $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } x \geq 1 \\ 3, & \text{si } x < 1 \end{cases}$, *encontrar el límite (si existe).*

a. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

Principios en práctica 4

Límites para una función definida por partes

Un plomero cobra \$100 por la primera hora de trabajo a domicilio y \$75 por cada hora (o fracción) posterior. La función de lo que le cuesta una visita de x horas es

$$f(x)=\begin{cases}\$100 \text{ si } & 0<x\leq 1,\\ \$175 \text{ si } & 1<x\leq 2,\\ \$250 \text{ si } & 2<x\leq 3,\\ \$325 \text{ si } & 3<x\leq 4.\end{cases}$$

Determine $\lim_{x\to 1} f(x)$ y $\lim_{x\to 2.5} f(x)$.

Solución: aquí x se acerca a 1 por la derecha. Para $x > 1$, tenemos $f(x) = x^2 + 1$. Por lo que,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+1).$$

Si x es mayor que 1, pero cercano a 1, entonces $x^2 + 1$ se acerca a 2. Por tanto,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+1) = 2.$$

b. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

Solución: aquí x se acerca a 1 por la izquierda. Para $x < 1$, $f(x) = 3$. De aquí que,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3 = 3.$$

c. $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Solución: queremos el límite cuando x se aproxima a 1. Sin embargo, de la regla de la función dependerá si $x \geq 1$ o $x < 1$. Así, debemos considerar límites laterales. El límite cuando x se aproxima a 1 existirá si y sólo si ambos límites laterales existen y son iguales. De las partes (a) y (b),

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x), \qquad \text{ya que } 2 \neq 3.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 1} f(x) \qquad \text{no existe.}$$

d. $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Solución: para valores muy grandes de x, tenemos $x \geq 1$, de modo que $f(x) = x^2 + 1$. Así,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^2+1) = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty.$$

e. $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

Solución: para valores muy negativos de x, tenemos $x < 1$, de modo que $f(x) = 3$. Por lo que,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} 3 = 3.$$

Todos los límites de las partes de la (a) a la (c) deben quedar claros a partir de la gráfica de f en la figura 9.20.

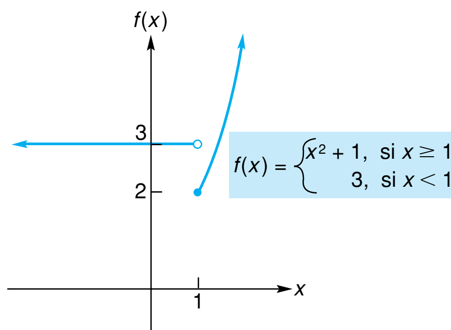


FIGURA 9.20 Gráfica de la función compuesta.

Ejercicio 9.2

1. Para la función f dada en la figura 9.21, encuentre los límites siguientes. Si el límite no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

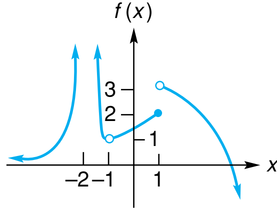


FIGURA 9.21 Diagrama para el problema 1.

a. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$. **b.** $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

c. $\lim_{x\to 1} f(x)$. **d.** $\lim_{x\to \infty} f(x)$.

e. $\lim_{x\to -2^-} f(x)$. **f.** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.

g. $\lim_{x\to -2} f(x)$. **h.** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

i. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$. **j.** $\lim_{x\to -1^+} f(x)$.

k. $\lim_{x\to -1} f(x)$.

2. Para la función f dada en la figura 9.22, encuentre los límites siguientes. Si el límite no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

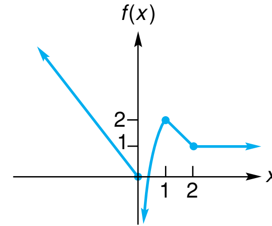


FIGURA 9.22 Diagrama para el problema 2.

a. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. **b.** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

c. $\lim_{x\to 0} f(x)$. **d.** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

e. $\lim_{x\to 1} f(x)$. **f.** $\lim_{x\to \infty} f(x)$.

g. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$. **h.** $\lim_{x\to \infty} f(x)$.

En los problemas del 3 al 54 encuentre el límite. Si no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

3. $\lim_{x\to 3^+} (x-2)$.

4. $\lim_{x\to -1^+} (1-x^2)$.

5. $\lim_{x\to -\infty} 5x$.

6. $\lim_{x\to \infty} 3$.

7. $\lim_{x\to 0^-} \frac{6x}{x^4}$.

8. $\lim_{x\to 0} \frac{5}{x-1}$.

9. $\lim_{x\to -\infty} x^2$.

10. $\lim_{t\to \infty} (t-1)^3$.

11. $\lim_{h\to 0^+} \sqrt{h}$.

12. $\lim_{h\to 5^-} \sqrt{5-h}$.

13. $\lim_{x\to 5} \frac{3}{x-5}$.

14. $\lim_{x\to 0^-} 2^{1/2}$.

15. $\lim_{x\to 1^+} (4\sqrt{x-1})$.

16. $\lim_{x\to 2^+} (x\sqrt{x^2-4})$.

17. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x+10}$.

18. $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{2-3x}$.

19. $\lim_{x\to \infty} \frac{3}{\sqrt{x}}$.

20. $\lim_{x\to \infty} \frac{7}{2x\sqrt{x}}$.

21. $\lim_{x\to \infty} \frac{x+8}{x-3}$.

22. $\lim_{x\to \infty} \frac{2x-4}{3-2x}$.

23. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-1}{x^3+4x-3}$.

24. $\lim_{r\to \infty} \frac{r^3}{r^2+1}$.

25. $\lim_{t\to \infty} \frac{5t^2+2t+1}{4t+7}$.

26. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{3x^6-x+4}$.

27. $\lim_{x\to \infty} \frac{7}{2x+1}$.

28. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{(4x-1)^3}$.

29. $\lim_{x\to \infty} \frac{3-4x-2x^3}{5x^3-8x+1}$.

30. $\lim_{x\to \infty} \frac{7-2x-x^4}{9-3x^4+2x^2}$.

31. $\lim_{x\to 3^-} \frac{x+3}{x^2-9}$.

32. $\lim_{x\to -2^+} \frac{5x}{4-x^2}$.

33. $\lim_{w\to \infty} \frac{2w^2-3w+4}{5w^2+7w-1}$.

34. $\lim_{x\to \infty} \frac{4-3x^3}{x^3-1}$.

35. $\lim_{x\to \infty} \frac{6-4x^2+x^3}{4+5x-7x^2}$.

36. $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x-x^3}{x^3+x+1}$.

37. $\lim_{x\to -5} \frac{2x^2+9x-5}{x^2+5x}$.

38. $\lim_{t\to 2} \frac{t^2+2t-8}{2t^2-5t+2}$.

39. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+1}{x^2+1}$.

40. $\lim_{x\to -1} \frac{3x^3-x^2}{2x+1}$.

41. $\lim_{x\to 1^+} \left[1+\frac{1}{x-1}\right]$.

42. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+2x^2+1}{x^3-4}$.

43. $\lim_{x\to -7^-} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-49}}$.

44. $\lim_{x\to -3^+} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$.

45. $\lim_{x\to 0^+} \frac{5}{x+x^2}$.

46. $\lim_{x\to \infty} \left(x+\frac{1}{x}\right)$.

47. $\lim_{x\to 1} x(x-1)^{-1}$.

48. $\lim_{x\to 1/2} \frac{1}{2x-1}$.

49. $\lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{3}{x}\right)$.

50. $\lim_{x\to 0} \left(-\frac{9}{x}\right)$.

51. $\lim_{x\to 0} |x|$.

52. $\lim_{x\to 0} \left|\frac{1}{x}\right|$.

53. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{x}$.

54. $\lim_{x\to \infty} \left[\frac{2}{x}-\frac{x^2}{x^2-1}\right]$.

En los problemas del 55 al 58 determine los límites que se indican. Si el límite no existe, especifique o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ en donde sea apropiado.

55. $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \le 2 \\ 1, & \text{si } x > 2 \end{cases};$

a. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$. **b.** $\lim_{x\to 2^-} f(x)$. **c.** $\lim_{x\to 2} f(x)$.

d. $\lim_{x\to \infty} f(x)$. **e.** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

56. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \le 1 \\ 2, & \text{si } x > 1 \end{cases};$

a. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$. **b.** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$. **c.** $\lim_{x\to 1} f(x)$.

d. $\lim_{x\to \infty} f(x)$. **e.** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

57. $g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ -x, & \text{si } x > 0 \end{cases};$

a. $\lim_{x\to 0^+} g(x)$. **b.** $\lim_{x\to 0^-} g(x)$. **c.** $\lim_{x\to 0} g(x)$.

d. $\lim_{x\to \infty} g(x)$. **e.** $\lim_{x\to -\infty} g(x)$.

58. $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 0 \\ -x, & \text{si } x > 0 \end{cases};$

a. $\lim_{x\to 0^+} g(x)$. **b.** $\lim_{x\to 0^-} g(x)$. **c.** $\lim_{x\to 0} g(x)$.

d. $\lim_{x\to \infty} g(x)$. **e.** $\lim_{x\to -\infty} g(x)$.

---

59. Costo promedio Si c es el costo total en dólares para producir q unidades de un producto, entonces el costo promedio por unidad para una producción de q unidades está dado por $\bar{c} = c/q$. Así, si la ecuación de costo total es $c = 5000 + 6q$, entonces

$$\bar{c} = \frac{5000}{q} + 6.$$

Por ejemplo, el costo total para la producción de 5 unidades es \$5030, y el costo promedio por unidad en este nivel de producción es \$1006. Por medio de la determinación de $\lim_{q\to\infty} \bar{c}$, demuestre que el costo promedio se aproxima a un nivel de estabilidad si el productor aumenta de manera continua la producción. ¿Cuál es el valor límite del costo promedio? Haga un bosquejo de la gráfica de la función costo promedio.

60. Costo promedio Repita el problema 59, dado que el costo fijo es \$12,000 y el costo variable está dado por la función $c_v = 7q$.

61. Población La población de cierta ciudad pequeña t años a partir de ahora se pronostica que será

$$N = 20{,}000 + \frac{10{,}000}{(t+2)^2}.$$

Determine la población a largo plazo, esto es, determine $\lim_{t\to\infty} N$.

62. Demuestre que

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \frac{1}{2}.$$

[*Sugerencia:* racionalice el numerador multiplicando la expresión $\sqrt{x^2+x} - x$ por

$$\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}.$$

Después exprese el denominador en una forma tal que x sea un factor.]

63. Relación huésped-parásito Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad de huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de huéspedes parasitados en un periodo es

$$y = \frac{900x}{10 + 45x}.$$

Si la densidad de huésped estuviese aumentando sin cota, ¿a qué valor se aproximaría y?

64. Si $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x}, & \text{si } x < 2, \\ x^3 + k(x+1), & \text{si } x \ge 2, \end{cases}$ determine el valor de la constante k para la cual $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe.

En los problemas 65 y 66 utilice una calculadora para evaluar la función dada cuando $x = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.01, 0.001$ y 0.0001. Con base en sus resultados, saque una conclusión acerca de $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

65. $f(x) = x^{2x}$.

66. $f(x) = x \ln x$.


67. Grafique $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x\to 1/2^+} f(x)$.


68. Grafique $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2-x}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, si existe. Utilice el símbolo ∞ o $-\infty$, si es apropiado.


69. Grafique $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3, & \text{si } x < 2, \\ 2x + 5, & \text{si } x \ge 2. \end{cases}$ Utilice la gráfica para estimar cada uno de los límites siguientes, si existen.

a. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$. **b.** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$. **c.** $\lim_{x\to 2} f(x)$.

OBJETIVO Extender la noción de interés compuesto estudiado en los capítulos 5 y 8, para la situación en donde el interés es compuesto de manera continua. Desarrollar fórmulas para el monto total (compuesto) y el valor presente.

9.3 INTERÉS COMPUESTO CONTINUAMENTE

Cuando se invierte dinero a una tasa anual dada, el interés devengado cada año depende de la frecuencia con que se capitaliza el interés. Por ejemplo, se devenga más interés si la capitalización es mensual que si fuese semestral. Podemos obtener más interés capitalizándolo cada semana, diario, cada hora y así sucesivamente. Sin embargo, hay un interés máximo que puede ser devengado, el cual examinaremos ahora.

Suponga que un capital de P dólares se invierte durante t años a una tasa anual r. Si el interés se capitaliza k veces en un año, entonces la tasa por periodo de conversión es r/k, y hay kt periodos. De la sección 5.1, el monto total S está dado por

$$S = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}.$$

Si $k \to \infty$, el número de periodos de conversión aumenta de manera indefinida y la longitud de cada periodo se aproxima a cero. En este caso, decimos que el interés se **capitaliza** (o compone) **continuamente,** esto es, en cada instante. El monto total es

$$\lim_{k\to\infty} P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt},$$

que puede escribirse como

$$P\left[\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k/r}\right]^{rt}.$$

Por medio de una sustitución hacemos que el límite tenga una forma conocida.

Haciendo $x = r/k$, entonces cuando $k \to \infty$, tenemos $x \to 0$. Así, el límite dentro de los corchetes tiene la forma $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$, la cual, como vimos en la sección 9.1, es e.

Por tanto, tenemos la fórmula siguiente:

Monto total (compuesto) bajo interés continuo

La fórmula

$$S = Pe^{rt}$$

proporciona el monto acumulado S de un capital de P dólares después de t años, a una tasa de interés anual r compuesta de manera continua.

El interés de $5.13 es el monto máximo de interés compuesto que puede generarse a una tasa anual de 5%.

EJEMPLO 1 Monto total

Si se invierten $100 *a una tasa anual de* 5% *capitalizado continuamente, encontrar el monto total al final de*

a. 1 *año*. **b.** 5 *años.*

Solución:

a. aquí $P = 100$, $r = 0.05$ y $t = 1$, de modo que

$$S = Pe^{rt} = 100e^{(0.05)(1)} \approx \$105.13.$$

Podemos comparar este valor con el valor después de un año de una inversión de \$100 invertidos a una tasa de 5% compuesto cada semestre, es decir, $100(1.025)^2 \approx 105.06$. La diferencia no es significativa.

b. Aquí $P = 100$, $r = 0.05$ y $t = 5$, de modo que

$$S = 100e^{(0.05)(5)} = 100e^{0.25} \approx \$128.40.$$

Podemos encontrar una expresión que dé la tasa efectiva que corresponda a una tasa anual r compuesta continuamente (del capítulo 8, la tasa efectiva es la tasa equivalente compuesta anualmente). Si i es la correspondiente tasa efectiva, entonces después de 1 año el capital P se convierte en $P(1 + i)$. Esto debe ser igual a la cantidad que se acumulaba bajo interés continuo, Pe^r. Por tanto, $P(1 + i) = Pe^r$, de lo cual $1 + i = e^r$, así que $i = e^r - 1$.

Tasa efectiva bajo interés compuesto continuo

La tasa efectiva que corresponde a una tasa anual r capitalizada continuamente es

$$e^r - 1.$$

EJEMPLO 2 Tasa efectiva

Encontrar la tasa efectiva que corresponda a una tasa anual de 5% capitalizada continuamente.

Solución: la tasa efectiva es

$$e^r - 1 = e^{0.05} - 1 \approx 0.0513,$$

o 5.13%.

Si resolvemos $S = Pe^{rt}$ para P, obtenemos $P = S/e^{rt}$. En esta fórmula, P es el capital que debe invertirse ahora a una tasa anual r capitalizada continuamente, de modo que al final de t años el monto total sea S. Llamamos a P el **valor presente** de S.

Valor presente bajo interés continuo

La fórmula

$$P = Se^{-rt}$$

da el valor presente neto P de S dólares que se deben pagar al final de t años a una tasa anual r capitalizada continuamente.

EJEMPLO 3 Fondo de inversión

Un fondo de inversión se establece por medio de un solo pago, de modo que al final de 20 años se acumulen \$25,000 *en el fondo. Si el interés es capitalizado continuamente a una tasa anual de 7%, ¿cuánto dinero (aproximado al dólar más cercano) debe pagarse inicialmente al fondo?*

Solución: queremos el valor presente de $25,000 pagaderos dentro de 20 años. Por tanto,

$$P = Se^{-rt} = 25{,}000e^{-(0.07)(20)}$$
$$= 25{,}000e^{-1.4} \approx 6165.$$

Por tanto, deben pagarse $6165 inicialmente.

Ejercicio 9.3

En los problemas 1 y 2 encuentre el monto total y el interés compuesto si se invierten $4000 *durante 6 años y el interés se capitaliza continuamente a la tasa anual dada.*

1. $5\frac{1}{2}\%$. **2.** 9%.

En los problemas 3 y 4 encuentre el valor presente de $2500 *pagaderos dentro de 8 años, si el interés es compuesto continuamente a la tasa anual dada.*

3. $6\frac{3}{4}\%$. **4.** 8%.

En los problemas del 5 al 8 encuentre la tasa efectiva de interés que corresponde a la tasa anual dada capitalizada continuamente.

5. 4%. **6.** 7%. **7.** 3%. **8.** 9%.

9. Inversión Si se depositan $100 en una cuenta de ahorros que gana interés a una tasa anual de $4\frac{1}{2}\%$ capitalizada continuamente, ¿cuál será el valor de la cantidad al final de 2 años?

10. Inversión Si se invierten $1000 a una tasa anual de 3% capitalizada continuamente, encuentre el monto total al final de 8 años.

11. Redención de acciones La mesa directiva de una compañía acuerda redimir algunas de sus acciones preferentes en 5 años. En ese tiempo se requerirán $1,000,000. Si la compañía puede invertir dinero a una tasa de interés anual de 5% capitalizable continuamente, ¿cuánto debe invertir en este momento de modo que el valor futuro sea suficiente para redimir las acciones?

12. Fondo de inversión Un fondo de inversión se establece por un solo pago, de modo que al final de 30 años habrá $50,000 en el fondo. Si el interés se capitaliza continuamente a una tasa anual de 6%, ¿cuánto dinero debe pagarse inicialmente?

13. Fondo de inversión Como un regalo para el vigésimo cumpleaños de su hija recién nacida, los Smith quieren darle una cantidad de dinero que tenga el mismo poder adquisitivo que $10,000 en la fecha de su nacimiento. Para hacer esto ellos realizan un solo pago inicial a un fondo de inversión establecido específicamente para este propósito.

a. Suponga que la tasa de inflación efectiva anual es de 4%. Dentro de 20 años, ¿cuál suma tendrá el mismo poder adquisitivo que $10,000 actuales? Redondee su respuesta al dólar más cercano.

b. ¿Cuál debe ser la cantidad de pago único inicial al fondo, si el interés se capitaliza continuamente a una tasa anual de 6%? Redondee su respuesta al dólar más cercano.

14. Inversión En la actualidad, los Smith tienen $50,000 para invertir durante 18 meses. Tienen dos opciones para ello:

a. Invertir el dinero en un certificado que paga interés a la tasa nominal de 5% compuesto trimestralmente.

b. Invertir el dinero en una cuenta de ahorros que genera interés a la tasa anual de 4.5% compuesto de manera continua.

Con cada opción, ¿cuánto dinero tendrán dentro de 18 meses?

15. ¿Qué tasa anual compuesta de manera continua es equivalente a una tasa efectiva de 5%?

16. ¿Qué tasa anual r compuesta de manera continua es equivalente a una tasa nominal de 6% compuesto cada semestre? [*Sugerencia:* primero demuestre que $r = 2\ln(1.03)$.]

17. Anualidad continua Una anualidad en la que R dólares se pagan cada año por medio de pagos uniformes, que son pagados de manera continua, se llama *anualidad continua* o *flujo continuo de ingreso*. El valor presente de una anualidad continua durante t años es

$$R \cdot \frac{1 - e^{-rt}}{r},$$

en donde r es la tasa de interés anual compuesto continuamente. Determine el valor presente de una anualidad continua de $100 anuales durante 20 años al 5% compuesto de manera continua. Proporcione su respuesta al dólar más cercano.

18. Utilidad Suponga que un negocio tiene una utilidad anual de $40,000 durante los siguientes cinco años, y las utilidades se generan de manera continua durante el transcurso de cada año. Entonces las utilidades pueden considerarse como una anualidad continua (véase el problema 17). Si el dinero tiene un valor de 4% compuesto de manera continua, determine el valor presente de las utilidades.

19. Si un interés es compuesto de manera continua a una tasa anual de 0.07, ¿cuántos años le tomaría a un capital de P triplicarse? Proporcione su respuesta al año más cercano.

20. Si un interés es compuesto de manera continua, ¿a qué tasa anual un capital de P se duplicará en 10 años? Proporcione su respuesta al por ciento más cercano.

21. Opciones de ahorro El 1 de julio de 2001, el señor Green tenía \$1000 en una cuenta de ahorros en el Banco Nacional. Esta cuenta devengaba interés a una tasa anual de 3.5% compuesto continuamente. Un banco competidor intentó atraer nuevos clientes ofreciendo añadir de manera inmediata \$20 a cualquier cuenta nueva que se abriera con un depósito mínimo de \$1000, y que la nueva cuenta generaría interés a la tasa anual de 3.5% compuesto semestralmente. El señor Green decidió elegir una de las siguientes tres opciones el 1 de julio de 2001:

a. Dejar el dinero en el Banco Nacional.
b. Cambiar el dinero al banco competidor.
c. Dejar la mitad del dinero en el Banco Nacional y cambiar la otra mitad al banco competidor.

Para cada una de estas tres opciones, determine el monto acumulado del señor Green el 1 de julio de 2003.

22. Inversión

a. El 1 de noviembre de 1990, la señora Rodgers invirtió \$10,000 en un certificado de depósito a 10 años que pagaba interés a la tasa anual de 4% compuesto continuamente. Cuando el certificado maduró el 1 de noviembre de 2000, ella reinvirtió el monto total acumulado en bonos corporativos, los cuales devengan interés a la tasa de 5% compuesto anualmente. Al dólar más cercano, ¿cuál será el monto acumulado de la señora Rodgers el 1 de noviembre de 2005?

b. Si la señora Rodgers hubiese hecho una sola inversión de \$10,000 en 1990, cuya maduración fuese en 2005, con una tasa efectiva de interés de 4.5%, ¿el monto acumulado sería más o menos que en la parte (a), por cuánto (al dólar más cercano)?

23. Estrategia de inversión Suponga que usted tiene \$9000 para invertir.

a. Si los invierte con el Banco Nacional a la tasa nominal de 5% compuesto trimestralmente, determine el monto acumulado al final de un año.

b. El Banco Nacional también ofrece certificados en los que paga 5.5% compuesto continuamente. Sin embargo, se requiere un mínimo de \$10,000 de inversión. Ya que usted sólo tiene \$9000, el banco está dispuesto a darle un préstamo por un año por la cantidad adicional de \$1000 que usted necesita. El interés para este préstamo es una tasa efectiva de 8%, y tanto el capital como el interés se pagan al final del año. Determine si esta estrategia es preferible o no a la estrategia de la parte (a).

9.4 CONTINUIDAD

OBJETIVO Estudiar continuidad en el contexto de límites y determinar puntos de discontinuidad para una función.

Muchas funciones tienen la propiedad de que no hay "cortes" en sus gráficas. Por ejemplo, compare las funciones

$$f(x) = x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \neq 1, \\ 2, & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

cuyas gráficas aparecen en las figuras 9.23 y 9.24, respectivamente. Cuando $x = 1$, la gráfica de f no se corta, pero la de g sí tiene un corte. Poniéndolo de otra manera, si tuviera que trazar ambas gráficas con un lápiz, tendría que levantar el lápiz de la gráfica de g, cuando $x = 1$, pero no lo tendría que levantar de la gráfica de f. Estas situaciones pueden expresarse por medio de límites. Cuando x se aproxima a 1, compare el límite de cada función con el valor de la función en $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1),$$

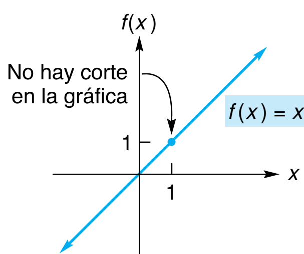


FIGURA 9.23 Continua en 1.

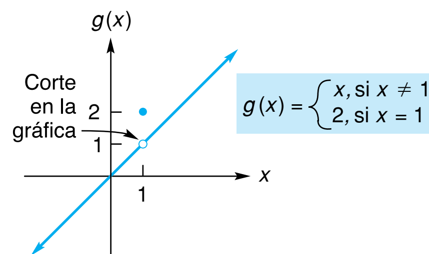


FIGURA 9.24 Discontinua en 1.

mientras que

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 1 \neq g(1) = 2.$$

El límite de f cuando $x \to 1$ es igual a $f(1)$, pero el límite de g cuando $x \to 1$ *no* es igual a $g(1)$. Por estas razones decimos que f es *continua* en 1 y g *discontinua* en 1.

Definición

Una función f es ***continua*** en a si y sólo si las siguientes tres condiciones se cumplen:

1. $f(x)$ está definida en $x = a$; esto es, a está en el dominio de f.
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si f está definida en un intervalo abierto que contenga a a, excepto tal vez en a misma, y f no es continua en a, entonces se dice que f es ***discontinua*** en a, y a es llamada ***punto de discontinuidad.***

EJEMPLO 1 Aplicación de la definición de continuidad

a. *Mostrar que $f(x) = 5$ es continua en 7.*

Solución: debemos verificar que las tres condiciones se cumplan. Primera, $f(7) = 5$, de modo que f está definida en $x = 7$. Segunda,

$$\lim_{x \to 7} f(x) = \lim_{x \to 7} 5 = 5.$$

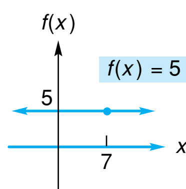


FIGURA 9.25 f es continua en 7.

Por tanto, f tiene límite cuando $x \to 7$. Tercera,

$$\lim_{x \to 7} f(x) = 5 = f(7).$$

Por tanto, f es continua en 7 (véase la fig. 9.25).

b. *Demostrar que $g(x) = x^2 - 3$ es continua en -4.*

Solución: la función g está definida en $x = -4$; $g(-4) = 13$. También,

$$\lim_{x \to -4} g(x) = \lim_{x \to -4} (x^2 - 3) = 13 = g(-4).$$

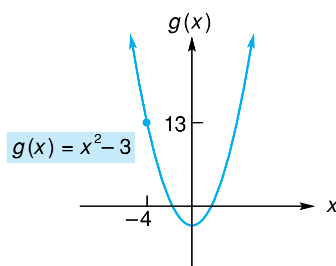


FIGURA 9.26 g es continua en -4.

Por tanto, g es continua en -4 (véase la fig. 9.26).

Decimos que una función es *continua en un intervalo* si es continua en cada punto de ese intervalo. En esta situación, la gráfica de la función es conexa sobre el intervalo. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es continua en el intervalo [2, 5]. De hecho, en el ejemplo 5 de la sección 9.1, mostramos que para *cualquier* función polinomial f, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Esto significa que

> Una función polinomial es continua en todo punto.

Se concluye que tal función es continua en todo intervalo. Decimos que las funciones polinomiales son **continuas en todas partes,** o de manera más sencilla, que son continuas.

EJEMPLO 2 Continuidad de funciones polinomiales

Las funciones $f(x) = 7$ y $g(x) = x^2 - 9x + 3$ son polinomiales. Por tanto, son continuas. Por ejemplo, son continuas en 3.

¿Cuándo es discontinua una función? Podemos decir que una función f definida en un intervalo abierto que contenga a a es discontinua en a, si

1. f no tiene límite cuando $x \to a$,

o bien

2. cuando $x \to a$, f tiene un límite diferente de $f(a)$.

Es obvio que si f no está definida en a, no es continua allí. Sin embargo, si f no está definida en a pero *sí está* definida para todos los valores cercanos, entonces no sólo no es continua en a, es discontinua allí. En la figura 9.27 podemos encontrar por inspección puntos de discontinuidad.

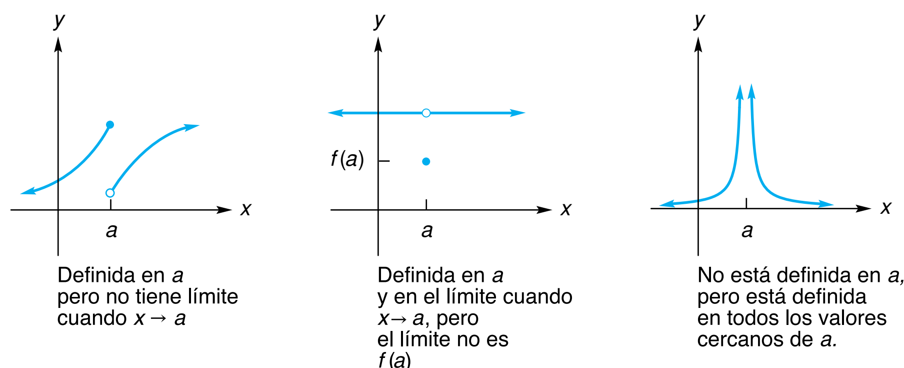


FIGURA 9.27 Discontinuidades en a.

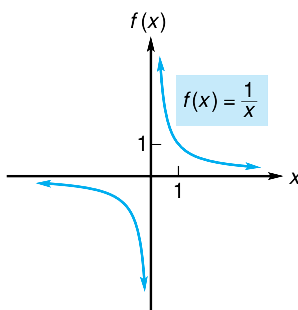


FIGURA 9.28 Discontinuidad infinita en 0.

EJEMPLO 3 Discontinuidades

a. Sea $f(x) = 1/x$ (véase la fig. 9.28). Observe que f no está definida en $x = 0$, pero está definida para cualquier otro valor de x cercana a cero. Así, f es discontinua en 0. Además, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. Se dice que una función tiene **discontinuidad infinita** en a, cuando al menos uno de los límites laterales es ∞ o $-\infty$, cuando $x \to a$. De aquí que f tenga una *discontinuidad infinita* en $x = 0$.

b. Sea $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$

(Véase la fig. 9.29). Aunque f está definida en $x = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. Por tanto, f es discontinua en 0.

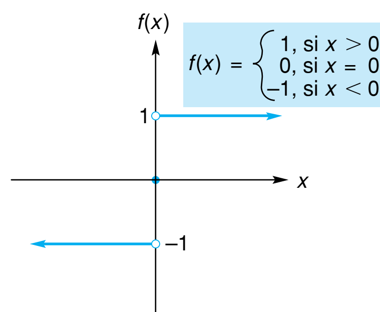


FIGURA 9.29 Función definida por partes discontinuas.

La propiedad siguiente indica dónde ocurren las discontinuidades de una función racional.

Discontinuidades de una función racional

Una función racional es discontinua en los puntos donde el denominador es 0, y es continua en cualquier otra parte.

¿La función $f(x) = \frac{x+1}{x+1}$ es continua en todas partes? No, es discontinua en -1. Algunos estudiantes piensan que $f(x)$ siempre es 1, pero no es así. En realidad,

$$f(x) = 1 \text{ para } x \neq -1,$$

y f no está definida para $x = -1$.

EJEMPLO 4 Localización de discontinuidades para funciones racionales

Para cada una de las siguientes funciones, encontrar todos los puntos de discontinuidad.

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 2x - 8}$.

Solución: esta función racional tiene denominador

$$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2),$$

que es 0 cuando $x = -4$ o $x = 2$. Así, f sólo es discontinua en -4 y 2.

b. $h(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + 4}$.

Solución: para esta función racional, el denominador nunca es cero (siempre es positivo). De este modo, h no tiene discontinuidad.

EJEMPLO 5 Localización de discontinuidades para funciones definidas por partes

Para cada una de las funciones siguientes, encontrar todos los puntos de discontinuidad.

a. $f(x) = \begin{cases} x + 6, & \text{si } x \geq 3, \\ x^2, & \text{si } x < 3. \end{cases}$

Solución: el único problema posible puede ocurrir cuando $x = 3$, ya que éste es el único lugar en el que la gráfica de f podría no ser conexa. Sabemos que $f(3) = 3 + 6 = 9$. Y puesto que

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x + 6) = 9$$

y

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x^2 = 9,$$

podemos concluir que $\lim_{x \to 3} f(x) = 9 = f(3)$. De modo que la función es continua en 3, así como en todos los demás valores de x. Podemos obtener la misma conclusión por inspección de la gráfica de f en la figura 9.30.

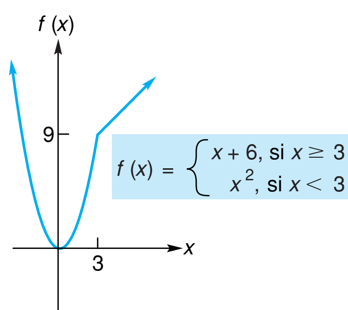


FIGURA 9.30 Función definida por partes continuas.

b. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x > 2, \\ x^2, & \text{si } x < 2. \end{cases}$

Solución: ya que f no está definida en $x = 2$, pero sí para toda x cercana, f es discontinua en 2 y continua para todas las demás x (véase la fig. 9.31).

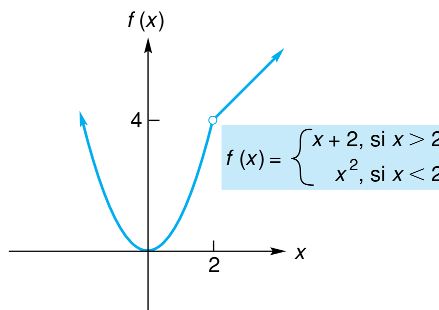


FIGURA 9.31 Discontinua en 2.

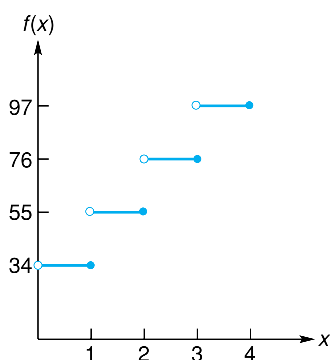


FIGURA 9.32 Función del servicio postal.

EJEMPLO 6 Función del "servicio postal"

La función del "servicio postal"

$$c = f(x) = \begin{cases} 34, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 55, & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ 76, & \text{si } 2 < x \leq 3, \\ 97, & \text{si } 3 < x \leq 4, \end{cases}$$

da el costo c (en centavos) de enviar un paquete de peso x (onzas), $0 < x \leq 4$, en enero de 2001. Es claro de su gráfica en la figura 9.32 que f tiene discontinuidades en 1, 2 y 3, y que es constante para valores de x que están entre discontinuidades sucesivas. Tal función se conoce como *función escalón* a causa de la apariencia de su gráfica.

Este método de expresar la continuidad en a, con frecuencia se utiliza en demostraciones matemáticas.

Hay otra manera de expresar continuidad aparte de la dada en la definición. Si tomamos la proposición

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

y reemplazamos x por $a + h$, entonces cuando $x \to a$ tenemos que $h \to 0$ (véase la fig. 9.33). Por tanto, la proposición

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

define continuidad en a.

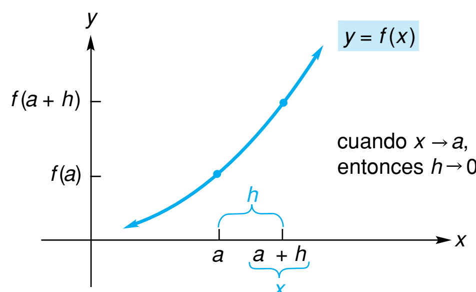


FIGURA 9.33 Diagrama para la continuidad en a.

Tecnología

A partir de la gráfica de una función debemos ser capaces de determinar dónde ocurre una discontinuidad. Sin embargo, es posible equivocarnos. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

es discontinua en ± 1, pero la discontinuidad en 1 no es clara de la gráfica de f en la figura 9.34. Por otra parte, la discontinuidad en -1 es obvia.

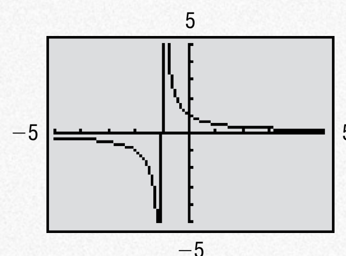


FIGURA 9.34 La discontinuidad en 1 no es evidente de la gráfica de $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$.

Con frecuencia es útil describir una situación por medio de una función continua. Por ejemplo, el programa de demanda de la tabla 9.3, indica el número de unidades de un producto que se demandará por semana a diversos precios. Esta información puede proporcionarse de manera gráfica, como en la figura 9.35(a), trazando cada pareja cantidad-precio como un punto. Es claro que esta gráfica no representa una función continua. Además, no nos da información del precio al cual, digamos, 35 unidades serán demandadas. Sin embargo, si conectamos los puntos de la figura 9.35(a) por medio de una curva suave [véase la fig. 9.35(b)], obtenemos una curva de demanda. De ella podríamos estimar que alrededor de $2.50 por unidad, se demandarían 35 unidades.

TABLA 9.3 Programa de demanda

Precio/unidad, *p*	**Cantidad/semana, *q***
$20	0
10	5
5	15
4	20
2	45
1	95

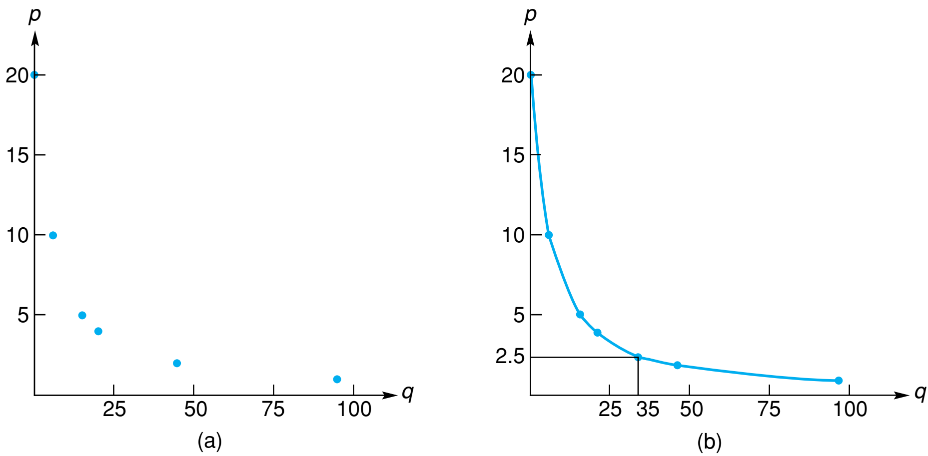


FIGURA 9.35 Vista de datos por medio de una función continua.

Con frecuencia es posible y útil describir una gráfica, como en la figura 9.35(b), por medio de una ecuación que define una función continua f. Tal función no sólo nos da una ecuación de demanda, $p = f(q)$, para anticipar los precios correspondientes a las cantidades demandadas, también permite efectuar un análisis matemático conveniente de las propiedades básicas de la demanda. Por supuesto que se debe tener cuidado al trabajar con ecuaciones como $p = f(q)$. Matemáticamente, f puede estar definida cuando $q = \sqrt{37}$, pero desde un punto de vista práctico, una demanda de $\sqrt{37}$ unidades, podría no tener significado para nuestra situación particular. Por ejemplo, si una unidad es un huevo, entonces una demanda de $\sqrt{37}$ huevos, no tiene sentido.

En general, desearemos ver situaciones prácticas en términos de funciones continuas, siempre que sea posible realizar mejores análisis de su naturaleza.

Ejercicio 9.4

En los problemas del 1 al 6 utilice la definición de continuidad para mostrar que la función dada es continua en el punto indicado.

1. $f(x) = x^3 - 5x;\quad x = 2.$

2. $f(x) = \dfrac{x-3}{9x};\quad x = -3.$

3. $g(x) = \sqrt{2-3x};\quad x = 0.$

4. $f(x) = \dfrac{x}{8};\quad x = 2.$

5. $h(x) = \dfrac{x-4}{x+4};\quad x = 4.$

6. $f(x) = \sqrt[3]{x};\quad x = -1.$

En los problemas del 7 al 12 determine si la función es continua en los puntos dados.

7. $f(x) = \dfrac{x+4}{x-2};\quad -2, 0.$

8. $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{6};\quad 2, -2.$

9. $g(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9};\quad 3, -3.$

10. $h(x) = \dfrac{3}{x^2+4};\quad 2, -2.$

11. $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{si } x \geq 2 \\ x^2, & \text{si } x < 2 \end{cases};\quad 2, 0.$

12. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x \neq 0 \end{cases};\quad 0, -1.$

En los problemas del 13 al 16 dé una razón del porqué la función es continua en todas partes.

13. $f(x) = 2x^2 - 3.$

14. $f(x) = \dfrac{x+2}{5}.$

15. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+4}.$

16. $f(x) = x(1-x).$

En los problemas del 17 al 34 encuentre todos los puntos de discontinuidad.

17. $f(x) = 3x^2 - 3.$

18. $h(x) = x - 2.$

19. $f(x) = \dfrac{3}{x+4}.$

20. $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-4}.$

21. $g(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{5}.$

22. $f(x) = 0.$

23. $f(x) = \dfrac{x^2+6x+9}{x^2+2x-15}.$

24. $g(x) = \dfrac{x-3}{x^2+x}.$

25. $h(x) = \dfrac{x-7}{x^3-x}.$

26. $f(x) = \dfrac{x}{x}.$

27. $p(x) = \dfrac{x}{x^2+1}.$

28. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4-1}.$

29. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \geq -1, \\ 1, & \text{si } x < -1. \end{cases}$

31. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 1, \\ x-1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{si } x > 2, \\ 3-2x, & \text{si } x < 2. \end{cases}$

33. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x > 2, \\ x-1, & \text{si } x < 2. \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{15}{x}, & \text{si } x \geq 3, \\ 2x-1, & \text{si } x < 3. \end{cases}$

35. Tarifa telefónica Supóngase que la tarifa telefónica de larga distancia para una llamada desde Hazleton, Pennsylvania, a los Ángeles, California, es de \$0.10 por el primer minuto y de \$0.06 por cada minuto o fracción adicional. Si $y = f(t)$ es una función que indica el cargo total y por una llamada de t minutos de duración, haga el bosquejo de la gráfica de f para $0 < t \leq 4\frac{1}{2}$. Utilice esta gráfica para determinar los valores de t en los cuales ocurren discontinuidades, donde $0 < t \leq 4\frac{1}{2}$.

36. La *función mayor entero*, $f(x) = [x]$, está definida como el entero más grande que es menor o igual a x, don-

de x es cualquier número real. Por ejemplo, $[3] = 3$, $[1.999] = 1$, $[\frac{1}{4}] = 0$ y $[-4.5] = -5$. Haga el bosquejo de la gráfica de esta función para $-3.5 \leq x \leq 3.5$. Utilice su bosquejo para determinar los valores de x en los cuales ocurren discontinuidades.

37. Inventario Haga el bosquejo de la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 600, & \text{si } 0 \leq x < 5, \\ -100x + 1100, & \text{si } 5 \leq x < 10, \\ -100x + 1600, & \text{si } 10 \leq x < 15. \end{cases}$$

Una función como la anterior podría describir el inventario y de una compañía en el instante x.

¿f es continua en 2?, ¿es continua en 5?, ¿es continua en 10?



38. Grafique $g(x) = e^{-1/x^2}$. Ya que g no está definida en $x = 0$, pero sí para todos los valores cercanos a cero, g es discontinua en 0. Con base en la gráfica de g, ¿es

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

continua en 0?

OBJETIVO Desarrollar técnicas para resolver desigualdades no lineales.

9.5 Continuidad aplicada a desigualdades

En la sección 2.2 resolvimos desigualdades lineales. Ahora veremos cómo la noción de continuidad puede aplicarse para resolver una desigualdad no lineal, tal como $x^2 + 3x - 4 < 0$.

Recuerde (de la sección 3.4) que hay una relación entre las intersecciones x de la gráfica de una función g (esto es, los puntos en donde la gráfica corta al eje x) y las raíces de la ecuación $g(x) = 0$, que son llamados ceros de g. Si la gráfica de g tiene una intersección con el eje x $(r, 0)$, entonces $g(r) = 0$, de modo que r es una raíz de la ecuación $g(x) = 0$, y por tanto r es un cero de g. De aquí que de la gráfica de $y = g(x)$ en la figura 9.36, concluimos que r_1, r_2 y r_3 son ceros de g. Por otra parte, si r es cualquier raíz real de la ecuación $g(x) = 0$, entonces $g(r) = 0$, y como consecuencia $(r, 0)$ está en la gráfica de g. Esto significa que todos los ceros reales de g pueden representarse por los puntos donde la gráfica de g coincide con el eje x. También note en la figura 9.36 que los tres ceros determinan cuatro intervalos abiertos sobre el eje x:

$$(-\infty, r_1), \quad (r_1, r_2), \quad (r_2, r_3) \quad \text{y} \quad (r_3, \infty).$$

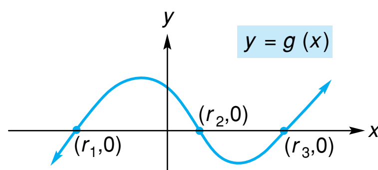


FIGURA 9.36 r_1, r_2, y r_3 son ceros de g.

Para resolver $x^2 + 3x - 4 > 0$, hacemos

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1).$$

Puesto que f es una función polinomial, es continua en todas partes. Los ceros de f son -4 y 1; de aquí que la gráfica de f tiene intersecciones con el eje x, $(-4, 0)$ y $(1, 0)$. (Véase la fig. 9.37.) Los ceros, o para ser más precisos, las intersecciones con el eje x, determinan tres intervalos sobre el eje x:

$$(-\infty, -4), \qquad (-4, 1) \qquad \text{y} \qquad (1, \infty).$$

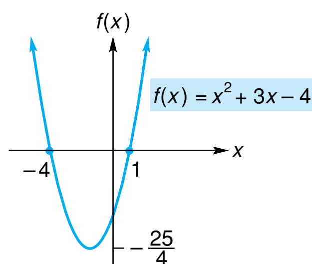


FIGURA 9.37 -4 y 1 son ceros de f.

Considere el intervalo $(-\infty, -4)$. Como f es continua en este intervalo, afirmamos que $f(x) > 0$, o bien, $f(x) < 0$ *en todo* el intervalo. Si no fuera éste el caso, entonces $f(x)$ cambiaría de signo en el intervalo. Debido a la continuidad de f, habría un punto donde la gráfica intersecaría al eje x, por ejemplo $(x_0, 0)$. (Véase la fig. 9.38.) Pero, entonces x_0 sería un cero de f. Esto no puede ser, ya que no hay ceros de f menores que -4. De aquí que $f(x)$ debe ser estrictamente positiva o estrictamente negativa en $(-\infty, -4)$. Un argumento similar se puede enunciar para cada uno de los otros intervalos.

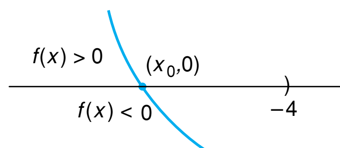


FIGURA 9.38 Cambio de signo para funciones continuas.

Para determinar el signo de $f(x)$ en cualquiera de los tres intervalos, es suficiente con determinarlo en cualquier punto del intervalo. Por ejemplo, -5 está en $(-\infty, -4)$ y

$$f(-5) = 6 > 0. \qquad \text{Entonces } f(x) > 0 \text{ en } (-\infty, -4).$$

Del mismo modo, 0 está en $(-4, 1)$ y

$$f(0) = -4 < 0. \qquad \text{Entonces } f(x) < 0 \text{ en } (-4, 1).$$

Por último, 3 está en $(1, \infty)$ y

$$f(3) = 14 > 0. \qquad \text{Entonces } f(x) > 0 \text{ en } (1, \infty).$$

(Véase el "diagrama de signos" en la figura 9.39). Por tanto,

$$x^2 + 3x - 4 > 0 \quad \text{en} \quad (-\infty, -4) \text{ y } (1, \infty),$$

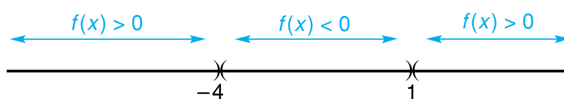


FIGURA 9.39 Diagrama de signos para $x^2 + 3x - 4$.

Observe la importancia de la continuidad en la solución de desigualdades.

de modo que hemos resuelto la desigualdad. Estos resultados son obvios de la gráfica de la figura 9.37. La gráfica está por arriba del eje x [esto es, $f(x) > 0$] en $(-\infty, -4)$ y $(1, \infty)$.

EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad cuadrática

Resolver $x^2 - 3x - 10 < 0$.

Solución: si $f(x) = x^2 - 3x - 10$, entonces f es una función polinomial (cuadrática) y, por tanto, continua en todas partes. Para encontrar los ceros (reales) de f, tenemos

$$x^2 - 3x - 10 = 0,$$
$$(x + 2)(x - 5) = 0,$$
$$x = -2, 5.$$

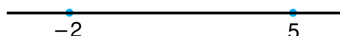


FIGURA 9.40 Ceros de $x^2 - 3x - 10$.

Los ceros -2 y 5 se muestran en la figura 9.40. Estos ceros determinan los intervalos

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 5) \quad \text{y} \quad (5, \infty).$$

Para determinar el signo de $f(x)$ en $(-\infty, -2)$, seleccionamos un punto en ese intervalo, digamos -3. El signo de $f(x)$ en todo $(-\infty, -2)$ es el mismo que el de $f(-3)$. Ya que

$$f(x) = (x + 2)(x - 5) \qquad \text{[forma factorizada de } f(x)\text{]},$$

tenemos

$$f(-3) = (-3 + 2)(-3 - 5) = (-)(-) = + .$$

[Observe cómo encontramos de manera conveniente el signo de $f(-3)$ utilizando los signos de los factores de $f(x)$]. Así, $f(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$. Para examinar los otros dos intervalos, seleccionamos los puntos 0 y 6. Encontramos que

$$f(0) = (0 + 2)(0 - 5) = (+)(-) = -,$$

de modo que $f(x) < 0$ en $(-2, 5)$ y

$$f(6) = (6 + 2)(6 - 5) = (+)(+) = +,$$

así que $f(x) > 0$ en $(5, \infty)$. Un resumen de nuestros resultados está en el diagrama de signos de la figura 9.41. Así, $x^2 - 3x - 10 < 0$ en $(-2, 5)$.

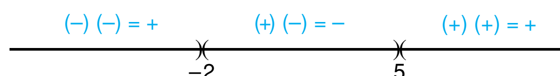


FIGURA 9.41 Diagrama de signos para $(x + 2)(x - 5)$.

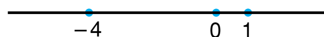


FIGURA 9.42 Ceros de $x(x - 1)(x + 4)$.

EJEMPLO 2 Solución de una desigualdad polinomial

Resolver $x(x - 1)(x + 4) \leq 0$.

Solución: si $f(x) = x(x - 1)(x + 4)$, entonces f es una función polinomial y es continua en todas partes. Los ceros de f son 0, 1 y -4, que pueden verse en la figura 9.42. Estos ceros determinan cuatro intervalos:

$$(-\infty, -4), \quad (-4, 0), \quad (0, 1) \quad \text{y} \quad (1, \infty).$$

Ahora, en un punto de prueba en cada intervalo determinamos el signo de $f(x)$:

$$f(-5) = (-)(-)(-) = -, \qquad \text{así } f(x) < 0 \text{ en } (-\infty, -4);$$

$$f(-2) = (-)(-)(+) = +, \qquad \text{así } f(x) > 0 \text{ en } (-4, 0);$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = (+)(-)(+) = -, \qquad \text{así } f(x) < 0 \text{ en } (0, 1);$$

y

$$f(2) = (+)(+)(+) = +, \qquad \text{así } f(x) > 0 \text{ en } (1, \infty).$$

La figura 9.43 muestra un diagrama de signos para $f(x)$. Por tanto, $x(x - 1)(x + 4) \leq 0$ en $(-\infty, -4]$ y en $[0, 1]$. Observe que -4, 0 y 1 están incluidos en la solución porque satisfacen la igualdad (=) que es parte de la desigualdad ($\leq$).

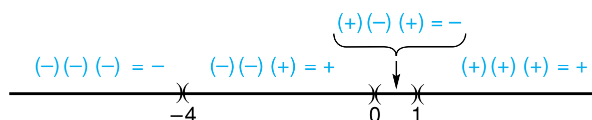


FIGURA 9.43 Diagrama de signos para $x(x - 1)(x + 4)$.

Principios en práctica 1
Resolución de una desigualdad polinomial

Una caja abierta se construye cortando un cuadrado de cada esquina de una pieza de metal de 8 por 10 pulgadas. Si cada lado de los cuadrados cortados es de x pulgadas de largo, el volumen de la caja está dado por $V(x) = x(8 - 2x)(10 - 2x)$. Este problema sólo tiene sentido cuando el volumen es positivo. Determine los valores de x para los que el volumen es positivo.

EJEMPLO 3 Solución de una desigualdad con función racional

Resolver $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x} \geq 0$.

Solución: sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x} = \dfrac{(x - 1)(x - 5)}{x}$. Para una función racional f, resolvemos la desigualdad considerando los intervalos determinados por los ceros de f y los puntos donde f es discontinua, puntos alrededor de los cuales el signo de $f(x)$ puede cambiar. Aquí los ceros son 1 y 5. La función es discontinua en 0 y continua en los demás puntos. En la figura 9.44 hemos colocado un círculo vacío en 0 para indicar que f no está definida allí. Entonces, consideremos los intervalos

$$(-\infty, 0), \quad (0, 1) \quad (1, 5) \quad \text{y} \quad (5, \infty).$$

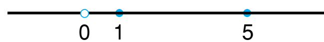


FIGURA 9.44 Ceros y puntos de discontinuidad para $\dfrac{(x - 1)(x - 5)}{x}$.

Al determinar el signo de $f(x)$ en un punto de prueba en cada intervalo, encontramos que:

$$f(-1) = \frac{(-)(-)}{(-)} = -, \qquad \text{así } f(x) < 0 \text{ en } (-\infty, 0);$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(-)(-)}{(+)} = +, \qquad \text{así } f(x) > 0 \text{ en } (0, 1);$$

$$f(2) = \frac{(+)(-)}{(+)} = -, \qquad \text{así } f(x) < 0 \text{ en } (1, 5);$$

y

$$f(6) = \frac{(+)(+)}{(+)} = +, \qquad \text{así } f(x) > 0 \text{ on } (5, \infty).$$

El diagrama de signos está dado en la figura 9.45. Por tanto, $f(x) \geq 0$ en $(0, 1]$ y en $[5, \infty)$. ¿Por qué 1 y 5 se incluyen, pero 0 se excluye? La figura 9.46 muestra la gráfica de f. Observe que la solución de $f(x) \geq 0$, consiste en todos los valores de x para los cuales la gráfica está en o sobre el eje x.

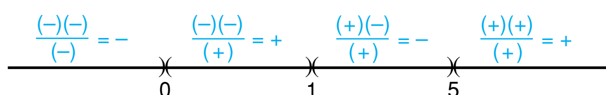


FIGURA 9.45 Diagrama de signo para $\frac{(x-1)(x-5)}{x}$.

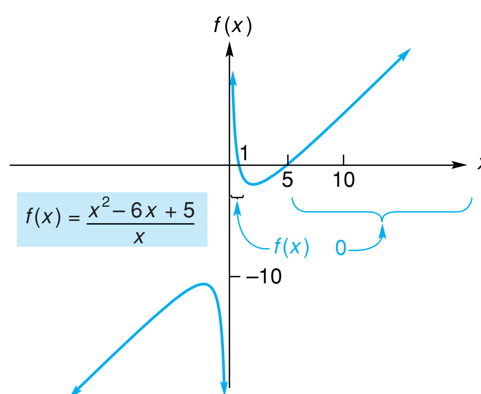


FIGURA 9.46 Gráfica de $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x}$.

EJEMPLO 4 Solución de desigualdades no lineales

a. *Resolver* $x^2 + 1 > 0$.

Solución: la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales. Por tanto, $f(x) = x^2 + 1$ no tiene un cero real. También, f es continua en todas partes. Así, $f(x)$ siempre es positiva o siempre es negativa. Pero x^2 siempre es positiva o cero, de modo que $x^2 + 1$ siempre es positiva. Por tanto, la solución de $x^2 + 1 > 0$ es $(-\infty, \infty)$.

b. *Resolver* $x^2 + 1 < 0$.

Solución: de la parte (a), $x^2 + 1$ siempre es positiva, de modo que $x^2 + 1 < 0$ no tiene solución.

Ejercicio 9.5

En los problemas del 1 al 26 resuelva las desigualdades con la técnica estudiada en esta sección.

1. $x^2 - 3x - 4 > 0$.

2. $x^2 - 8x + 15 > 0$.

3. $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

4. $14 - 5x - x^2 \leq 0$.

5. $2x^2 + 11x + 14 < 0$.

6. $x^2 - 4 < 0$.

7. $x^2 + 4 < 0.$

8. $2x^2 - x - 2 \leq 0.$

9. $(x + 2)(x - 3)(x + 6) \leq 0.$

10. $(x - 5)(x - 2)(x + 8) \geq 0.$

11. $-x(x - 5)(x + 4) > 0.$

12. $(x + 2)^2 > 0.$

13. $x^3 + 4x \geq 0.$

14. $(x + 2)^2(x^2 - 1) < 0.$

15. $x^3 + 2x^2 - 3x > 0.$

16. $x^3 - 4x^2 + 4x > 0.$

17. $\dfrac{x}{x^2 - 9} < 0.$

18. $\dfrac{x^2 - 1}{x} < 0.$

19. $\dfrac{4}{x - 1} \geq 0.$

20. $\dfrac{3}{x^2 - 5x + 6} > 0.$

21. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 5} \geq 0.$

22. $\dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 3x + 2} \geq 0.$

23. $\dfrac{3}{x^2 + 6x + 5} \leq 0.$

24. $\dfrac{2x + 1}{x^2} \leq 0.$

25. $x^2 + 2x \geq 2.$

26. $x^4 - 16 \geq 0.$

---

27. Ingresos Suponga que los consumidores compran q unidades de un producto cuando el precio de *cada uno* es de $20 - 0.1q$ dólares. ¿Cuántas unidades deben venderse para que el ingreso de las ventas no sea menor que $750?

28. Administración forestal Una compañía taladora posee un bosque de forma rectangular, de 1×2 millas. La compañía quiere cortar una franja uniforme con árboles a lo largo de los lados externos del bosque. ¿Qué tan ancha debe ser la franja si se quiere conservar al menos $1\frac{5}{16}$ de millas^2 de bosque?

29. Diseño de un recipiente Un fabricante de recipientes desea hacer una caja sin tapa, mediante el corte de un cuadrado de 4 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio, doblando después hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 324 pulg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda utilizarse.

30. Participación en talleres Imperial Education Services (IES) está ofreciendo un curso de procesamiento de datos a personal clave en la compañía Zeta. El precio por persona es de $50 y la compañía Zeta garantiza que al menos asistirán 50 personas. Suponga que el IES ofrece reducir el costo para *todos* en $0.50 por cada persona que asista después de las primeras 50. ¿Cuál es el límite del tamaño del grupo que el IES aceptará, de modo que el ingreso total nunca sea menor que lo recibido por 50 personas?

31. Grafique $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 4$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$x^3 + 7x^2 - 5x + 4 \leq 0.$$

32. Grafique $f(x) = \dfrac{3x^2 - 0.5x + 2}{6.2 - 4.1x}$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$\frac{3x^2 - 0.5x + 2}{6.2 - 4.1x} > 0.$$



Una manera original de resolver una desigualdad no lineal como $f(x) > 0$ es por inspección de la gráfica de $g(x) = f(x)/|f(x)|$, cuyo rango consiste sólo en 1 y −1:

$$g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} = \begin{cases} 1, \text{ si } f(x) > 0, \\ -1, \text{ si } f(x) < 0. \end{cases}$$

La solución de $f(x) > 0$ consiste en todos los intervalos para los cuales $g(x) = 1$. Utilizando esta técnica, resuelva las desigualdades de los problemas 33 y 34.

33. $6x^2 - x - 2 > 0.$

34. $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 3} < 0.$

9.6 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 9.1 $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Sección 9.2 límites laterales $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Sección 9.3 interés compuesto continuamente

Sección 9.4 continua discontinua continua en un intervalo continua en todas partes

Resumen

La noción de límite es el fundamento del cálculo. Decir que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, significa que los valores de $f(x)$ pueden acercarse mucho al número L cuando seleccionamos x lo suficientemente cercana a a. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen, y c es una constante, entonces:

1. $\lim_{x\to a} c = c,$
2. $\lim_{x\to a} x^n = a^n,$
3. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),$
4. $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x),$
5. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \cdot \lim_{x\to a} f(x),$
6. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0,$
7. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)},$
8. Si f es una función polinomial, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$

La propiedad 8 significa que el límite de una función polinomial cuando $x \to a$, puede encontrarse con sólo sustituir a por x. Sin embargo, con otras funciones, la sustitución puede conducir a la forma indeterminada $0/0$. En tales casos, operaciones algebraicas como la factorización y cancelación pueden dar una forma en la que el límite pueda determinarse.

Si $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a por la derecha, entonces escribimos $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$. Si $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a por la izquierda, entonces escribimos $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$. Estos límites se llaman límites laterales.

El símbolo de infinito, ∞, que no representa un número, se utiliza para describir límites. La proposición

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

significa que cuando x crece sin cota, los valores de $f(x)$ se aproximan al número L. Una proposición similar se aplica cuando $x \to -\infty$, lo cual significa que x está disminuyendo sin cota. En general, si $p > 0$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^p} = 0.$$

Si $f(x)$ aumenta sin cota cuando $x \to a$, entonces escribimos $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Del mismo modo, si $f(x)$ disminuye sin cota, tenemos $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Decir que el límite de una función es ∞ (o $-\infty$) no significa que el límite exista. Es una manera de decir que el límite no existe y decir *por qué* no hay límite.

Existe una regla para evaluar el límite de una función racional (cociente de dos polinomios) cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$. Si $f(x)$ es una función racional, y $a_n x^n$ y $b_m x^m$ son términos en el numerador y denominador respectivamente, con las potencias más grandes de x, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

y

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

En particular, cuando $x \to \infty$ o $x -\infty$, el límite de un polinomio es el mismo que el límite del término con la potencia más grande de x. Esto significa que para un polinomio no constante, el límite cuando $x \to \infty$ o $-\infty$, es ∞, o bien, $-\infty$.

Cuando el interés se capitaliza cada instante, decimos que es compuesto continuamente. Bajo capitalización continua a una tasa anual r por t años, la fórmula $S = Pe^{rt}$ da el monto total (compuesto) S de un capital de P dólares. La fórmula $P = Se^{-rt}$ da el valor presente P de S dólares. La tasa efectiva correspondiente a una tasa anual r capitalizada continuamente es $e^r - 1$.

Una función f es continua en a si y sólo si

1. $f(x)$ está definida en $x = a$,
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe,
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$

De manera geométrica, esto significa que la gráfica de f no presenta corte cuando $x = a$. Si una función no es continua en a y está definida en un intervalo abierto que contenga a a, excepto posiblemente a a misma, entonces se dice que la función es discontinua en a. Las funciones polinomiales son continuas en todas partes, y las funciones racionales son discontinuas sólo en los puntos donde el denominador es cero.

Para resolver la desigualdad $f(x) > 0$ [o, $f(x) < 0$], primero encontramos los ceros reales de f y los valores de x para los cuales f es discontinua. Estos valores determinan intervalos, y en cada intervalo $f(x)$ siempre es positiva o siempre negativa. Para encontrar el signo en cualquiera de estos intervalos, basta con determinar el signo de $f(x)$ en cualquier punto del intervalo. Después que los signos se determinan para todos los intervalos, es fácil dar la solución de $f(x) > 0$ [o $f(x) < 0$].

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 28 encuentre los límites si existen. Si el límite no existe, establézcalo así o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

1. $\lim_{x\to -1} (2x^2 + 6x - 1)$.

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 2}$.

3. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$.

4. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x + 1}{x^2 - 2}$.

5. $\lim_{h\to 0} (x + h)$.

6. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.

7. $\lim_{x\to -4} \dfrac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 2x - 8}$.

8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x - 5}$.

9. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2}{x + 1}$.

10. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{2x^2}$.

11. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{3x - 2}{7x + 3}$.

12. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^4}$.

13. $\lim_{t\to 3} \dfrac{2t - 3}{t - 3}$.

14. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^6}{x^5}$.

15. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x + 3}{1 - x}$.

16. $\lim_{x\to 4} \sqrt{4}$.

17. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{(3x + 2)^2}$.

18. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

19. $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{x + 3}{x^2 - 9}$.

20. $\lim_{x\to 2} \dfrac{2 - x}{x - 2}$.

21. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{3x}$.

22. $\lim_{y\to 5^+} \sqrt{y - 5}$.

23. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^{100} + (1/x^2)}{e - x^{98}}$.

24. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\pi x^2 - x^5}{23x - 3x^4}$.

25. $\lim_{x\to 1} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \le x < 1, \\ x, & \text{si } x > 1. \end{cases}$

26. $\lim_{x\to 3} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{si } x < 3, \\ 6, & \text{si } x \ge 3. \end{cases}$

27. $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{\sqrt{x^2 - 16}}{4 - x}$. [*Sugerencia:* Para $x > 4$, $\sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{x - 4}\,\sqrt{x + 4}$.]

28. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x - 2}}$. [*Sugerencia:* Para $x > 2$, $\dfrac{x - 2}{\sqrt{x - 2}} = \sqrt{x - 2}$.]

---

29. Si $f(x) = 8x - 2$, encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

30. Si $f(x) = 2x^2 - 3$, encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

---

31. Relación huésped-parásito Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad de huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x, entonces el número de parásitos a lo largo de un periodo es

$$y = 23\left(1 - \frac{1}{1 + 2x}\right).$$

Si la densidad de huésped estuviese aumentando sin cota, ¿a qué valor se aproximaría y?

32. Relación presa-depredador Para una relación particular de presa-depredador, se determinó que el número y de presas consumidas por un depredador a lo largo de un periodo fue una función de la densidad de presas x (el número de presas por unidad de área). Suponga que

$$y = f(x) = \frac{10x}{1 + 0.1x}.$$

Si la densidad de presas aumentara sin cota, ¿a qué valor se aproximaría y?

33. Para una tasa de interés anual de 5% capitalizado continuamente, encuentre

a. El monto total de \$2500 después de 14 años.

b. El valor presente de \$2500 pagaderos dentro de 14 años.

34. Para una tasa de interés anual de 6% compuesto continuamente, encuentre:

a. El monto total de \$800 después de 11 años.
b. El valor presente de \$800 que se deben pagar dentro de 11 años.

35. Encuentre la tasa efectiva equivalente a una tasa anual de 6% capitalizada continuamente.

36. Determine la tasa efectiva equivalente a una tasa anual de 1% compuesta de manera continua.

37. Si un interés se devenga a la tasa anual de 5% compuesto continuamente, determine el número exacto de años requeridos para que un capital de P se duplique.

38. Inversión Los Smith han hecho dos inversiones: \$400 en la cuenta A, la cual devenga interés a la tasa de 6% compuesto semestralmente, y \$400 en la cuenta B, que genera interés a la tasa de 5.5% compuesto continuamente.

a. Calcule la tasa efectiva de interés para cada inversión.
b. ¿Cuál inversión tiene mayor valor al final de 5 años y por cuánto?

39. Utilizando la definición de continuidad, demuestre que $f(x) = x + 5$ es continua en $x = 7$.

40. Utilizando la definición de continuidad, demuestre que $f(x) = \frac{x-3}{x^2+4}$ es continua en $x = 3$.

41. Establezca si $f(x) = x/4$ es continua en todas partes. Dé una razón para su respuesta.

42. Establezca si $f(x) = x^2 - 2$ es continua en todas partes. Dé una razón para su respuesta.

En los problemas del 43 al 50 encuentre los puntos de discontinuidad (si los hay) para cada función.

43. $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$.

44. $f(x) = \frac{0}{x^3}$.

45. $f(x) = \frac{x-1}{2x^2+3}$.

46. $f(x) = (3-2x)^2$.

47. $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+3x-4}$.

48. $f(x) = \frac{2x+6}{x^3+x}$.

49. $f(x) = \begin{cases} x+4, & \text{si } x > -2, \\ 3x+6, & \text{si } x \leq -2. \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{si } x < 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

En los problemas del 51 al 58 resuelva las desigualdades dadas.

51. $x^2 + 4x - 12 > 0$.

52. $2x^2 - 6x + 4 \leq 0$.

53. $x^3 \geq 2x^2$.

54. $x^3 + 8x^2 + 15x \geq 0$.

55. $\frac{x+5}{x^2-1} < 0$.

56. $\frac{x(x+5)(x+8)}{3} < 0$.

57. $\frac{x^2+3x}{x^2+2x-8} \geq 0$.

58. $\frac{x^2-4}{x^2+2x+1} \leq 0$.

---

59. Grafique $f(x) = \frac{x^3+x^2-6x}{x^3-2x^2+6x-12}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x\to 2} f(x)$.

60. Grafique $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$. De la gráfica, estime $\lim_{x\to 1} f(x)$.

61. Grafique $f(x) = x \ln x$. Con base en la gráfica, estime el límite lateral $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

62. Grafique $f(x) = \frac{e^x - 1}{(e^x+1)(e^{2x}-e^x)}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x\to 0} f(x)$.

63. Grafique $f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$x^3 - x^2 + x - 6 \geq 0.$$

64. Grafique $f(x) = \frac{x^5+4}{x^3-1}$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$\frac{x^5+4}{x^3-1} \leq 0.$$

Aplicación práctica

Deuda nacional



El tamaño del déficit presupuestal de Estados Unidos es de gran interés para muchas personas, y con frecuencia un tema de qué hablar en las noticias. La magnitud del déficit afecta la confianza en la economía de Estados Unidos, tanto de inversionistas nacionales como de extranjeros, corporativos oficiales y líderes políticos. Hay quienes creen que para reducir su déficit el gobierno debería reducir los gastos, lo cual afectaría los programas de gobierno, o aumentar sus ingresos, posiblemente a través de un aumento en los impuestos.

Suponga que es posible reducir el déficit continuamente a una tasa anual fija. Esto es similar al concepto de interés compuesto continuamente, salvo que en lugar de agregar interés a una cantidad en cada instante, le restaría al déficit a cada instante. Veamos cómo podríamos modelar esta situación.

Suponga que el déficit D_o en el instante $t = 0$, se reduce a una tasa anual r. Además, suponga que hay k periodos de igual longitud en un año. Al final del primer periodo, el déficit original se reduce en $D_0\left(\frac{r}{k}\right)$, de modo que el déficit nuevo es

$$D_0 - D_0\left(\frac{r}{k}\right) = D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right).$$

Al final del segundo periodo, este déficit se reduce en $D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)\frac{r}{k}$, de modo que el déficit nuevo es

$$D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right) - D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)\frac{r}{k}$$

$$= D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)\left(1 - \frac{r}{k}\right)$$

$$= D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)^2.$$

El patrón continúa. Al final del tercer periodo el déficit es $D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)^3$ y así sucesivamente. Al término de t años, el número de periodos es kt y el déficit es $D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)^{kt}$. Si el déficit se reducirá a cada instante, entonces $k \to \infty$. Así, queremos encontrar

$$\lim_{k\to\infty} D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)^{kt},$$

que puede reescribirse como

$$D_0\left[\lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{r}{k}\right)^{-k/r}\right]^{-r}.$$

Si se hace $x = -r/k$, entonces la condición $k \to \infty$ implica que $x \to 0$. De aquí que el límite dentro de los corchetes tenga la forma $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$, que es la bien conocida e. Por tanto, el déficit D_0 en el instante $t = 0$ se reduce continuamente a una tasa anual r, y t años después el déficit está dado por

$$D = D_0e^{-rt}.$$

Por ejemplo, suponga un déficit actual de \$5345 miles de millones y una tasa de reducción continua de 6% anual. Entonces el déficit dentro de t años contados a partir de ahora, está dado por

$$D = 5345e^{-0.06t},$$

en donde D está en miles de millones de dólares. Esto significa que dentro de 10 años, el déficit será $5345e^{-0.6} \approx$ \$2933 miles de millones. La figura 9.47 muestra la gráfica de $D = 5345e^{-rt}$ para varias tasas r. Por supuesto, entre mayor sea el valor de r, más rápida es la reducción del déficit. Obsérvese que para $r = 0.06$, la deuda al final de 30 años aún es considerable (aproximadamente \$884 miles de millones).

Es importante observar que los elementos radiactivos que van en decremento también siguen el modelo de la reducción de la deuda continua $D = D_0e^{-rt}$.

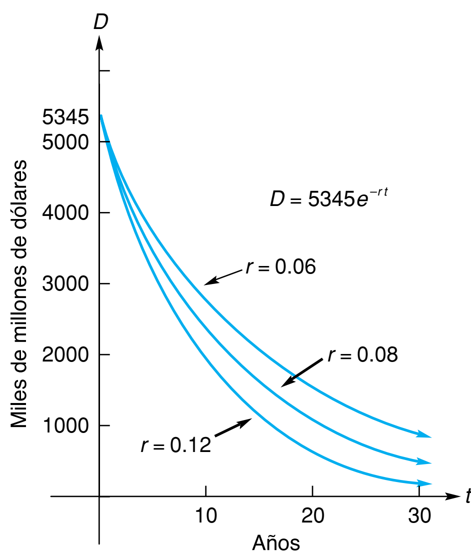


FIGURA 9.47 La deuda del presupuesto se reduce de manera continua.

Para determinar en que posición se encuentra actualmente el déficit nacional de Estados Unidos, visite uno de los relojes del déficit nacional en Internet. Usted puede encontrarlos buscando por “national debt clock” con un buscador.

Ejercicios

En los problemas siguientes, suponga un déficit nacional actual de \$5345 *miles de millones.*

1. Si el déficit se redujera a \$4500 miles de millones dentro de un año, ¿qué tasa anual de reducción continua del déficit estaría implicada? Proporcione su respuesta al porcentaje más cercano.

2. Para un reducción continua de déficit a una tasa anual de 6%, determine el número de años, contados a partir de ahora, para que el déficit se reduzca a la mitad. Proporcione su respuesta al año más cercano.

3. ¿Qué suposiciones fundamentan un modelo de reducción de déficit que utiliza una función exponencial? ¿Cuáles son las limitaciones de este enfoque?

CAPÍTULO 10

Diferenciación

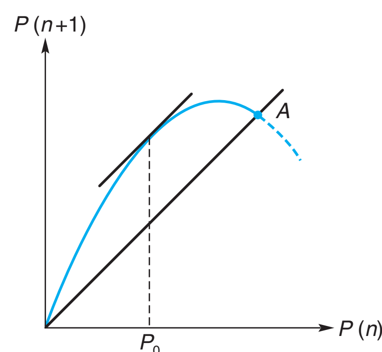
Las regulaciones del gobierno, por lo general, limitan el número de peces que pueden pescar de una zona de pesca, los barcos de pesca comerciales en una temporada. Esto previene la pesca excesiva, que agota la población de peces y deja, a la larga, pocos peces para capturar.

Desde una perspectiva estrictamente comercial, la regulación ideal permitiría obtener un máximo en el número de peces disponibles para la cosecha de cada año. La clave para determinar las regulaciones ideales es la función matemática llamada curva de reproducción. Para un hábitat de peces, esta función estima la población de peces de un año al siguiente, $P(n+1)$, con base en la población actual, $P(n)$, suponiendo que no hay intervención externa (es decir, no hay pesca, ni influencia de depredadores, etc.).

La figura de abajo muestra una curva común de reproducción; en ella también está graficada la recta $y = x$, a lo largo de la cual las poblaciones $P(n)$ y $P(n+1)$ serían iguales. Observe la intersección de la curva con la recta en el punto A. Éste es en donde, a consecuencia de la gran aglomeración en el hábitat, la población alcanza su tamaño máximo sostenible. Una población que tiene este tamaño en un año, tendrá el mismo tamaño el año siguiente.

Para cualquier punto en el eje horizontal, la distancia entre la curva de reproducción y la recta $y = x$ representa la pesca sostenible: el número de peces que pueden ser atrapados, después de que las crías han crecido hasta madurar, de modo que al final la población regrese al mismo tamaño que tenía un año antes.

Desde el punto de vista comercial, el tamaño de población óptima es aquél en donde la distancia entre la curva de reproducción y la recta $y = x$ es la mayor. Esta condición se cumple, en donde las pendientes de la curva de reproducción y la recta $y = x$ son iguales. Así, para una cosecha de peces máxima año tras año, las regulaciones deben tener como objetivo mantener la población de peces muy cerca de P_0.



Aquí, una idea central es la de la pendiente de una curva en un punto dado. Esa idea es el concepto central de este capítulo.

Comenzamos ahora el estudio del cálculo. Las ideas involucradas en cálculo son totalmente diferentes a las de álgebra y de la geometría. La fuerza e importancia de estas ideas y de sus aplicaciones las aclararemos más adelante en este libro. En este capítulo introduciremos la llamada derivada de una función, y usted aprenderá reglas importantes para encontrar derivadas. Verá también cómo se usa la derivada para analizar la razón de cambio de una cantidad, como la razón a la cual cambia la posición de un cuerpo.

10.1 La derivada

OBJETIVO Desarrollar la idea de recta tangente a una curva, definir la pendiente de una curva, definir una derivada y darle una interpretación geométrica. Calcular derivadas por medio del uso de la definición de límite.

Uno de los problemas principales de que se ocupa el cálculo es el de encontrar la pendiente de la *recta tangente* a un punto sobre una curva. Quizá en geometría usted vio que una recta tangente, o *tangente,* a un círculo es una recta que toca al círculo en un solo punto (véase la fig. 10.1). Sin embargo, esta idea de una tangente no es muy útil en otras clases de curvas. Por ejemplo, en la figura 10.2(a) las rectas L_1 y L_2 intersecan a la curva en exactamente un solo punto, P. Si bien L_2 no la veríamos como la tangente en este punto, L_1 sí lo es. En la figura 10.2(b) podríamos considerar de manera intuitiva que L_3 es la tangente en el punto P, aunque L_3, interseca a la curva en otros puntos.

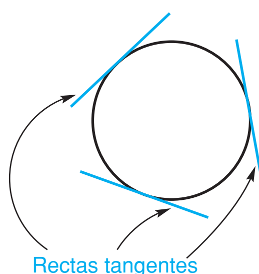
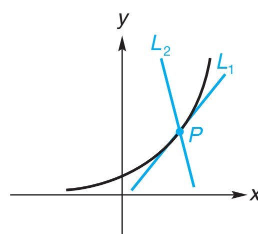


FIGURA 10.1 Rectas tangentes a un círculo.



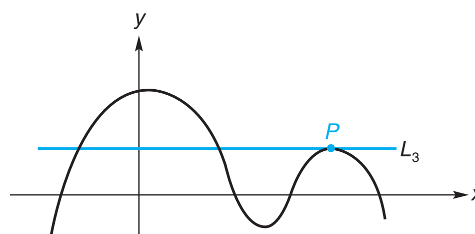


FIGURA 10.2 Recta tangente en un punto.

De los ejemplos anteriores, usted puede ver que debemos abandonar la idea de que una tangente es simplemente una línea que interseca una curva en sólo un punto. Para obtener una definición conveniente de recta tangente, utilizamos el concepto de límite y la noción geométrica de *recta secante.* Una **recta secante** es una línea que interseca una curva en dos o más puntos.

Observe la gráfica de la función $y = f(x)$ en la figura 10.3. Queremos definir la recta tangente en el punto P. Si Q es un punto diferente sobre la curva, la línea PQ es una línea secante. Si Q se mueve a lo largo de la curva y se acerca a P por la derecha (véase la fig. 10.4), PQ', PQ'', etc., son líneas secantes características. Si Q se acerca a P por la izquierda, PQ_1, PQ_2, etc., son las secantes. *En ambos casos, las líneas secantes se acercan a la misma posición límite.* Esta posición límite común de las líneas secantes se define como la **recta tangente** a la curva en P. Esta definición parece razonable, y se aplica a curvas en general y no sólo a círculos.

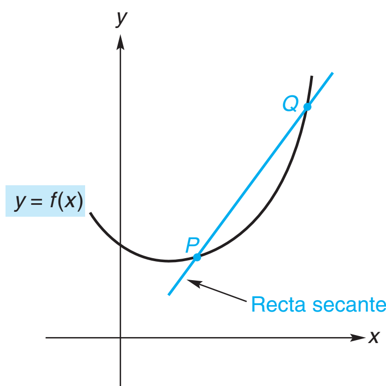


FIGURA 10.3 Recta tangente PQ.

Una curva no tiene necesariamente una recta tangente en cada uno de sus puntos. Por ejemplo, la curva $y = |x|$ no tiene una tangente en (0,0). Como puede ver en la figura 10.5, una recta secante que pasa por (0, 0) y un punto cercano a su derecha en la curva, siempre será la recta $y = x$. Así, la posición límite de tales rectas secantes es también la recta $y = x$. Sin embargo, una recta secante que pase por (0,0) y un punto cercano a su izquierda sobre la

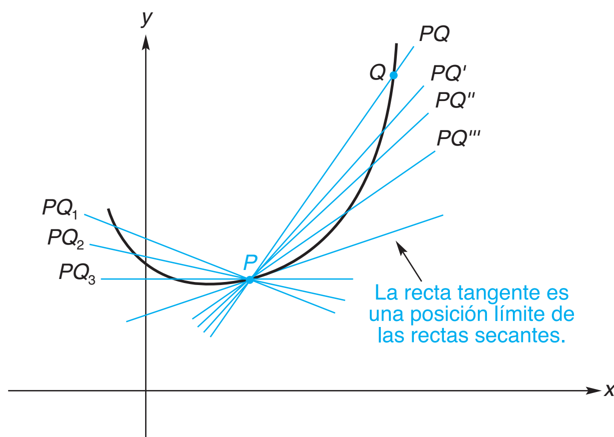


FIGURA 10.4 La recta tangente es una posición límite de las rectas secantes.

curva, siempre será la recta $y = -x$. Entonces, la posición límite de tales rectas secantes es también la recta $y = -x$. Como no existe una posición límite común, no hay una recta tangente en (0,0).

Ahora que tenemos una definición conveniente de la tangente a una curva en un punto, podemos definir la *pendiente de una curva* en un punto.

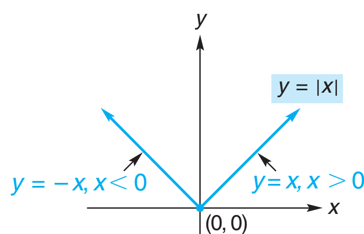


FIGURA 10.5 No hay recta tangente para la gráfica de $y = |x|$ en $(0, 0)$.

Definición

La ***pendiente de una curva*** en un punto P es la pendiente, en caso de que exista, de la recta tangente en P.

Como la tangente en P es una posición límite de las líneas secantes PQ, consideremos la pendiente de la tangente como el valor límite de las pendientes de las rectas secantes conforme Q se acerca a P. Por ejemplo, consideremos la curva $f(x) = x^2$ y las pendientes de algunas rectas secantes PQ, donde $P = (1, 1)$. Para el punto $Q = (2.5, 6.25)$, la pendiente de PQ (véase la fig. 10.6) es

$$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6.25 - 1}{2.5 - 1} = 3.5.$$

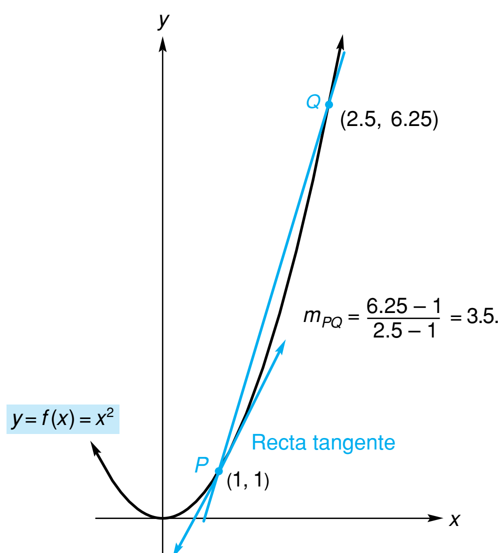


FIGURA 10.6 Recta secante a $f(x) = x^2$ que pasa por $(1, 1)$ y $(2.5, 6.25)$.

La tabla 10.1 incluye otros puntos Q sobre la curva, así como las correspondientes pendientes de PQ. Observe que conforme Q se acerca a P, las pendientes de las rectas secantes parecen aproximarse al valor 2. Entonces, podemos esperar que la pendiente de la recta tangente indicada en (1, 1) sea 2. Esto se confirmará luego en el ejemplo 1. Pero primero queremos generalizar nuestro procedimiento.

TABLA 10.1 Pendientes de rectas secantes a la curva $f(x) = x^2$ en $P = (1,1)$

Q	Pendiente de PQ
(2.5, 6.25)	$(6.25 - 1)/(2.5 - 1) = 3.5$
(2, 4)	$(4 - 1)/(2 - 1) = 3$
(1.5, 2.25)	$(2.25 - 1)/(1.5 - 1) = 2.5$
(1.25, 1.5625)	$(1.5625 - 1)/(1.25 - 1) = 2.25$
(1.1, 1.21)	$(1.21 - 1)/(1.1 - 1) = 2.1$
(1.01, 1.0201)	$(1.021 - 1)/(1.01 - 1) = 2.01$

Para la curva $y = f(x)$, en la figura 10.7 encontraremos una expresión para la pendiente en el punto $P = (x_1, f(x_1))$. Si $Q = (x_2, f(x_2))$, la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

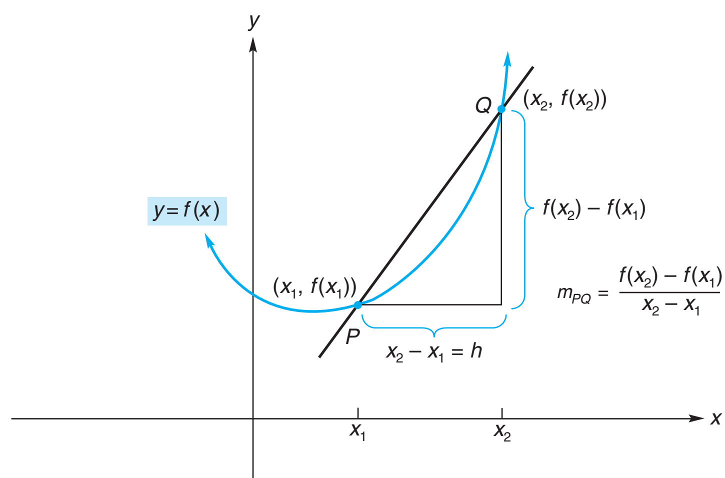


FIGURA 10.7 Recta secante que pasa por P y Q.

Si llamamos h a la diferencia $x_2 - x_1$, podemos escribir x_2 como $x_1 + h$. Aquí se debe tener que $h \neq 0$, porque si $h = 0$, entonces $x_2 = x_1$ y no existirá recta secante. De acuerdo con esto,

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{(x_1 + h) - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}.$$

Conforme Q se mueve a lo largo de la curva hacia P, entonces x_2 se acerca a x_1. Esto significa que h se aproxima a cero. El valor límite de las pendientes de las rectas secantes, que es la pendiente de la recta tangente en $(x_1, f(x_1))$, es el siguiente límite:

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\sec},$$

o de manera más precisa

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}. \tag{1}$$

En el ejemplo 1, usaremos este límite para confirmar nuestra conclusión anterior de que la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2$ en $(1, 1)$ es igual a 2.

EJEMPLO 1 Determinación de la pendiente de una recta tangente

Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x) = x^2$ *en el punto* $(1, 1)$.

Solución: la pendiente es el límite en la ecuación (1) con $f(x) = x^2$ y $x_1 = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 - (1)^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(2 + h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2. \end{aligned}$$

Así, la recta tangente a $y = x^2$ en $(1, 1)$ tiene pendiente igual a 2 (véase la fig. 10.6).

Podemos generalizar la ecuación (1) de manera que sea aplicable a cualquier punto $(x, f(x))$ sobre una curva. Si reemplazamos x_1 por x se obtiene una función, llamada *derivada* de f, cuya entrada es x y su salida es la pendiente de la recta tangente a la curva en $(x, f(x))$, siempre que la recta tangente *tenga* una pendiente (esto es, que la tangente no sea vertical). Tenemos así la definición siguiente, la cual constituye la base del cálculo diferencial.

Definición

La ***derivada*** de una función f es la función, denotado por f' (léase "f prima"), y definida por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

siempre que este límite exista. Si $f'(x)$ puede encontrarse, se dice que f es ***diferenciable*** y $f'(x)$ se llama derivada de f en x, o derivada de f con respecto a x. El proceso de encontrar la derivada se llama ***diferenciación.***

En la definición de la derivada, la expresión

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

se llama **cociente de diferencia** (cociente diferencial). Así, $f'(x)$ es el límite de un cociente de diferencia cuando $h \to 0$.

EJEMPLO 2 Uso de la definición para encontrar la derivada

Si $f(x) = x^2$, encontrar la derivada de f.

Solución: al aplicar la definición de derivada se obtiene

Cuide no ser desidioso cuando aplique la definición de derivada como un límite. Escriba $\lim_{h\to 0}$ en cada paso, antes de tomar el límite. Por desgracia, algunos estudiantes descuidan tomar el límite final, y h aparece en sus respuestas. Ésta es una manera rápida de perder puntos en un examen.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x.$$

Observe que al tomar el límite tratamos a x como una constante, porque es h y no x la que está cambiando. Observe también que $f'(x) = 2x$ define una función de x, que podemos interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(x, f(x))$. Por ejemplo, si $x = 1$, entonces la pendiente es $f'(1) = 2(1) = 2$, que confirma el resultado del ejemplo 1.

Además de la notación $f'(x)$, otras formas para denotar a la derivada de $y = f(x)$ en x son

$$\frac{dy}{dx}$$ (se lee "de ye, de equis"),

$$\frac{d}{dx}[f(x)]$$ [de $f(x)$, de equis],

$$y'$$ (y prima),

$$D_x y$$ (de x de y),

$$D_x[f(x)]$$ [de x de $f(x)$].



Advertencia La notación $\frac{dy}{dx}$, que se denomina *notación de Leibniz*, **no** debe considerarse como una fracción, aunque parezca una. Es un símbolo sencillo para una derivada. Aún no hemos dado un significado a los símbolos individuales como dy y dx.

Si la derivada $f'(x)$ puede evaluarse en $x = x_1$, el *número* resultante $f'(x_1)$ se llama **derivada de f en x_1,** y se dice que f es *diferenciable* en x_1. Como la derivada nos da la pendiente de la recta tangente, se tiene:

> $f'(x_1)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $(x_1, f(x_1))$.

Otras dos notaciones para derivada de f en x_1 son

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} \quad \text{y} \quad y'(x_1).$$

EJEMPLO 3 Determinación de una ecuación de una recta tangente

Si $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$, *encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de* f *en* $(1, 7)$.

Solución:

Estrategia: primero determinamos la pendiente de la recta tangente calculando la derivada y evaluándola en $x = 1$. Usamos este resultado y el punto $(1, 7)$ en la forma punto-pendiente de la ecuación para una línea recta, y así obtenemos la ecuación de la recta tangente.

Tenemos,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[2(x+h)^2 + 2(x+h) + 3] - (2x^2 + 2x + 3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 2x + 2h + 3 - 2x^2 - 2x - 3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 2h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0} (4x + 2h + 2). \end{aligned}$$

Por lo que $\quad f'(x) = 4x + 2$

y $\quad f'(1) = 4(1) + 2 = 6.$

Así, la recta tangente a la gráfica en $(1, 7)$ tiene pendiente de 6. Una forma punto-pendiente de esta tangente es

$$y - 7 = 6(x - 1).$$

Acostumbraremos expresar una ecuación de la recta tangente en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$\begin{aligned} y - 7 &= 6x - 6, \\ y &= 6x + 1. \end{aligned}$$


Advertencia En el ejemplo 3 ***no*** es correcto decir que como la derivada es $4x + 2$, la recta tangente en $(1, 7)$ es $y - 7 = (4x + 2)(x - 1)$. La derivada debe **evaluarse** en el punto de tangencia para determinar la pendiente de la recta tangente.

EJEMPLO 4 Determinación de la pendiente de una curva en un punto

Encontrar la pendiente de la curva $y = 2x + 3$ *en el punto en que* $x = 6$.

Solución: la pendiente de la curva es la pendiente de la recta tangente. Si hacemos $y = f(x) = 2x + 3$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[2(x+h) + 3] - (2x + 3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2. \end{aligned}$$

Como $dy/dx = 2$, la pendiente cuando $x = 6$, o de hecho en cualquier punto, es 2. Observe que la curva es una línea recta que tiene la misma pendiente en cada punto.

EJEMPLO 5 Función con una recta tangente vertical

Encontrar $\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$.

Solución: si hacemos $f(x) = \sqrt{x}$, se tiene

Debe familiarizarse con el proceso de racionalizar el *numerador.*

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Cuando $h \to 0$, tanto el numerador como el denominador tienden a cero. Esto puede evitarse racionalizando el *numerador.*

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

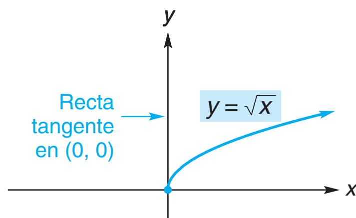


FIGURA 10.8 Recta tangente vertical en $(0, 0)$.

Por tanto,

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Observe que la función original, $\sqrt{x}$, está definida para $x \geq 0$, pero su derivada $1/(2\sqrt{x})$, está definida sólo cuando $x > 0$. La razón para esto es evidente de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ en la figura 10.8. Cuando $x = 0$, la tangente es una línea vertical, por lo que su pendiente no está definida.

Es conveniente que usted vea además de x y y otras variables involucradas en un problema. El ejemplo 6 ilustra el uso de otras variables.

En el ejemplo 5 vimos que la función $y = \sqrt{x}$ no es diferenciable cuando $x = 0$, porque la recta tangente es vertical en ese punto. Vale la pena mencionar que $y = |x|$ tampoco es diferenciable cuando $x = 0$, pero por una razón diferente: *no* existe recta tangente en ese punto (véase la fig. 10.5).

Con frecuencia, la notación de Leibniz es útil porque hace énfasis en las variables independiente y dependiente implicadas. Por ejemplo, si la variable p es una función de la variable q, se habla entonces de la derivada de p con respecto a q, que se escribe dp/dq.

EJEMPLO 6 Determinación de la derivada de p con respecto a q

Si $p = f(q) = \frac{1}{2q}$, *encontrar* $\frac{dp}{dq}$.

Principios en práctica 1

Determinación de la derivada de *H* con respecto a *t*

Si una pelota se lanza hacia arriba a una velocidad de 40 pies/seg desde una altura de 6 pies, su altura H en pies, después de t segundos, está dada por $H = 6 + 40t - 16t^2$. Determine $\frac{dH}{dt}$.

Solución:

$$\frac{dp}{dq} = \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{2q}\right) = \frac{f(q+h) - f(q)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2(q+h)} - \frac{1}{2q}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{q-(q+h)}{2q(q+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{q-(q+h)}{h[2q(q+h)]} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h[2q(q+h)]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2q(q+h)} = -\frac{1}{2q^2}.$$

Observe que cuando $q = 0$, ni la función ni la derivada existen.

Tenga en mente que la derivada de $y = f(x)$ en x no es otra cosa que un límite, a saber

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Aunque podemos interpretar la derivada como una función que da la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, esta interpretación sólo es una conveniencia geométrica que nos ayuda a entender su significado. El límite anterior puede existir independientemente de cualquier consideración geométrica. Como veremos después, existen otras interpretaciones útiles.

Tecnología

Muchas calculadoras gráficas tienen un dispositivo que permite estimar la derivada de una función en un punto. Con la calculadora TI-83 se emplea el comando "nDeriv", en el que debemos proporcionar la función, la variable y el valor de la variable (separados por comas) con el siguiente formato:

"nDeriv" (función, variable, valor de la variable).

Por ejemplo, la derivada de $f(x) = \sqrt{x^3 + 2}$ en $x = 1$ se estima en la figura 10.9. Así, $f'(1) \approx 0.866$.

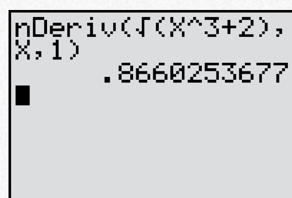


FIGURA 10.9 Derivada numérica.

Por otra parte, podemos usar el procedimiento del "límite del cociente de diferencia" para calcular esta derivada. Para usar el recurso tabular de una calculadora gráfica, podemos indicar $f(x)$ como Y_1. Entonces, para Y_2 damos la siguiente forma del cociente de diferencia:

$$(Y_1(1 + X) - Y_1(1))/X.$$

(Aquí la x desempeña la función de h.) La figura 10.10 muestra una tabla para Y_2 cuando x se aproxima a 0, tanto por la izquierda como por la derecha. Esta tabla sugiere fuertemente que $f'(1) \approx 0.866$.

X	Y2
.01	.87252
.001	.86667
1E-4	.86609
1E-5	.86603
-.01	.85953
-.001	.86538
-1E-4	.86596

X=-1E-4

FIGURA 10.10 Límite de un cociente de diferencia cuando $x \to 0$.

Ejercicio 10.1

En los problemas 1 y 2 se da una función f y un punto P sobre su gráfica.

a. *Encuentre la pendiente de la recta secante PQ para cada punto $Q = (x, f(x))$, cuyo valor x está dado en la tabla. Redondee sus respuestas a cuatro decimales.*

b. *Use sus resultados de la parte (a) para calcular la pendiente de la recta tangente en P.*

1. $f(x) = x^3 + 3$, $P = (2, 11)$.

valor x de Q	3	2.5	2.2	2.1	2.01	2.001
m_{PQ}						

2. $f(x) = e^{2x}$, $P = (0, 1)$.

valor x de Q	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
m_{PQ}						

En los problemas del 3 al 18 emplee la definición de la derivada para encontrarla en cada caso.

3. $f'(x)$ si $f(x) = x$.

4. $f'(x)$ si $f(x) = 4x - 1$.

5. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = 4x + 7$.

6. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = -5x$.

7. $\dfrac{d}{dx}(5 - 4x)$.

8. $\dfrac{d}{dx}\left(2 - \dfrac{x}{4}\right)$.

9. $f'(x)$ si $f(x) = 3$.

10. $f'(x)$ si $f(x) = 7.01$.

11. $\dfrac{d}{dx}(x^2 + 4x - 8)$.

12. y' si $y = 2x^2 + 5$.

13. $\dfrac{dp}{dq}$ si $p = 2q^2 + 5q - 1$.

14. $\dfrac{d}{dx}(x^2 - x - 3)$.

15. y' si $y = \dfrac{6}{x}$.

16. $\dfrac{dC}{dq}$ si $C = 7 + 2q - 3q^2$.

17. $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{x + 2}$.

18. $g'(x)$ si $g(x) = \dfrac{2}{x - 3}$.

19. Encuentre la pendiente de la curva $y = x^2 + 4$ en el punto $(-2, 8)$.

20. Encuentre la pendiente de la curva $y = 2 - 3x^2$ en el punto $(1, -1)$.

21. Encuentre la pendiente de la curva $y = 4x^2 - 5$ cuando $x = 0$.

22. Encuentre la pendiente de la curva $y = \sqrt{x}$ cuando $x = 1$.

En los problemas del 23 al 28 encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

23. $y = x + 4$; $(3, 7)$.

24. $y = 2x^2 - 5$; $(-2, 3)$.

25. $y = 3x^2 + 3x - 4$; $(-1, -4)$.

26. $y = (x - 7)^2$; $(6, 1)$.

27. $y = \dfrac{3}{x - 1}$; $(2, 3)$.

28. $y = \dfrac{5}{1 - 3x}$; $(2, -1)$.

---

29. Operación bancaria Las ecuaciones pueden incluir derivadas de funciones. En un artículo sobre desregulación de la tasa de interés, Christofi y Agapos[1] resuelven la ecuación

$$r = \left(\frac{\eta}{1 + \eta}\right)\left(r_L - \frac{dC}{dD}\right)$$

para η (letra griega "eta"). Aquí r es la tasa de depósito pagada por los bancos comerciales, r_L es la tasa ganada por estos bancos, C es el costo administrativo de transformar los depósitos en activos que pagan rendimiento, D es el nivel de los depósitos de ahorro y η es la elasticidad de los depósitos con respecto a la tasa de depósito. Encuentre η.

En los problemas 30 y 31 utilice su calculadora gráfica para estimar las derivadas de las funciones en los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres decimales.

 **30.** $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x}$; $x = 1$, $x = -1$.

 **31.** $f(x) = e^x(4x - 7)$; $x = 0$, $x = 1.5$.

---

[1] A. Christofi y A. Agapos, "Interest Rate Deregulation: An Empirical Justification", *Review of Business and Economic Research*, XX, núm. 1 (1984), 39-49.

En los problemas 32 y 33 utilice el enfoque del "límite del cociente de diferencia" para estimar $f'(x)$ en los valores indicados de x. Redondee sus respuestas a tres decimales.

32. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+3}$; $x = 0.5$, $x = 10$.

33. $f(x) = \dfrac{x^2+4x+2}{x^3-3}$; $x = 2$, $x = -4$.

---

34. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 + x$ en el punto $(-2, 2)$. Grafique la curva y la recta tangente. Observe que la recta tangente es una buena aproximación a la curva cerca del punto de tangencia.

35. La derivada de $f(x) = x3 - x + 2$ es $f'(x) = 3x^2 - 1$. Grafique f y su derivada f'. Observe que hay dos puntos sobre la gráfica de f donde la recta tangente es horizontal. Para los valores x de esos puntos, ¿cuáles son los valores correspondientes de $f'(x)$? ¿Por qué se esperan esos resultados? Observe los intervalos en los que $f'(x)$ es positiva. En esos intervalos note que las rectas tangentes a la gráfica de f tienen pendientes positivas. Observe los intervalos en los que $f'(x)$ es negativa. En esos intervalos note que las rectas tangentes a la gráfica de f tienen pendientes negativas.

10.2 Reglas de diferenciación

OBJETIVO Desarrollar reglas de diferenciación básicas, fórmulas para la derivada de una constante, de x^n, de una constante por una función y de la suma y diferencia de funciones.

Quizá coincida con nosotros que la diferenciación directa de una función por medio de la definición de la derivada, puede ser un proceso tedioso. Por fortuna, existen reglas que permiten efectuar la diferenciación en forma por completo mecánica y eficiente. Con ellas se evita el uso directo de límites. Veremos algunas de esas reglas en esta sección.

Mostraremos primero que la derivada de una función constante es cero. Recuerde que la gráfica de una función constante, $f(x) = c$, es una línea horizontal (véase la fig. 10.11) que tiene pendiente nula en todo punto. Esto significa que $f'(x) = 0$, independientemente del valor de x. Como prueba formal de este resultado, aplicamos la definición de la derivada a $f(x) = c$:

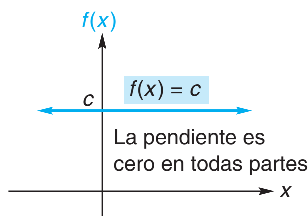


FIGURA 10.11 La pendiente de una función constante es 0.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Tenemos así nuestra primera regla:

Regla 1 Derivada de una constante

Si c es una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}(c) = 0.$$

Esto es, la derivada de una función constante es cero.

EJEMPLO 1 Derivadas de funciones constantes

a. $\dfrac{d}{dx}(3) = 0$ porque 3 es una función constante.

b. Si $g(x) = \sqrt{5}$ entonces $g'(x) = 0$ porque g es una función constante. Por ejemplo, la derivada de g cuando $x = 4$ es $g'(4) = 0$.

c. Si $s(t) = (1{,}938{,}623)^{807.4}$, entonces $ds/dt = 0$.

La siguiente regla da una fórmula para la derivada de x elevada a una potencia constante, esto es, la derivada de $f(x) = x^n$. Una función de esta forma se llama **función potencia.** Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es una función potencia. Para demostrar la regla debemos desarrollar $(x + h)^n$. Recuerde que

$$(x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

y

$$(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

En ambos desarrollos los exponentes de x decrecen de izquierda a derecha, mientras que los de la h aumentan. Esto es cierto para el caso general $(x + h)^n$, donde n es un entero positivo. Puede demostrarse que

$$(x + h)^n = x^n + nx^{n-1}h + (\ \ )x^{n-2}h^2 + \cdots + (\ \ )xh^{n-1} + h^n,$$

donde los números faltantes dentro de los paréntesis son ciertas constantes. Esta fórmula se usa para probar la siguiente regla:

Regla 2 Derivada de x^n

Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1},$$

siempre que x^{n-1} esté definida. Esto es, la derivada de una potencia constante de x es igual al exponente multiplicado por x elevada a una potencia menor en una unidad que la de la potencia dada.

Aunque la regla establece que n puede ser cualquier número real, nuestra demostración sólo es para enteros positivos. La demostración general no se da en este libro.

Demostración. Daremos una prueba para el caso en que n es un entero positivo. Si $f(x) = x^n$, al aplicar la definición de la derivada obtenemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}.$$

De acuerdo con el desarrollo anterior de $(x + h)^n$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + (\ \ )x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h}.$$

En el numerador, la suma del primero y del último término es cero. Al dividir cada uno de los términos restantes entre h se obtiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} [nx^{n-1} + (\ \ )x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}].$$

Cada término después del primero tiene h como factor y debe tender a 0 conforme $h \to 0$. Por tanto, $f'(x) = nx^{n-1}$.

EJEMPLO 2 Derivada de potencias de x

a. Según la regla 2, $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x^{2-1} = 2x$.

b. Si $f(x) = x = x^1$ entonces $f'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$. Así, la derivada de x con respecto a x es 1.

c. Si $f(x) = x^{-10}$, entonces $f'(x) = -10x^{-10-1} = -10x^{-11}$.

Cuando aplicamos una regla de diferenciación a una función, algunas veces la función debe reescribirse primero, de manera que tenga la forma apropiada para esa regla. Por ejemplo, para diferenciar $f(x) = \frac{1}{x^{10}}$ debemos escribirla primero en la forma f como $f(x) = x^{-10}$ y luego proceder como en el ejemplo 2(c).

EJEMPLO 3 Reescribir funciones en la forma x^n

a. Para diferenciar $y = \sqrt{x}$, escribimos $\sqrt{x}$ como $x^{1/2}$ de modo que tenga la forma x^n. Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{(1/2)-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

b. Sea $h(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Para aplicar la regla 2, *debemos* reescribir $h(x)$ como $h(x) = x^{-3/2}$ de modo que tenga la forma x^n. Tenemos

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-3/2}) = -\frac{3}{2}x^{(-3/2)-1} = -\frac{3}{2}x^{-5/2}.$$



Advertencia En el ejemplo 3(b), no reescribimos $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ como $\frac{1}{x^{3/2}}$ y luego sólo derivamos el denominador; esto es

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \neq \frac{1}{\frac{3}{2}x^{1/2}}.$$

Ahora que podemos decir inmediatamente que la derivada de x^3 es $3x^2$, surge la pregunta de qué hacer con la derivada de un *múltiplo* de x^3 tal como $5x^3$. Nuestra siguiente regla trata sobre la diferenciación de una constante por una función.

Regla 3 Regla del factor constante

Si f es una función diferenciable y c una constante, entonces $cf(x)$ es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x).$$

Esto es, la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Demostración. Si $g(x) = cf(x)$, al aplicar la definición de la derivada de g se obtiene

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[c\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Pero $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es $f'(x)$; por lo que $g'(x) = cf'(x)$.

EJEMPLO 4 Diferenciación de una constante multiplicada por una función

Diferenciar las siguientes funciones.

a. $g(x) = 5x^3$.

Solución: aquí g es una constante (5) que multiplica a una función (x^3). Así

$$\frac{d}{dx}(5x^3) = 5\frac{d}{dx}(x^3) \qquad \text{(Regla 3)}$$
$$= 5(3x^{3-1}) = 15x^2 \qquad \text{(Regla 2).}$$

b. $f(q) = \dfrac{13q}{5}$.

Solución:

Estrategia: primero reescribimos f como una constante por una función y luego aplicamos la regla 2.

Como $\dfrac{13q}{5} = \dfrac{13}{5}q$, f es el resultado de multiplicar la constante $\dfrac{13}{5}$ por la función q. Así,

$$f'(q) = \frac{13}{5}\frac{d}{dq}(q) \qquad \text{(Regla 3)}$$
$$= \frac{13}{5} \cdot 1 = \frac{13}{5} \qquad \text{(Regla 2).}$$

c. $y = \dfrac{0.25}{\sqrt[5]{x^2}}$.

Solución: podemos expresar a y como una constante por una función:

$$y = 0.25 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = 0.25x^{-2/5}.$$

De aquí que,

$$y' = 0.25\frac{d}{dx}(x^{-2/5}) \qquad \text{(Regla 3)}$$
$$= 0.25\left(-\frac{2}{5}x^{-7/5}\right) = -0.1x^{-7/5} \qquad \text{(Regla 2).}$$


Advertencia Para derivar $f(x) = (4x)^3$, usted puede estar tentado a escribir $f'(x) = 3(4x)^2$. **¡Esto es incorrecto!** ¿Ve usted por qué? La razón es que la regla 2 se aplica a una potencia de la variable x, **no** a una potencia de una expresión que incluya a x, tal como $4x$. Para aplicar nuestras reglas, debemos obtener una forma adecuada para $f(x)$. Podemos reescribir $(4x)^3$ como 4^3x^3 o $64x^3$. Así,

$$f'(x) = 64\frac{d}{dx}(x^3) = 64(3x^2) = 192x^2.$$

La regla siguiente se refiere a la derivada de sumas y diferencias de funciones.

Regla 4 Derivada de una suma o de una diferencia

Si f y g son funciones diferenciables, entonces $f + g$ y $f - g$ son diferenciables y

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

y

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x).$$

Esto es, la derivada de la suma (o diferencia) de dos funciones es la suma (o diferencia) de sus derivadas.

Demostración. Para el caso de una suma, si $F(x) = f(x) + g(x)$, al aplicar la definición de la derivada de F se obtiene

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} \qquad \text{(reagrupando)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right].$$

Como el límite de una suma es la suma de los límites,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Pero esos dos límites son $f'(x)$ y $g'(x)$. Entonces,

$$F'(x) = f'(x) + g'(x).$$

La demostración para la derivada de una diferencia de dos funciones es similar a la anterior.

La regla 4 puede extenderse a la derivada de cualquier número de sumas y diferencias de funciones. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x) + h(x) + k(x)] = f'(x) - g'(x) + h'(x) + k'(x).$$

EJEMPLO 5 Diferenciación de sumas y diferencias de funciones

Diferenciar las siguientes funciones.

a. $F(x) = 3x^5 + \sqrt{x}.$

Principios en práctica 1

Diferenciación de sumas y diferencias de funciones

Si la función de ingreso para cierto producto es $r(q) = 50q - 0.3q^2$, determine la derivada de esta función, también conocida como el ingreso marginal.

Solución: aquí F es la suma de las dos funciones, $3x^5$ y $\sqrt{x}$. Por tanto,

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(3x^5) + \frac{d}{dx}(x^{1/2}) \qquad \text{(Regla 4)}$$

$$= 3\frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(x^{1/2}) \qquad \text{(Regla 3)}$$

$$= 3(5x^4) + \frac{1}{2}x^{-1/2} = 15x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{(Regla 2).}$$

b. $f(z) = \frac{z^4}{4} - \frac{5}{z^{1/3}}$.

Solución: para aplicar nuestras reglas, reescribimos $f(z)$ en la forma $f(z) = \frac{1}{4}z^4 - 5z^{-1/3}$. Como f es la diferencia de dos funciones,

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{4}z^4\right) - \frac{d}{dz}(5z^{-1/3}) \qquad \text{(Regla 4)}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{d}{dz}(z^4) - 5\frac{d}{dz}(z^{-1/3}) \qquad \text{(Regla 3)}$$

$$= \frac{1}{4}(4z^3) - 5\left(-\frac{1}{3}z^{-4/3}\right) \qquad \text{(Regla 2)}$$

$$= z^3 + \frac{5}{3}z^{-4/3}.$$

c. $y = 6x^3 - 2x^2 + 7x - 8$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(6x^3) - \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(7x) - \frac{d}{dx}(8)$$

$$= 6\frac{d}{dx}(x^3) - 2\frac{d}{dx}(x^2) + 7\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(8)$$

$$= 6(3x^2) - 2(2x) + 7(1) - 0$$

$$= 18x^2 - 4x + 7.$$

En los ejemplos 6 y 7 necesitamos reescribir la función dada en una forma en la que se apliquen nuestras reglas.

EJEMPLO 6 Evaluación de una derivada

Encontrar la derivada de $f(x) = 2x(x^2 - 5x + 2)$ *cuando* $x = 2$.

Solución: multiplicamos y luego diferenciamos cada término.

$$f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 4x.$$

$$f'(x) = 2(3x^2) - 10(2x) + 4(1)$$

$$= 6x^2 - 20x + 4,$$

$$f'(2) = 6(2)^2 - 20(2) + 4 = -12.$$

EJEMPLO 7 Determinación de una ecuación de una recta tangente

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \frac{3x^2 - 2}{x}$$

cuando $x = 1$.

Solución:

> **Estrategia:** primero encontramos $\frac{dy}{dx}$, que da la pendiente de la recta tangente en cualquier punto. Al evaluar $\frac{dy}{dx}$ en $x = 1$, obtenemos la pendiente de la recta tangente requerida. Luego determinamos la coordenada y del punto sobre la curva cuando $x = 1$. Finalmente, sustituimos la pendiente y ambas coordenadas del punto en la forma punto-pendiente para obtener la ecuación de la recta tangente.

Reescribimos y como una diferencia de dos funciones,

$$y = \frac{3x^2}{x} - \frac{2}{x} = 3x - 2x^{-1}.$$

Por lo que,

$$\frac{dy}{dx} = 3(1) - 2[(-1)x^{-2}] = 3 + \frac{2}{x^2}.$$

La pendiente de la recta tangente a la curva cuando $x = 1$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 3 + \frac{2}{1^2} = 5.$$

Para encontrar la coordenada y del punto sobre la curva en $x = 1$, sustituimos este valor de x en la ecuación de la *curva*. Esto da como resultado

$$y = \frac{3(1)^2 - 2}{1} = 1.$$

De aquí que el punto (1, 1) está tanto sobre la curva como sobre la recta tangente. Entonces, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = 5(x - 1).$$

En la forma pendiente-ordenada al origen, tenemos

$$y = 5x - 4.$$



Advertencia Para obtener el valor de y del punto en la curva cuando $x = 1$, sustituimos en la ecuación de la *curva*, ¡no en la fórmula de la derivada!

Ejercicio 10.2

En los problemas del 1 al 74 diferencie las funciones.

1. $f(x) = 5$.
2. $f(x) = (\frac{11}{13})^{4/5}$.
3. $y = x^6$.
4. $f(x) = x^{21}$.
5. $y = x^{80}$.
6. $y = x^{6.1}$.
7. $f(x) = 9x^2$.
8. $y = 4x^3$.
9. $g(w) = 4w^5$.
10. $v(x) = x^e$.
11. $y = \frac{2}{3}x^4$.
12. $f(p) = \sqrt{3}p^4$.

13. $f(t) = \frac{t^9}{18}$.
14. $y = \frac{x^3}{3}$.
15. $f(x) = x + 3$.
16. $f(x) = 3x - 2$.
17. $f(x) = 4x^2 - 2x + 3$.
18. $f(x) = 7x^2 - 5x$.
19. $g(p) = p^4 - 3p^3 - 1$.
20. $f(t) = -13t^2 + 14t + 1$.
21. $y = -x^8 + x^5$.
22. $y = -8x^4 + \ln 2$.
23. $y = -13x^3 + 14x^2 - 2x + 3$.
24. $V(r) = r^8 - 7r^6 + 3r^2 + 1$.
25. $f(x) = 2(13 - x^4)$.
26. $f(s) = 5(s^4 - 3)$.
27. $g(x) = \frac{13 - x^4}{3}$.
28. $f(x) = \frac{5(x^4 - 6)}{2}$.
29. $h(x) = 4x^4 + x^3 - \frac{9x^2}{2} + 8x$.
30. $f(x) = -3x^2 + \frac{9}{2}x + 2$.
31. $f(x) = \frac{3x^4}{10} + \frac{7}{3}x^3$.
32. $p(x) = \frac{x^7}{7} + \frac{2x}{3}$.
33. $f(x) = x^{7/2}$.
34. $f(x) = 2x^{-14/5}$.
35. $y = x^{3/4} + 2x^{5/3}$.
36. $y = 5x^3 - x^{-2/5}$.
37. $y = 11\sqrt{x}$.
38. $y = \sqrt[3]{x^2}$.
39. $f(r) = 6\sqrt[3]{r}$.
40. $y = 4\sqrt[8]{x^2}$.
41. $f(x) = x^{-4}$.
42. $f(s) = 3s^{-2}$.
43. $f(x) = x^{-3} + x^{-5} - 2x^{-6}$.
44. $f(x) = 100x^{-3} + 10x^{1/2}$.
45. $y = \frac{1}{x}$.
46. $f(x) = \frac{2}{x^3}$.
47. $y = \frac{8}{x^5}$.
48. $y = \frac{1}{4x^5}$.
49. $g(x) = \frac{4}{3x^3}$.
50. $y = \frac{3}{2x^6}$.
51. $f(t) = \frac{1}{2t}$.
52. $g(x) = \frac{7}{9x}$.
53. $f(x) = \frac{x}{7} + \frac{7}{x}$.
54. $H(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}$.
55. $f(x) = -9x^{1/3} + 5x^{-2/5}$.
56. $f(z) = 3z^{1/4} - 12^2 - 8z^{-3/4}$.
57. $q(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$.
58. $f(x) = \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}$.
59. $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$.
60. $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
61. $y = x^2\sqrt{x}$.
62. $f(x) = x^3(3x^2)$.
63. $f(x) = x(3x^2 - 10x + 7)$.
64. $f(x) = x^3(3x^6 - 5x^2 + 4)$.
65. $f(x) = x^3(3x)^2$.
66. $f(x) = \sqrt{x}(5 - 6x + 3\sqrt[4]{x})$.
67. $v(x) = x^{-2/3}(x + 5)$.
68. $f(x) = x^{3/5}(x^2 + 7x + 11)$.
69. $f(q) = \frac{4q^3 + 7q - 4}{q}$.
70. $f(w) = \frac{w - 5}{w^5}$.
71. $f(x) = (x + 1)(x + 3)$.
72. $f(x) = x^2(x - 2)(x + 4)$.
73. $w(x) = \frac{x^2 + x^3}{x^2}$.
74. $f(x) = \frac{7x^3 + x}{12\sqrt{x}}$.

Para cada curva en los problemas del 75 al 78 encuentre las pendientes en los puntos indicados.

75. $y = 3x^2 + 4x - 8$; $(0,-8), (2, 12), (-3, 7)$.
76. $y = 5 - 6x - 2x^3$; $(0, 5), (\frac{3}{2}, -\frac{43}{4}), (-3, 77)$.
77. $y = 4$; cuando $x = -4, x = 7, x = 22$.
78. $y = 2x - 3\sqrt{x}$; cuando $x = 1, x = 16, x = 25$.

En los problemas del 79 al 82 encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado.

79. $y = 4x^2 + 5x + 6$; $(1, 15)$.
80. $y = \frac{1 - x^2}{5}$; $(4, -3)$.
81. $y = \frac{2}{x^2}$; $(1, 2)$.
82. $y = -\sqrt[3]{x}$; $(8, -2)$.

83. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = 3 + x - 5x^2 + x^4$$

cuando $x = 0$.

84. Repita el problema 83 para la curva

$$y = \frac{\sqrt{x}(2 - x^2)}{x}$$

cuando $x = 4$.

85. Encuentre todos los puntos sobre la curva

$$y = \tfrac{1}{3}x^3 - x^2$$

en los que la recta tangente es horizontal.

86. Repita el problema 85 para la curva

$$y = \frac{x^5}{5} - x + 1.$$

87. Encuentre todos los puntos sobre la curva

$$y = x^2 - 5x + 3$$

en los que la pendiente es 1.

88. Repita el problema 87 para la curva

$$y = \frac{x^3}{3} - 3x + 4.$$

89. Si $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, evalúe la expresión

$$\frac{x - 1}{2x\sqrt{x}} - f'(x).$$

90. Economía Eswaran y Kotwal[2] estudian economías agrarias en las que hay dos tipos de trabajadores, permanentes y eventuales. Los trabajadores permanentes son empleados que tienen contratos a largo plazo y pueden recibir prestaciones como vacaciones y atención médica. Los trabajadores eventuales son empleados por día y efectúan trabajos menores y rutinarios como desherbado, recolección y trillado. La diferencia z en el costo del valor presente de contratar a un trabajador permanente y a uno eventual está dada por

$$z = (1 + b)w_p - bw_c,$$

donde w_p y w_c son los salarios de trabajo permanente y eventual, respectivamente, b es una constante y w_p es una función de w_c. Eswaran y Kotwal afirman que

$$\frac{dz}{dw_c} = (1 + b)\left[\frac{dw_p}{dw_c} - \frac{b}{1 + b}\right].$$

Verifique esta afirmación.

91. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 - 3x$ en el punto $(2, 2)$. Grafique la función y la recta tangente sobre la misma pantalla. Observe que la línea pasa por $(2, 2)$ y parece ser tangente a la curva.

92. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \sqrt{x}$ en el punto $(1, 1)$. Grafique la función y la recta tangente sobre la misma pantalla. Observe que la línea pasa por $(1, 1)$ y parece ser tangente a la curva.

[2]M. Eswaran y A. Kotwal, "A Theory of Two-Tier Labor Markets in Agrarian Economies", *The American Economic Review*, 75, núm. 1 (1985), 162-177.

10.3 LA DERIVADA COMO UNA RAZÓN DE CAMBIO

OBJETIVO Explicar la tasa instantánea de cambio de una función por medio de la velocidad e interpretar la derivada como una tasa instantánea de cambio. Desarrollar el concepto "marginal", que se utiliza con frecuencia en administración y economía.

Hemos dado como interpretación geométrica de la derivada, la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. Históricamente, una aplicación muy importante de la derivada implica el movimiento de un objeto viajando en línea recta. Esto nos da una manera conveniente de interpretar la derivada como una *razón de cambio.*

Para denotar el cambio en una variable x, por lo común, se usa el símbolo Δx (léase "delta x"). Por ejemplo, si x cambia de 1 a 3, entonces el cambio en x es $\Delta x = 3 - 1 = 2$. El nuevo valor de x $(= 3)$ es el viejo valor más el cambio, o $1 + \Delta x$. De manera similar, si t se incrementa en Δt, el nuevo valor es $t + \Delta t$. Usaremos la notación Δ en el análisis siguiente.

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de la recta numérica de la figura 10.12 de acuerdo con la ecuación

$$s = f(t) = t^2,$$

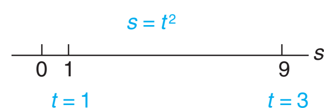


FIGURA 10.12 Movimiento a lo largo de una recta numérica.

donde s es la posición del objeto en el tiempo t. Esta ecuación se llama *ecuación de movimiento* y f se llama ***función de posición.*** Suponga que t está en segundos y s en metros. En $t = 1$, la posición es $s = f(1) = 1^2 = 1$, y en $t = 3$ la posición

es $s = f(3) = 3^2 = 9$. En este intervalo de 2 segundos el objeto tuvo un cambio de posición, o *desplazamiento,* de $9 - 1 = 8$ metros y la *velocidad promedio* (v_{prom}) del objeto se define como

$$v_{\text{prom}} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{longitud intervalo de tiempo}} \tag{1}$$

$$= \frac{8}{2} = 4 \text{ m/s}.$$

Decir que la velocidad promedio es de 4 m/s de $t = 1$ a $t = 3$, significa que *en promedio,* la posición del objeto cambia 4 m hacia la derecha cada segundo durante ese intervalo de tiempo. Sean Δs y Δt los cambios en los valores s y t, respectivamente. Entonces la velocidad promedio está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 4 \text{ m/s} \qquad (\text{en el intervalo } t = 1 \text{ a } t = 3).$$

La razón $\Delta s/\Delta t$ se llama también **razón de cambio promedio de s con respecto a t** en el intervalo de $t = 1$ a $t = 3$.

Ahora, consideremos que el intervalo de tiempo sea de sólo 1 segundo (esto es, $\Delta t = 1$). Entonces, para el intervalo *más corto* de $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t = 2$, tenemos $f(2) = 2^2 = 4$, por lo que

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(1)}{\Delta t} = \frac{4 - 1}{1} = 3 \text{ m/s}.$$

Con mayor generalidad, en el intervalo de $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t$, el objeto se mueve de la posición $f(1)$ a la posición $f(1 + \Delta t)$. Su desplazamiento es entonces $f(1 + \Delta t) - f(1)$:

$$\Delta s = f(1 + \Delta t) - f(1).$$

Como el intervalo de tiempo tiene una duración Δt, la velocidad promedio del objeto está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}.$$

Si Δt se considerase cada vez más pequeño, la velocidad promedio en el intervalo de $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t$ sería cercana a lo que podríamos llamar la *velocidad instantánea* en el tiempo $t = 1$, esto es, la velocidad en un *punto* en el tiempo ($t = 1$), en oposición a la velocidad en un *intervalo* de tiempo. Para algunos valores representativos de Δt entre 0.1 y 0.001, obtenemos las velocidades promedio anotadas en la tabla 10.2, que usted puede verificar.

TABLA 10.2

Duración del intervalo Δt	**Intervalo de tiempo,** $t = 1$ **a** $t = 1 + \Delta t$	**Velocidad promedio,** $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}$
0.1	$t = 1$ a $t = 1.1$	2.1 m/s
0.07	$t = 1$ a $t = 1.07$	2.07 m/s
0.05	$t = 1$ a $t = 1.05$	2.05 m/s
0.03	$t = 1$ a $t = 1.03$	2.03 m/s
0.01	$t = 1$ a $t = 1.01$	2.01 m/s
0.001	$t = 1$ a $t = 1.001$	2.001 m/s

La tabla sugiere que conforme la duración del intervalo de tiempo se aproxima a cero, la velocidad promedio tiende al valor de 2 m/s. En otras palabras, cuando Δt tiende a 0, $\Delta s/\Delta t$ tiende 2 m/s. Definimos el límite de la velocidad promedio cuando $\Delta t \to 0$, como la **velocidad instantánea** (o simplemente la **velocidad**), v, en el tiempo $t = 1$. Se llama también la **razón de cambio instantánea** de s con respecto a t, en $t = 1$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{prom}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}.$$

Si pensamos en Δt como h, el límite a la derecha es simplemente la derivada de s con respecto a t en $t = 1$. Así, la velocidad instantánea del objeto en $t = 1$ es ds/dt en $t = 1$. Como $s = t^2$ y

$$\frac{ds}{dt} = 2t,$$

la velocidad en $t = 1$ es

$$v = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=1} = 2(1) = 2 \text{ m/s},$$

lo que confirma nuestra conclusión anterior.

En resumen, si $s = f(t)$ es la función posición de un objeto que se mueve en línea recta, la velocidad promedio del objeto en el intervalo $[t, t + \Delta t]$ está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

y la velocidad en el tiempo t está dada por

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

EJEMPLO 1 Determinación de la velocidad promedio y la velocidad

Supóngase que la función de posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta numérica está dada por $s = f(t) = 3t^2 + 5$, donde t está en segundos y s en metros.

a. *Encontrar la velocidad promedio en el intervalo* [10, 10.1].

b. *Encontrar la velocidad cuando $t = 10$.*

Solución:

a. Se tiene aquí, $t = 10$ y $\Delta t = 10.1 - 10 = 0.1$. Tenemos

$$\begin{aligned} v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{f(10 + 0.1) - f(10)}{0.1} \\ &= \frac{f(10.1) - f(10)}{0.1} \\ &= \frac{311.03 - 305}{0.1} = \frac{6.03}{0.1} = 60.3 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

b. La velocidad v en el tiempo t está dada por

$$v = \frac{ds}{dt} = 6t.$$

Cuando $t = 10$, la velocidad es

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=10} = 6(10) = 60 \text{ m/s}.$$

Observe que la velocidad promedio en el intervalo [10, 10.1] es cercana a la velocidad en $t = 10$. Esto era de esperarse porque la duración del intervalo es pequeña.

Nuestro análisis de la razón de cambio de s con respecto a t se aplica a *cualquier* función $y = f(x)$. Así, podemos enunciar lo siguiente:

Si $y = f(x)$, entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \begin{cases} \text{tasa promedio de cambio} \\ \text{de } y \text{ con respecto a } x \\ \text{en el intervalo de } x \text{ a} \\ x + \Delta x \end{cases}$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \text{tasa instantánea de cambio} \\ \text{de } y \text{ con respecto a } x. \end{cases} \quad (2)$$

Como la razón instantánea de cambio de $y = f(x)$ en un punto es una derivada, es también la *pendiente de la recta tangente* a la gráfica de $y = f(x)$ en ese punto. Por conveniencia, a la razón de cambio instantánea la llamamos simplemente **razón de cambio.** La interpretación de una derivada como una razón de cambio es extremadamente importante.

Interpretemos ahora el significado de la razón de cambio de y con respecto a x. De la ecuación (2), si Δx (un cambio en x) es próximo a 0, entonces $\Delta y/\Delta x$ es cercano a dy/dx. Esto es,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}.$$

Por tanto,

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x. \quad (3)$$

Esto es, si x cambia en Δx, entonces el cambio en y, Δy, es aproximadamente dy/dx por el cambio en x. En particular,

si x cambia en 1, una estimación del cambio en y es $\dfrac{dy}{dx}$.

Principios en práctica 1

Estimación de ΔP por medio de dP/dp

Suponga que la utilidad, P, obtenida por medio de la venta de cierto producto a un precio de p por unidad, está dada por $P = f(p)$ y la tasa de cambio de esa utilidad con respecto al cambio en el precio es $\frac{dP}{dp} = 5$ en $p = 25$. Estime el cambio en la utilidad P, si el precio cambia de 25 a 25.5.

EJEMPLO 2 Estimación de Δy por medio de dy/dx

Suponga que $y = f(x)$ *y* $\frac{dy}{dx} = 8$ *cuando* $x = 3$. *Estimar el cambio en y si x cambia de* 3 *a* 3.5.

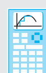
Solución: tenemos $dy/dx = 8$ y $\Delta x = 3.5 - 3 = 0.5$. El cambio en y está dado por Δy, entonces de (3),

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x = 8(0.5) = 4.$$

Observamos que como $\Delta y = f(3.5) - f(3)$, tenemos $f(3.5) = f(3) + \Delta y$. Por ejemplo, si $f(3) = 5$, entonces $f(3.5)$ puede estimarse como $5 + 4 = 9$.

Principios en práctica 2

Determinación de una razón de cambio



La posición de un objeto que se lanza hacia arriba a una velocidad de 16 pies/s desde una altura de 0 pies está dada por $y(t) = 16t - 16t^2$. Determine la tasa de cambio de y con respecto a t, y evalúela cuando $t = 0.5$. Utilice su calculadora gráfica para graficar $y(t)$. Utilice la gráfica para interpretar el comportamiento del objeto cuando $t = 0.5$.

EJEMPLO 3 Determinación de una razón de cambio

Encontrar la razón de cambio de $y = x^4$ *con respecto a x y evaluarla cuando* $x = 2$ *y cuando* $x = -1$. *Interpretar los resultados.*

Solución: la razón de cambio es

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3.$$

Cuando $x = 2$, $dy/dx = 4(2)^3 = 32$. Esto significa que si x aumenta una cantidad pequeña, y crece aproximadamente 32 veces esa cantidad. O en términos más sencillos, decimos que y está creciendo 32 veces más rápido que x. Cuando $x = -1$, entonces $dy/dx = 4(-1)^3 = -4$. El significado del signo menos en -4 es que y está *decreciendo* a un ritmo 4 veces superior al aumento de x.

EJEMPLO 4 Razón de cambio del precio con respecto a la cantidad

Sea $p = 100 - q^2$ *la función de demanda del producto de un fabricante. Encontrar la razón de cambio del precio p por unidad con respecto a la cantidad q. ¿Qué tan rápido está cambiando el precio con respecto a q cuando* $q = 5$? *Suponga que p está en dólares.*

Solución: la razón de cambio de p con respecto a q es dp/dq.

$$\frac{dp}{dq} = \frac{d}{dq}(100 - q^2) = -2q.$$

Así,

$$\left.\frac{dp}{dq}\right|_{q=5} = -2(5) = -10.$$

Esto significa que cuando se demandan 5 unidades, un *incremento* de una unidad extra demandada corresponde a una disminución de aproximadamente \$10 en el precio por unidad, que los consumidores están dispuestos a pagar.

EJEMPLO 5 Razón de cambio de volumen

Un globo esférico está siendo inflado. Encontrar la razón de cambio de su volumen con respecto a su radio. Evalúe esta razón de cambio cuando el radio es de 2 pies.

Solución: la fórmula para el volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. La razón de cambio de V con respecto a r es

$$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi(3r^2) = 4\pi r^2.$$

Cuando $r = 2$ pies, la razón de cambio es

$$\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=2} = 4\pi(2)^2 = 16\pi\,\frac{\text{pies}^3}{\text{pies}}.$$

Esto significa que cuando el radio es de 2 pies, al cambiar el radio en 1 pie, el volumen cambiará aproximadamente 16π pies^3 .

EJEMPLO 6 Razón de cambio de la matrícula

Un sociólogo estudia varios programas que pueden ayudar en la educación de niños de edad preescolar en cierta ciudad. El sociólogo cree que x años después de iniciado un programa particular, $f(x)$ miles de niños estarán matriculados, donde

$$f(x) = \frac{10}{9}(12x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 12.$$

¿A qué razón cambiará la matrícula, (a) después de 3 años de iniciado el programa y (b) después de 9 años?

Solución: razón de cambio de $f(x)$ es

$$f'(x) = \frac{10}{9}(12 - 2x).$$

a. Después de 3 años la razón de cambio es

$$f'(3) = \frac{10}{9}[12 - 2(3)] = \frac{10}{9}\cdot 6 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}.$$

Así, la matrícula estará creciendo entonces a razón de $6\frac{2}{3}$ miles de niños por año.

b. Después de 9 años la razón de cambio es

$$f'(9) = \frac{10}{9}[12 - 2(9)] = \frac{10}{9}[-6] = -\frac{20}{3} = -6\frac{2}{3}.$$

Así, la matrícula estará *disminuyendo* entonces a razón de $6\frac{2}{3}$ miles de niños por año.

Aplicaciones de la razón de cambio a la economía

La **función de costo total** de un fabricante, $c = f(q)$, nos da el costo total c de producir y comerciar q unidades de un producto. La razón de cambio de c con respecto a q se llama **costo marginal.** Así,

$$\text{costo marginal} = \frac{dc}{dq}.$$

Por ejemplo, suponga que $c = f(q) = 0.1q^2 + 3$ es una función de costo, donde c está en dólares y q en libras. Entonces,

$$\frac{dc}{dq} = 0.2q.$$

El costo marginal cuando se producen 4 libras es dc/dq evaluado cuando $q = 4$:

$$\left.\frac{dc}{dq}\right|_{q=4} = 0.2(4) = 0.80.$$

Esto significa que si la producción se incrementa en 1 libra, desde 4 hasta 5 libras, entonces el cambio en el costo es aproximadamente de \$0.80. Esto es, la libra adicional cuesta casi \$0.80. En general, *interpretamos el costo marginal como el costo aproximado de una unidad adicional producida.* [El costo real de producir una libra adicional más allá de 4 es $f(5) - f(4) = 5.5 - 4.6 = \$0.90$.]

Si c es el costo total de producir q unidades de un producto, entonces el **costo promedio por unidad** $\bar{c}$ es

$$\bar{c} = \frac{c}{q}. \quad (4)$$

Por ejemplo, si el costo total de 20 unidades es de \$100, entonces el costo promedio por unidad es $\bar{c} = 100/20 = \$5$. Multiplicando ambos miembros de la ecuación (4) por q obtenemos,

$$c = q\bar{c}.$$

Esto es, el costo total es el producto del número de unidades producidas multiplicado por el costo promedio unitario.

EJEMPLO 7 Costo marginal

Si la ecuación del costo promedio de un fabricante es

$$\bar{c} = 0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q},$$

encontrar la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal cuando se producen 50 unidades?

Solución:

Estrategia: la función de costo marginal es la derivada de la función de costo total c. Por lo que primero encontramos c, multiplicando $\bar{c}$ por q.

Tenemos

$$\begin{aligned} c &= q\bar{c} \\ &= q\left[0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q}\right]. \\ c &= 0.0001q^3 - 0.02q^2 + 5q + 5000. \end{aligned}$$

Al diferenciar c, obtenemos la función de costo marginal:

$$\frac{dc}{dq} = 0.0001(3q^2) - 0.02(2q) + 5(1) + 0$$
$$= 0.0003q^2 - 0.04q + 5.$$

El costo marginal cuando se producen 50 unidades es

$$\left.\frac{dc}{dq}\right|_{q=50} = 0.0003(50)^2 - 0.04(50) + 5 = 3.75.$$

Si c está en dólares y la producción se incrementa en 1 unidad, de $q = 50$ a $q = 51$, entonces el costo de la unidad adicional es aproximadamente de \$3.75. Si la producción se incrementa en $\frac{1}{3}$ de unidad desde $q = 50$, el costo de la producción adicional es aproximadamente de $(\frac{1}{3})(3.75) = \$1.25$.

Supongamos que $r = f(q)$ es la **función de ingreso total** para un fabricante. La ecuación $r = f(q)$ establece que el valor total de un dólar recibido al vender q unidades de un producto es r. El **ingreso marginal** se define como la razón de cambio del valor total recibido, con respecto al número total de unidades vendidas. Por consiguiente, el ingreso marginal es solamente la derivada de r con respecto a q:

$$\text{ingreso marginal} = \frac{dr}{dq}.$$

El ingreso marginal indica la rapidez a la que el ingreso cambia con respecto a las unidades vendidas. Lo interpretamos como el *ingreso aproximado recibido al vender una unidad adicional de producción.*

EJEMPLO 8 Ingreso marginal

Supóngase que un fabricante vende un producto a \$2 por unidad. Si se venden q unidades, el ingreso total está dado por

$$r = 2q.$$

La función de ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dq} = \frac{d}{dq}(2q) = 2,$$

que es una función constante. Entonces, el ingreso marginal es igual a 2 sin importar el número de unidades vendidas. Esto es lo que esperaríamos, ya que el fabricante recibe \$2 por cada unidad vendida.

Razones de cambio relativas y porcentuales

Para la función de ingreso total del ejemplo 8, $r = f(q) = 2q$, se tiene

$$\frac{dr}{dq} = 2.$$

Esto significa que el ingreso está cambiando a razón de \$2 por unidad, sin importar el número de unidades vendidas. Aunque ésta es una información

valiosa, puede ser más significativa cuando se compara con la r misma. Por ejemplo, si $q = 50$, entonces $r = 2(50) = \$100$. Así, la razón de cambio del ingreso es $2/100 = 0.02$ **de *r*.** Por otra parte, si $q = 5000$, entonces $r = 2(5000) = \$10,000$, y la razón de cambio de r *es* $2/10,000 = 0.0002$ ***de r.*** Aunque r cambia a la misma razón en cada nivel, al compararla con r misma, esta razón es relativamente menor cuando $r = 10,000$ que cuando $r = 100$. Considerando el cociente

$$\frac{dr/dq}{r},$$

tenemos un medio de comparar la razón de cambio de r con r misma. Esta razón se llama *razón de cambio relativa* de r. Ya vimos antes que la razón de cambio relativa cuando $q = 50$ es

$$\frac{dr/dq}{r} = \frac{2}{100} = 0.02,$$

y cuando $q = 5000$, es

$$\frac{dr/dq}{r} = \frac{2}{10,000} = 0.0002.$$

Multiplicando las razones relativas por 100 obtenemos las *razones de cambio porcentuales.* La razón de cambio porcentual cuando $q = 50$, es $(0.02)(100) = 2\%$; cuando $q = 5000$, es $(0.0002)(100) = 0.02\%$. Así, por ejemplo, si se vende una unidad adicional a 50, el ingreso aumenta aproximadamente en 2%.

En general, para cualquier función f, tenemos la siguiente definición:

Definición

La ***razón de cambio relativa*** de $f(x)$ es

$$\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

La ***razón de cambio porcentual*** de $f(x)$ es

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100.$$

Principios en práctica 3

Razones de cambio relativa y porcentual

El volumen V de un recipiente en forma de cápsula con altura cilíndrica de 4 pies y radio r está dada por

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2.$$

Determine las tasas de cambio relativa y porcentual del volumen con respecto al radio, cuando el radio es de 2 pies.

EJEMPLO 9 Razones de cambio relativa y porcentual

Determinar las razones de cambio relativa y porcentual de

$$y = f(x) = 3x^2 - 5x + 25$$

cuando $x = 5$.

Solución: aquí

$$f'(x) = 6x - 5.$$

Como $f'(5) = 6(5) - 5 = 25$ y $f(5) = 3(5)^2 - 5(5) + 25 = 75$, la razón de cambio relativa de y cuando $x = 5$ es

$$\frac{f'(5)}{f(5)} = \frac{25}{75} \approx 0.333.$$

Al multiplicar 0.333 por 100 se obtiene la razón de cambio porcentual: $(0.333)(100) = 33.3\%$.

Ejercicio 10.3

1. Suponga que la función de posición de un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta es $s = f(t) = t^3 + 2t$, donde t está en segundos y s en metros. Encuentre la velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ para el intervalo $[1, 1 + \Delta t]$, donde Δt está dado en la tabla siguiente:

Δt	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$\Delta s/\Delta t$						

Con base en sus resultados estime la velocidad cuando $t = 1$. Verifique sus cálculos usando diferenciación.

2. Si $y = f(x) = \sqrt{2x + 5}$, encuentre la razón de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo $[3, 3 + \Delta x]$, donde Δx está dado en la tabla siguiente:

Δx	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$\Delta y/\Delta x$						

Con base en sus resultados estime la razón de cambio de y con respecto a x cuando $x = 3$.

En cada uno de los problemas del 3 al 8 se da una función de posición, donde t está en segundos y s en metros.

a. *Encuentre la posición en el valor dado de t.*
b. *Encuentre la velocidad promedio para el intervalo dado.*
c. *Encuentre la velocidad en el valor dado de t.*

3. $s = t^2 - 3t$; $[4, 4.5]$; $t = 4$.

4. $s = \frac{1}{2}t + 1$; $[2, 2.1]$; $t = 2$.

5. $s = 2t^3 + 6$; $[1, 1.02]$; $t = 1$.

6. $s = -3t^2 + 2t + 1$; $[1, 1.25]$; $t = 1$.

7. $s = t^4 - 2t^3 + t$; $[2, 2.1]$; $t = 2$.

8. $s = t^4 - t^{5/2}$; $[0, \frac{1}{4}]$; $t = 0$.

9. Electricidad La corriente i en un resistor como función de la potencia P desarrollada en el resistor, está dada por $i = 2.6\sqrt{P}$. Encuentre la razón de cambio de i con respecto a P cuando $P = 4$.

10. Física El volumen V de cierto gas varía con la presión p de acuerdo con la ecuación $p = 150/V$. Encuentre la razón de cambio de p con respecto a V cuando $V = 5$.

11. Ingreso-educación Los sociólogos han estudiado la relación entre el ingreso y el número de años de educación en miembros de un grupo urbano particular. Ellos encontraron que una persona con x años de educación, antes de buscar empleo regular puede esperar recibir un ingreso anual medio de y dólares anuales, donde

$$y = 5x^{5/2} + 5900, \quad 4 \leq x \leq 16.$$

Encuentre la razón de cambio del ingreso con respecto al número de años de educación. Evalúela cuando $x = 9$.

12. Encuentre la razón de cambio del área A de un círculo con respecto a su radio r si

$$A = \pi r^2.$$

Evalúela cuando $r = 7$ pulgadas.

13. Temperatura de la piel La temperatura aproximada T de la piel en términos de la temperatura T_e del medio ambiente está dada por

$$T = 32.8 + 0.27(T_e - 20),$$

donde T y T_e están en grados Celsius.[3] Encuentre la razón de cambio de T con respecto a T_e.

14. Biología El volumen V de una célula esférica está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ donde r es el radio. Encuentre la razón de cambio del volumen con respecto al radio cuando $r = 6.5 \times 10^{-4}$ centímetros.

En los problemas del 15 al 20 se dan funciones de costo, donde c es el costo de producir q unidades de un producto. Para cada caso encuentre la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal para el valor o valores dados de q?

15. $c = 500 + 10q$; $q = 100$.

16. $c = 5000 + 6q$; $q = 36$.

17. $c = 0.3q^2 + 2q + 850$; $q = 3$.

18. $c = 0.1q^2 + 3q + 2$; $q = 3$.

19. $c = q^2 + 50q + 1000$; $q = 15, q = 16, q = 17$.

20. $c = 0.03q^3 - 0.6q^2 + 4.5q + 7700$; $q = 10, q = 20, q = 100$.

[3] R. W. Stacy et al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

En los problemas del 21 al 24, $\bar{c}$ representa el costo promedio por unidad, que es una función del número q de unidades producidas. Encuentre la función de costo marginal y el costo marginal para los valores indicados de q.

21. $\bar{c} = 0.01q + 5 + \frac{500}{q}$; $q = 50$, $q = 100$.

22. $\bar{c} = 2 + \frac{1000}{q}$; $q = 25$, $q = 235$.

23. $\bar{c} = 0.00002q^2 - 0.01q + 6 + \frac{20,000}{q}$; $q = 100$, $q = 500$.

24. $\bar{c} = 0.001q^2 - 0.3q + 40 + \frac{7000}{q}$; $q = 10$, $q = 20$.

En los problemas del 25 al 28, r representa el ingreso total y es una función del número q de unidades vendidas. Encuentre la función de ingreso marginal y el ingreso marginal para los valores indicados de q.

25. $r = 0.7q$; $q = 8$, $q = 100$, $q = 200$.

26. $r = q(15 - \frac{1}{30}q)$; $q = 5$, $q = 15$, $q = 150$.

27. $r = 250q + 45q^2 - q^3$; $q = 5$, $q = 10$, $q = 25$.

28. $r = 2q(30 - 0.1q)$; $q = 10$, $q = 20$.

---

29. Fábrica de medias La función de costo total de una fábrica de medias es estimada por Dean[4] como

$$c = -10,484.69 + 6.750q - 0.000328q^2,$$

donde q es la producción en docenas de pares y c el costo total. Encuentre la función de costo marginal y evalúela cuando $q = 5000$.

30. Planta de energía La función de costo total para una planta de energía eléctrica es estimada por Nordin[5] como

$$c = 32.07 - 0.79q + 0.02142q^2 - 0.0001q^3,$$

$$20 \leq q \leq 90,$$

donde q es la producción total en 8 horas (como porcentaje de la capacidad) y c el costo total en dólares del combustible. Encuentre la función de costo marginal y evalúela cuando $q = 70$.

31. Concentración urbana Suponga que las 100 ciudades más grandes de Estados Unidos en 1920 se clasificaron de acuerdo con su extensión (áreas de las ciudades). Según Lotka,[6] la siguiente relación se cumple de manera aproximada:

$$PR^{0.93} = 5,000,000.$$

Aquí, P es la población de la ciudad con la clasificación R respectiva. Esta relación se llama *ley de la concentración urbana* para 1920. Despeje P en términos de R y luego encuentre qué tan rápido cambia la población con respecto a la clasificación.

32. Depreciación Según el método de depreciación lineal, el valor v de cierta máquina después de t años está dado por

$$v = 75,000 - 12,500t,$$

donde $0 \leq t \leq 10$. ¿Qué tan rápido cambia v con respecto a t cuando $t = 2$, $t = 3$ en cualquier momento?

33. Polilla de invierno En Nueva Escocia se llevó a cabo un estudio de la polilla de invierno (adaptado de Embree).[7] Las larvas de la polilla caen al pie de los árboles huéspedes a una distancia de x pies de la base del árbol, la densidad de larvas (número de larvas por pie cuadrado de suelo) fue de y, donde

$$y = 59.3 - 1.5x - 0.5x^2, \quad 1 \leq x \leq 9.$$

a. ¿Con qué rapidez cambia la densidad de larvas con respecto a la distancia desde la base del árbol cuando $x = 6$?

b. ¿Para qué valor de x la densidad de larvas decrece a razón de 6 larvas por pie cuadrado por pie?

34. Función de costo Para la función de costo

$$c = 0.4q^2 + 4q + 5,$$

encuentre la razón de cambio de c con respecto a q cuando $q = 2$. Además, ¿qué valor tiene $\Delta c/\Delta q$ en el intervalo [2, 3]?

En los problemas del 35 al 40 encuentre (a) la razón de cambio y con respecto a x, y (b) la razón de cambio relativa de y. En el valor dado de x encuentre (c) la razón de cambio de y, (d) la razón de cambio relativa de y, y (e) la razón de cambio porcentual de y.

35. $y = f(x) = x + 4$; $x = 5$.

36. $y = f(x) = 5 - 2x$; $x = 3$.

37. $y = 3x^2 + 7$; $x = 2$.

38. $y = 2 - x^2$; $x = 0$.

39. $y = 8 - x^3$; $x = 1$.

40. $y = x^2 + 3x - 4$; $x = -1$.

---

[4] J. Dean, "Statistical Cost Functions of a Hosiery Mill", *Studies in Business Administration*, XI, núm. 4 (Chicago: University of Chicago Press, 1941).

[5] J. A. Nordin, "Note on a Light Plant's Cost Curves", *Econometrica*, 15 (1947), 231-235.

[6] A. J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology* (Nueva York: Dover Publications, Inc., 1956).

[7] D. G. Embree, "The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia, 1954-1962", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).

41. Función de costo Para la función de costo

$$c = 0.2q^2 + 1.2q + 4,$$

¿qué tan rápido cambia c con respecto a q cuando $q = 5$? Determine la razón de cambio porcentual de c con respecto a q cuando $q = 5$.

42. Materia orgánica/diversidad de especies En un análisis reciente de las aguas de mares poco profundos, Odum[8] afirma que en tales aguas la materia orgánica total y (en miligramos por litro) es una función de la diversidad x de las especies (en número de especies por mil individuos). Si $y = 100/x$, ¿con qué rapidez estará cambiando la materia orgánica total con respecto a la diversidad de especies cuando $x = 10$? ¿Cuál es la razón de cambio cuando $x = 10$?

43. Ingreso Para cierto fabricante, el ingreso r obtenido al vender q unidades de un producto está dado por

$$r = 30q - 0.3q^2.$$

(a) ¿Qué tan rápido cambia r con respecto a q? (b) Cuando $q = 10$, encuentre la razón de cambio relativo de r, y (c) encuentre la razón de cambio porcentual de r, al porcentaje más cercano.

44. Ingreso Repita el problema 43 para la función de ingreso dada por $r = 20q - 0.1q^2$ y $q = 100$.

45. Peso de una rama El peso de una rama de árbol está dado por $W = 2t^{0.432}$, donde t es el tiempo. Encuentre la razón de cambio relativa de W con respecto a t.

46. Respuesta a una descarga eléctrica Se realizó un experimento[9] psicológico para analizar la respuesta humana a descargas eléctricas (estímulos). Las personas recibieron descargas eléctricas de varias intensidades. La respuesta R a una descarga de intensidad I (en microamperes) debía ser un número que indicase la magnitud percibida relativa a la de una descarga "estándar". A la descarga estándar se le asignó una magnitud de 10. Dos grupos de personas fueron objeto del estudio bajo condiciones ligeramente diferentes. Las respuestas R_1 y R_2 de los grupos primero y segundo a una descarga de intensidad I fueron

$$R_1 = \frac{I^{1.3}}{1855.24}, \quad 800 \leq I \leq 3500,$$

y

$$R_2 = \frac{I^{1.3}}{1101.29}, \quad 800 \leq I \leq 3500.$$

a. Para cada grupo, determine la razón de cambio relativa de la respuesta con respecto a la intensidad.

b. ¿Cómo son entre sí esos cambios?

c. En general, si $f(x) = C_1x^n$ y $g(x) = C_zx^n$, donde C_1 y C_2 son constantes, ¿cómo son entre sí las razones de cambio relativas de f y g?

47. Costo Un fabricante de bicicletas de montaña determinó que cuando se producen 20 bicicletas por día, el costo promedio es de \$150 y el costo marginal de \$125. Con base en esta información, determine el costo total de producir 21 bicicletas por día.

48. Costos marginal y promedio Suponga que la función de costo para cierto producto es $c = f(q)$. Si la razón de cambio relativa de c (con respecto a q) es $\frac{1}{q}$, demuestre que la función de costo marginal y la función de costo promedio son iguales.

En los problemas 49 y 50 utilice la capacidad de su calculadora gráfica para derivar de manera numérica.



49. Si la función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2 + 3}} + 5000,$$

donde c está en dólares, encuentre el costo marginal cuando se producen 10 unidades. Redondee su respuesta al centavo más cercano.



50. La población P de una ciudad dentro de t años está dada por

$$P = 20{,}000e^{0.03t}.$$

Encuentre la razón de cambio de la población con respecto al tiempo t dentro de cuatro años. Redondee su respuesta al entero más cercano.

[8]H. T. Odum, "Biological Circuits and the Marine System of Texas", en *Pollution and Marine Biology*, ed. T. A. Olsen y F. J. Burgess (Nueva York: Interscience Publishers, 1967).

[9]H. Babkoff, "Magnitude Estimation of Short Electrocutaneous Pulses", *Psychological Research*, 39, núm. 1 (1976), 39-49.

OBJETIVO Relacionar diferenciabilidad con continuidad.

10.4 Diferenciabilidad y continuidad

En la próxima sección haremos uso de la siguiente relación importante entre diferenciabilidad y continuidad:

> Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a.

Para establecer este resultado, supondremos que f es diferenciable en a. Entonces $f'(a)$ existe y

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a).$$

Consideremos el numerador $f(a+h) - f(a)$ cuando $h \to 0$. Tenemos,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)] &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} h\\ &= f'(a)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

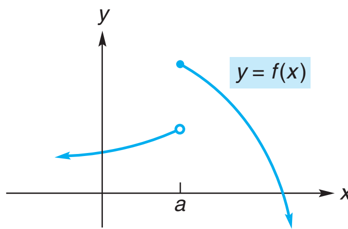


FIGURA 10.13 f no es continua en a, de modo que f no es diferenciable en a.

Entonces, $\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)] = 0$. Esto significa que $f(a+h) - f(a)$ tiende a cero cuando $h \to 0$. En consecuencia,

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a).$$

Como se estableció en la sección 9.4, esta condición significa que f es continua en a. Esto demuestra que f es continua en a cuando f es diferenciable ahí. Con mayor sencillez, decimos que **diferenciabilidad en un punto implica continuidad en ese punto.**

Si una función no es continua en un punto, no puede tener derivada ahí. Por ejemplo, la función de la figura 10.13 es discontinua en a. La curva no tiene tangente en ese punto, por lo que la función no es diferenciable ahí.

EJEMPLO 1 Continuidad y diferenciabilidad

a. Sea $f(x) = x^2$. Su derivada $2x$ está definida para toda x, por lo que $f(x) = x^2$ debe ser continua para toda x.

b. La función $f(p) = \dfrac{1}{2p}$ no es continua en $p = 0$, porque f no está definida ahí. La derivada no existe en $p = 0$.

El recíproco del enunciado de que la diferenciabilidad implica continuidad es *falso.* Esto es, es falso que continuidad implique diferenciabilidad. En el ejemplo 2 veremos una función que es continua en un punto, pero no es diferenciable ahí.

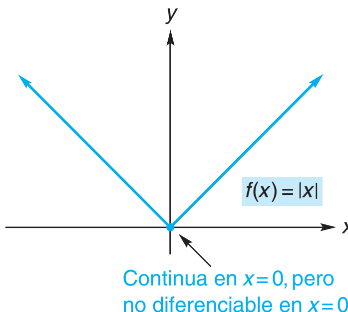


FIGURA 10.14 Continuidad no implica diferenciabilidad.

EJEMPLO 2 Continuidad no implica diferenciabilidad

La función $y = f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ (véase la fig. 10.14). Como lo mencionamos en la sección 10.1, no existe recta tangente en $x = 0$. Entonces la derivada no existe ahí. Esto demuestra que la continuidad *no* implica diferenciabilidad.

OBJETIVO Determinar derivadas por medio de la aplicación de las reglas del producto y del cociente, y desarrollar los conceptos de propensión marginal al consumo y propensión marginal al ahorro.

10.5 Reglas del producto y del cociente

La ecuación $F(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5)$, expresa $F(x)$ como un producto de dos funciones: $x^2 + 3x$ y $4x + 5$. Para encontrar $F'(x)$ usando sólo nuestras reglas previas, multiplicamos primero las funciones. Luego diferenciamos el resultado, término por término:

$$F(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5) = 4x^3 + 17x^2 + 15x,$$
$$F'(x) = 12x^2 + 34x + 15. \quad \textbf{(1)}$$

Sin embargo, en muchos problemas que implican diferenciar un producto de funciones, la multiplicación no es tan sencilla como en este caso. En ocasiones, ni siquiera es práctico intentarlo. Por fortuna, existe una regla para diferenciar un producto, y tal regla evita tener que efectuar las multiplicaciones. Como la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas, podría pensarse que la derivada de un producto de dos funciones es el producto de sus derivadas. **No** es éste el caso, como lo muestra la regla siguiente.

Regla 5 Regla del producto

Si f y g son funciones diferenciables, entonces el producto fg es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Esto es, la derivada del producto de dos funciones es la primera función por la derivada de la segunda, más la segunda función por la derivada de la primera.

$$\frac{d}{dx}(\text{producto}) = (\text{primera})\begin{pmatrix}\text{derivada de}\\ \text{la segunda}\end{pmatrix} + (\text{segunda})\begin{pmatrix}\text{derivada de}\\ \text{la primera}\end{pmatrix}.$$

Demostración. Si $F(x) = f(x)g(x)$, entonces por la definición de la derivada de F,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Ahora empleamos un "truco". Sumando y restando $f(x + h)g(x)$ en el numerador, tenemos

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x+h)g(x)}{h}.$$

Al ordenar nuevamente los términos obtenemos

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)] + [f(x+h)g(x) - f(x)g(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)] + g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Como hemos supuesto que f y g son diferenciables, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

y

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x).$$

La diferenciabilidad de f implica que f es continua, y de la sección 9.4,

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

Entonces,

$$F'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla del producto

Si $F(x) = (x^2+3x)(4x+5)$, *encontrar* $F'(x)$.

Solución: consideraremos a F como un producto de dos funciones:

$$F(x) = \underbrace{(x^2+3x)}_{f(x)}\underbrace{(4x+5)}_{g(x)}.$$

Entonces podemos aplicar la regla del producto:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \\ &= \underbrace{(x^2+3x)}_{\text{Primera}} \underbrace{\frac{d}{dx}(4x+5)}_{\text{Derivada de la segunda}} + \underbrace{(4x+5)}_{\text{Segunda}} \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2+3x)}_{\text{Derivada de la primera}} \\ &= (x^2+3x)(4) + (4x+5)(2x+3) \\ &= 12x^2 + 34x + 15 \qquad \text{(simplificando).} \end{aligned}$$

Esto concuerda con nuestro resultado previo [véase la ecuación (1)]. Aunque aquí la regla del producto no parece tener mucha utilidad práctica, veremos que hay ocasiones en que es práctico usarla.


Advertencia Vale la pena repetir que la derivada del producto de dos funciones **no** es el producto de sus derivadas. Por ejemplo, $\frac{d}{dx}(x^2+3x) = 2x+3$ y $\frac{d}{dx}(4x+5) = 4$, pero del ejemplo 1,

$$\frac{d}{dx}[(x^2+3x)(4x+5)] = 12x^2+34x+15 \neq (2x+3)4.$$

Principios en práctica 1

Aplicación de la regla del producto

Un puesto de tacos por lo general vende 225 tacos por día a $2 cada uno. Una investigación de un estudiante de administración le dice que por cada $0.15 de disminución en el precio, el puesto vendería 20 tacos más por día. La función de ingreso para el puesto de tacos es $R(x) = (2 - 0.15x)(225 + 20x)$, donde x es el número de disminuciones de $0.15 en el precio. Determine $\frac{dR}{dx}$.

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla del producto

Si $y = (x^{2/3} + 3)(x^{-1/3} + 5x)$, *encontrar* dy/dx.

Solución: al aplicar la regla del producto se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (x^{2/3} + 3)\frac{d}{dx}(x^{-1/3} + 5x) + (x^{-1/3} + 5x)\frac{d}{dx}(x^{2/3} + 3)\\ &= (x^{2/3} + 3)(-\tfrac{1}{3}x^{-4/3} + 5) + (x^{-1/3} + 5x)(\tfrac{2}{3}x^{-1/3})\\ &= \tfrac{25}{3}x^{2/3} + \tfrac{1}{3}x^{-2/3} - x^{-4/3} + 15.\end{aligned}$$

De manera alterna, podríamos haber encontrado la derivada sin la regla del producto, determinando primero el producto $(x^{2/3} + 3)(x^{-1/3} + 5x)$, y diferenciando luego el resultado término por término.

EJEMPLO 3 Diferenciación de un producto de tres factores

Si $y = (x + 2)(x + 3)(x + 4)$, *encontrar* y'.

Solución:

Estrategia: nos gustaría utilizar la regla del producto, pero ésta se aplica sólo cuando se tienen *dos* factores. Considerando los primeros dos factores como uno solo, podemos tratar a y como un producto de dos funciones:

$$y = [(x + 2)(x + 3)](x + 4).$$

La regla del producto da

$$\begin{aligned}y' &= [(x + 2)(x + 3)]\frac{d}{dx}(x + 4) + (x + 4)\frac{d}{dx}[(x + 2)(x + 3)]\\ &= [(x + 2)(x + 3)](1) + (x + 4)\frac{d}{dx}[(x + 2)(x + 3)].\end{aligned}$$

Aplicando de nuevo la regla del producto, tenemos

$$\begin{aligned}y' &= (x + 2)(x + 3) + (x + 4)\left[(x + 2)\frac{d}{dx}(x + 3) + (x + 3)\frac{d}{dx}(x + 2)\right]\\ &= (x + 2)(x + 3) + (x + 4)[(x + 2)(1) + (x + 3)(1)].\end{aligned}$$

Después de simplificar, obtenemos

$$y' = 3x^2 + 18x + 26.$$

Otras dos maneras de encontrar la derivada son:

1. Multiplicar los primeros dos factores de y para obtener

$$y = (x^2 + 5x + 6)(x + 4),$$

y luego aplicar la regla del producto.

2. Multiplicar los tres factores para obtener

$$y = x^3 + 9x^2 + 26x + 24,$$

y luego diferenciar término por término.

■ **EJEMPLO 4 Empleo de la regla del producto para encontrar la pendiente**

Encontrar la pendiente de la gráfica de $f(x) = (7x^3 - 5x + 2)(2x^4 + 7)$ *cuando* $x = 1$.

Solución:

Estrategia: encontramos la pendiente evaluando la derivada en $x = 1$. Ya que f es un producto de dos funciones, podemos encontrar la derivada usando la regla del producto.

Tenemos

$$f'(x) = (7x^3 - 5x + 2)\frac{d}{dx}(2x^4 + 7) + (2x^4 + 7)\frac{d}{dx}(7x^3 - 5x + 2)$$
$$= (7x^3 - 5x + 2)(8x^3) + (2x^4 + 7)(21x^2 - 5).$$

Como debemos calcular $f'(x)$ cuando $x = 1$, *no hay necesidad de simplificar* $f'(x)$ *antes de evaluarla.* Al sustituir en $f'(x)$, se obtiene

$$f'(1) = 4(8) + 9(16) = 176.$$

■

La regla del producto (y la regla del cociente que sigue) no debe aplicarse cuando está disponible un método más directo y eficiente.

Por lo general, no empleamos la regla del producto cuando es obvio un procedimiento más sencillo. Por ejemplo, si $f(x) = 2x(x + 3)$, entonces es más rápido escribir $f(x) = 2x^2 + 6x$, donde $f'(x) = 4x + 6$. De la misma manera, no empleamos usualmente la regla del producto para diferenciar $y = 4(x^2 - 3)$. Como el 4 es un factor constante, según la regla del factor constante sabemos que $y' = 4(2x) = 8x$.

La regla siguiente se usa para diferenciar un *cociente* de dos funciones.

Regla 6 Regla del cociente

Si f y g son funciones diferenciables y $g(x) \neq 0$, entonces el cociente f/g es también diferenciable y

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Esto es, la derivada del cociente de dos funciones es el denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, todo ello dividido entre el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}(\text{cociente})$$
$$= \frac{(\text{denominador})\begin{pmatrix}\text{derivada del}\\ \text{numerador}\end{pmatrix} - (\text{numerador})\begin{pmatrix}\text{derivada del}\\ \text{denominador}\end{pmatrix}}{(\text{denominador})^2}.$$

■ ***Principios en práctica 2***

Derivada de un producto sin la regla del producto

Un hora después de que se le dan a un persona x miligramos de cierto fármaco, el cambio en la temperatura del cuerpo, $T(x)$, en grados Fahrenheit, está dado de manera aproximada por $T(x) = x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right)$. La razón a la cual T cambia con respecto al tamaño de la dosis x, $T'(x)$, se denomina *sensibilidad* del cuerpo a la dosis. Determine la sensibilidad cuando la dosis es de 1 miligramo. No utilice la regla del producto.

Demostración. Si $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces

$$F(x)g(x) = f(x).$$

Por la regla del producto,

$$F(x)g'(x) + g(x)F'(x) = f'(x).$$

Al despejar $F'(x)$, obtenemos

$$F'(x) = \frac{f'(x) - F(x)g'(x)}{g(x)}.$$

Pero $F(x) = f(x)/g(x)$. Así,

$$F'(x) = \frac{f'(x) - \dfrac{f(x)g'(x)}{g(x)}}{g(x)}.$$

Al simplificar[10] se obtiene

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

EJEMPLO 5 Aplicación de la regla del cociente

Si $F(x) = \dfrac{4x^2 + 3}{2x - 1}$, *encontrar* $F'(x)$.

Solución:

Estrategia: consideramos a F como un cociente y aplicamos la regla del cociente.

Sea $f(x) = 4x^2 + 3$ y $g(x) = 2x - 1$. Entonces

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$= \frac{\overbrace{(2x - 1)}^{\text{Denominador}}\overbrace{\frac{d}{dx}(4x^2 + 3)}^{\text{Derivada de numerador}} - \overbrace{(4x^2 + 3)}^{\text{Numerador}}\overbrace{\frac{d}{dx}(2x - 1)}^{\text{Derivada de denominador}}}{\underbrace{(2x - 1)^2}_{\text{Cuadrado del denominador}}}$$

[10]Habrá observado que esta prueba supone la existencia de $F'(x)$. Sin embargo, esta regla puede demostrarse sin tal hipótesis.

$$= \frac{(2x - 1)(8x) - (4x^2 + 3)(2)}{(2x - 1)^2}$$

$$= \frac{8x^2 - 8x - 6}{(2x - 1)^2} = \frac{2(4x^2 - 4x - 3)}{(2x - 1)^2}.$$



Advertencia La derivada del cociente de dos funciones **no** es el cociente de sus derivadas. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2 + 3}{2x - 1}\right) \neq \frac{\frac{d}{dx}(4x^2 + 3)}{\frac{d}{dx}(2x - 1)} = \frac{8x}{2}.$$

EJEMPLO 6 Transformar antes de diferenciar

Diferenciar $y = \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x + 1}}$.

Solución:

Estrategia: para simplificar la diferenciación reescribimos la función de manera que ninguna fracción aparezca en el denominador.

Tenemos

$$y = \frac{1}{x + \dfrac{1}{x + 1}} = \frac{1}{\dfrac{x(x + 1) + 1}{x + 1}} = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + x + 1)(1) - (x + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \qquad \text{(regla del cociente)}$$

$$= \frac{(x^2 + x + 1) - (2x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 2x}{(x^2 + x + 1)^2} = -\frac{x^2 + 2x}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Aunque una función puede tener la forma de un cociente, esto no implica necesariamente que se deba usar la regla del cociente para encontrar su derivada. El ejemplo siguiente ilustra situaciones representativas donde, si bien puede emplearse la regla del cociente, se dispone de un procedimiento más sencillo y eficiente.

EJEMPLO 7 Diferenciación de cocientes sin usar la regla del cociente

Diferenciar las funciones siguientes.

a. $f(x) = \dfrac{2x^3}{5}$.

Solución: reescribimos la función para tener $f(x) = \frac{2}{5}x^3$. Por la regla del factor constante,

$$f'(x) = \frac{2}{5}(3x^2) = \frac{6x^2}{5}.$$

b. $f(x) = \dfrac{4}{7x^3}$.

Solución: reescribimos la función para tener $f(x) = \frac{4}{7}(x^{-3})$. Entonces,

$$f'(x) = \frac{4}{7}(-3x^{-4}) = -\frac{12}{7x^4}.$$

c. $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3x}{4x}$.

Solución: reescribimos la función en la forma $f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{5x^2 - 3x}{x}\right) = \frac{1}{4}(5x - 3)$. Por lo que,

$$f'(x) = \frac{1}{4}(5) = \frac{5}{4}.$$



Advertencia Para diferenciar $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$, podríamos intentar primero reescribir el cociente como $(x^2 - 2)^{-1}$. Sería un error hacer esto, ya que, por el momento, no tenemos una regla para diferenciar esa forma. En resumen, no hay elección, sino utilizar la regla del cociente. Sin embargo, en la sección siguiente, desarrollaremos una regla que nos permitirá diferenciar $(x^2 - 2)^{-1}$ de una manera directa y eficiente.

EJEMPLO 8 Ingreso marginal

Si la ecuación de la demanda del producto de un fabricante es

$$p = \frac{1000}{q + 5},$$

donde p está en dólares, encontrar la función de ingreso marginal y evaluarla cuando $q = 45$.

Solución:

Estrategia: primero debemos encontrar la función de ingreso. El ingreso r recibido por vender q unidades cuando el precio por unidad es p, está dado por

$$\textbf{ingreso} = (\textbf{precio})\,(\textbf{cantidad}), \quad \text{o} \quad \boldsymbol{r = pq}.$$

Usando la ecuación de demanda, expresaremos r sólo en términos de q. Luego diferenciaremos para encontrar la función de ingreso marginal, dr/dq.

La función de ingreso es

$$r = \left(\frac{1000}{q + 5}\right)q = \frac{1000q}{q + 5}.$$

Así, la función de ingreso marginal está dada por

$$\frac{dr}{dq} = \frac{(q+5)\frac{d}{dq}(1000q) - (1000q)\frac{d}{dq}(q+5)}{(q+5)^2}$$
$$= \frac{(q+5)(1000) - (1000q)(1)}{(q+5)^2} = \frac{5000}{(q+5)^2},$$

y

$$\left.\frac{dr}{dq}\right|_{q=45} = \frac{5000}{(45+5)^2} = \frac{5000}{2500} = 2.$$

Esto significa que vender una unidad adicional por arriba de 45 resulta en aproximadamente $2 más de ingreso.

Función de consumo

Una función que desempeña un papel importante en el análisis económico es la **función de consumo,** o $C = f(I)$ la que expresa una relación entre el ingreso nacional total, I, y el consumo nacional total, C. Por lo general, tanto I como C se expresan en miles de millones de dólares e I se restringe a cierto intervalo. La *propensión marginal al consumo* se define como la razón de cambio del consumo con respecto al ingreso, y es la derivada de C con respecto a I:

$$\text{Propensión marginal al consumo} = \frac{dC}{dI}.$$

Si suponemos que la diferencia entre el ingreso I y el consumo C es el ahorro S, entonces

$$S = I - C.$$

Al diferenciar ambos miembros de la ecuación con respecto a I obtenemos

$$\frac{dS}{dI} = \frac{d}{dI}(I) - \frac{d}{dI}(C) = 1 - \frac{dC}{dI}.$$

Definimos dS/dI como la **propensión marginal al ahorro.** Así, la propensión marginal al ahorro indica qué tan rápido cambia el ahorro con respecto al ingreso.

$$\begin{matrix}\text{Propensión marginal} \\ \text{al ahorro}\end{matrix} = 1 - \begin{matrix}\text{Propensión marginal} \\ \text{al consumo}\end{matrix}.$$

EJEMPLO 9 Determinación de las propensiones marginales al consumo y al ahorro

Si la función de consumo está dada por

$$C = \frac{5(2\sqrt{I^3}+3)}{I+10},$$

determinar la propensión marginal al consumo y al ahorro cuando $I = 100$.

Solución:

$$\frac{dC}{dI} = 5\left[\frac{(I + 10)\frac{d}{dI}(2I^{3/2} + 3) - (2\sqrt{I^3} + 3)\frac{d}{dI}(I + 10)}{(I + 10)^2}\right]$$

$$= 5\left[\frac{(I + 10)(3I^{1/2}) - (2\sqrt{I^3} + 3)(1)}{(I + 10)^2}\right].$$

Cuando $I = 100$, la propensión marginal al consumo es

$$\left.\frac{dC}{dI}\right|_{I=100} = 5\left[\frac{1297}{12{,}100}\right] \approx 0.536.$$

La propensión marginal al ahorro cuando $I = 100$ es $1 - 0.536 = 0.464$. Esto significa que si un ingreso actual de \$100,000 millones aumenta en \$1000 millones, la nación consume aproximadamente el 53.6% (536/1000) y ahorra 46.4% (464/1000) de ese incremento.

Ejercicio 10.5

En los problemas del 1 al 48 diferencie las funciones.

1. $f(x) = (4x + 1)(6x + 3)$.
2. $f(x) = (3x - 1)(7x + 2)$.
3. $s(t) = (8 - 7t)(t^2 - 2)$.
4. $Q(x) = (5 - 2x)(x^2 + 1)$.
5. $f(r) = (3r^2 - 4)(r^2 - 5r + 1)$.
6. $C(I) = (2I^2 - 3)(3I^2 - 4I + 1)$.
7. $f(x) = x^2(2x^2 - 5)$.
8. $f(x) = 3x^3(x^2 - 2x + 2)$.
9. $y = (x^2 + 3x - 2)(2x^2 - x - 3)$.
10. $y = (2 - 3x + 4x^2)(1 + 2x - 3x^2)$.
11. $f(w) = (8w^2 + 2w - 3)(5w^3 + 2)$.
12. $f(x) = (3x - x^2)(3 - x - x^2)$.
13. $y = (x^2 - 1)(3x^3 - 6x + 5) - 4(4x^2 + 2x + 1)$.
14. $h(x) = 4(x^5 - 3) + 3(8x^2 - 5)(2x + 2)$.
15. $f(p) = \frac{3}{2}(\sqrt{p} - 4)(4p - 5)$.
16. $g(x) = (\sqrt{x} - 3x + 1)(\sqrt[4]{x} - 2\sqrt{x})$.
17. $y = 7 \cdot \frac{2}{3}$.
18. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
19. $y = (2x - 1)(3x + 4)(x + 7)$.
20. $y = \dfrac{2x - 3}{4x + 1}$.
21. $f(x) = \dfrac{5x}{x - 1}$.
22. $f(x) = \dfrac{-2x}{4 - x}$.
23. $f(x) = \dfrac{3}{2x^6}$.
24. $f(x) = \dfrac{5(x^2 - 2)}{7}$.
25. $y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$.
26. $h(w) = \dfrac{3w^2 + 5w - 1}{w - 3}$.
27. $h(z) = \dfrac{6 - 2z}{z^2 - 4}$.
28. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x^2 + x + 7}$.
29. $y = \dfrac{8x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x}$.
30. $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$.
31. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 3x + 2}$.
32. $F(z) = \dfrac{z^4 + 4}{3z}$.
33. $g(x) = \dfrac{1}{x^{100} + 7}$.
34. $y = \dfrac{3}{7x^3}$.
35. $u(v) = \dfrac{v^5 - 8}{v}$.
36. $y = \dfrac{x - 5}{8\sqrt{x}}$.

37. $y = \dfrac{3x^2 - x - 1}{\sqrt[3]{x}}$.

38. $y = \dfrac{x^{0.3} - 2}{2x^{2.1} + 1}$.

39. $y = 7 - \dfrac{4}{x - 8} + \dfrac{2x}{3x + 1}$.

40. $q(x) = 13x^2 + \dfrac{x - 1}{2x + 3} - \dfrac{4}{x}$.

41. $y = \dfrac{x - 5}{(x + 2)(x - 4)}$.

42. $y = \dfrac{(9x - 1)(3x + 2)}{4 - 5x}$.

43. $s(t) = \dfrac{t^2 + 3t}{(t^2 - 1)(t^3 + 7)}$.

44. $f(s) = \dfrac{17}{s(5s^2 - 10s + 4)}$.

45. $y = 3x - \dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x - 1}}{x - 2}$.

46. $y = 7 - 10x^2 + \dfrac{1 - \dfrac{7}{x^2 + 3}}{x + 2}$.

47. $f(x) = \dfrac{a - x}{a + x}$, donde a es una constante.

48. $f(x) = \dfrac{x^{-1} + a^{-1}}{x^{-1} - a^{-1}}$, donde a es una constante.

49. Encuentre la pendiente de la curva

$$y = (4x^2 + 2x - 5)(x^3 + 7x + 4)$$

en $(-1, 12)$.

50. Encuentre la pendiente de la curva

$$y = \frac{x^3}{x^4 + 1} \text{ en } (-1, -\tfrac{1}{2}).$$

En los problemas del 51 al 54 encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

51. $y = \dfrac{6}{x - 1}$; $(3, 3)$.

52. $y = \dfrac{4x + 5}{x^2}$; $(-1, 1)$.

53. $y = (2x + 3)[2(x^4 - 5x^2 + 4)]$; $(0, 24)$.

54. $y = \dfrac{x + 1}{x^2(x - 4)}$; $(2, -\tfrac{3}{8})$.

En los problemas 55 y 56 determine la razón de cambio relativa de y con respecto a x, para el valor dado de x.

55. $y = \dfrac{x}{2x - 6}$; $x = 1$.

56. $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$; $x = 5$.

---

57. Movimiento La función de posición de un objeto que se mueve en línea recta es

$$s = \frac{2}{t^3 + 1},$$

donde t está en segundos y s en metros. Encuentre la posición y la velocidad del objeto en $t = 1$.

58. Movimiento La función de posición de un objeto que se mueve en línea recta es

$$s = \frac{t + 2}{t^2 + 12},$$

donde t está en segundos y s en metros. Encuentre el o los valores positivos de t para los cuales la velocidad del objeto es 0.

En los problemas del 59 al 62 cada ecuación representa una función de demanda para cierto producto, donde p denota el precio por unidad para q unidades. En cada caso, encuentre la función de ingreso marginal. Recuerde que ingreso = pq.

59. $p = 25 - 0.02q$.

60. $p = 500/q$.

61. $p = \dfrac{108}{q + 2} - 3$.

62. $p = \dfrac{q + 750}{q + 50}$.

---

63. Función de consumo Para Estados Unidos (1922-1942), la función de consumo se estimó por medio de la ecuación[11]

$$C = 0.672I + 113.1.$$

Encuentre la propensión marginal al consumo.

64. Función de consumo Repita el problema 63 si $C = 0.712I + 95.05$, para Estados Unidos en el periodo 1929-1941.[12]

[11] T. Haavelmo, "Methods of Measuring the Marginal Propensity to Consume", *Journal of the American Statistical Association*, XLII (1947), 105-122.

[12] Ibid.

En los problemas del 65 al 68 cada ecuación representa una función de consumo. Encuentre la propensión marginal al consumo y al ahorro para el valor dado de I.

65. $C = 2 + 2\sqrt{I}$; $I = 16$.

66. $C = 6 + \frac{3I}{4} - \frac{\sqrt{I}}{3}$; $I = 25$.

67. $C = \frac{16\sqrt{I} + 0.8\sqrt{I^3} - 0.2I}{\sqrt{I} + 4}$; $I = 36$.

68. $C = \frac{20\sqrt{I} + 0.5\sqrt{I^3} - 0.4I}{\sqrt{I} + 5}$; $I = 100$.

---

69. Función de consumo Suponga que la función de consumo de un país está dada por

$$C = \frac{10\sqrt{I} + 0.7\sqrt{I^3} - 0.2I}{\sqrt{I}},$$

donde C e I están en miles de millones de dólares.

a. Encuentre la propensión marginal al ahorro cuando el ingreso es de 25,000 millones de dólares.
b. Determine la razón de cambio relativa de C con respecto a I, cuando el ingreso es de 25,000 millones de dólares.

70. Propensiones marginales a consumir y a ahorrar Suponga que la función de ahorro de un país es

$$S = \frac{I - \sqrt{I} - 6}{\sqrt{I} + 2},$$

donde el ingreso nacional (I) y el ahorro nacional (S) se miden en miles de millones de dólares. Encuentre la propensión marginal del país a consumir y su propensión marginal al ahorro, cuando el ingreso nacional es de 125,000 millones [S*ugerencia:* puede ser útil factorizar primero el numerador].

71. Costo marginal Si la función de costo total de un fabricante está dada por

$$c = \frac{5q^2}{q + 3} + 5000,$$

encuentre la función de costo marginal.

72. Costo marginal y costo promedio Dada la función de costo $c = f(q)$, demuestre que si $\frac{d}{dq}(\bar{c}) = 0$, entonces la función de costo marginal y la de costo promedio son iguales.

73. Relación huésped-parásito Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad de huéspedes (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de huéspedes que tienen parásitos es y, donde

$$y = \frac{900x}{10 + 45x}.$$

¿A qué razón está cambiando el número de huéspedes que tienen parásitos con respecto a la densidad de huéspedes cuando $x = 2$?

74. Acústica La persistencia del sonido en un recinto después de que la fuente del sonido se ha apagado se llama *reverberación*. El *tiempo de reverberación* RT del recinto, es el necesario para que el nivel de intensidad del sonido caiga a 60 decibeles. En el diseño acústico de un auditorio, puede utilizarse la fórmula siguiente para calcular el RT del recinto:[13]

$$\text{RT} = \frac{0.05V}{A + xV}.$$

Aquí, V es el volumen del recinto, A la absorción total de éste y x el coeficiente de absorción del aire. Suponiendo que A y x son constantes positivas, demuestre que la razón de cambio de RT con respecto al V siempre es positiva. Si el volumen total del recinto se incrementa en una unidad, ¿aumenta o disminuye el tiempo de reverberación?

75. Depredador-presa En un experimento[14] que estudiaba la relación depredador-presa, se determinó de manera estadística que el número de presas consumidas, y, por un depredador individual, es una función de la densidad x de presas (el número de presas por unidad de área), donde

$$y = \frac{0.7355x}{1 + 0.02744x}.$$

Determine la razón de cambio de las presas consumidas con respecto a su densidad.

76. Beneficios de seguridad social En un análisis de los beneficios de la seguridad social, Feldstein[15] diferencia una función de la forma

$$f(x) = \frac{a(1 + x) - b(2 + n)x}{a(2 + n)(1 + x) - b(2 + n)x},$$

donde a, b y n son constantes. Él determina que

$$f'(x) = \frac{-1(1 + n)ab}{[a(1 + x) - bx]^2(2 + n)}.$$

Verifique esto. [*Sugerencia:* por conveniencia, haga $2 + n = c$.]

---

[13] L. L. Doelle, *Environmental Acoustics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1972).
[14] C. S. Hollin, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, XCI, núm. 7 (1959), 385-398.
[15] M. Feldstein, "The Optimal Level of Social Security Benefits", *The Quarterly Journal of Economics*, C, núm. 2 (1985), 303-320.

77. **Negocios** El fabricante de un producto encontró que cuando se producen 20 unidades por día, el costo promedio es de \$150 y el costo marginal de \$125. ¿Cuál es la razón de cambio relativa del costo promedio con respecto a la cantidad, cuando $q = 20$?

78. Si y es el producto de tres funciones diferenciables, esto es,

$$y = f(x)g(x)h(x),$$

demuestre que dy/dx está dada por

$$f(x)g(x)h'(x) + f(x)g'(x)h(x) + f'(x)g(x)h(x).$$

79. Utilice el resultado del problema 78 para encontrar dy/dx si

$$y = (2x - 1)(x - 2)(x + 3).$$

OBJETIVO Introducir y aplicar la regla de la cadena, derivar la regla de la potencia como un caso especial de la regla de la cadena y desarrollar el concepto de producto del ingreso marginal como una aplicación de la regla de la cadena.

10.6 La regla de la cadena y la regla de la potencia

Nuestra siguiente regla, *la regla de la cadena*, es una de las más importantes para obtener derivadas. Implica una situación en la que y es una función de la variable u, pero u es una función de x y queremos encontrar la derivada de y con respecto a x. Por ejemplo, las ecuaciones

$$y = u^2 \quad \text{y} \quad u = 2x + 1$$

definen a y como una función de u y a u como una función de x. Si sustituimos u por $2x + 1$, en la primera ecuación, podemos considerar a y como función de x:

$$y = (2x + 1)^2.$$

Para encontrar dy/dx primero desarrollamos $(2x + 1)^2$:

$$y = 4x^2 + 4x + 1.$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = 8x + 4.$$

En este ejemplo, puede verse que encontrar dy/dx efectuando primero una sustitución, puede ser bastante complicado. Por ejemplo, si hubiésemos tenido $y = u^{100}$ en vez de $y = u^2$, ni siquiera intentaríamos efectuar la sustitución. Por fortuna, la regla de la cadena nos permite manejar tales situaciones con facilidad.

Regla 7 Regla de la cadena

Si y es una función diferenciable de u y u es una función diferenciable de x, entonces y es una función diferenciable de x, y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Podemos mostrar por qué la regla de la cadena es razonable considerando razones de cambio. Supongamos

$$y = 8u + 5 \quad \text{y} \quad u = 2x - 3.$$

Hagamos que x cambie en una unidad. ¿Cómo cambia u? Para responder esta pregunta, derivamos y encontramos que $du/dx = 2$. Pero, para *cada* cambio de una unidad en u hay un cambio en y de $dy/du = 8$. Por tanto, ¿cuál es el cambio en y si x cambia en una unidad; esto es, ¿qué valor tiene dy/dx? La respuesta es $8 \cdot 2$, lo cual es $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. Así, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Ahora utilizaremos la regla de la cadena para volver a resolver el problema planteado al principio de esta sección. Si

$$y = u^2 \quad \text{y} \quad u = 2x + 1,$$

entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(u^2) \cdot \frac{d}{dx}(2x + 1)$$
$$= (2u)2 = 4u.$$

Reemplazando u por $2x + 1$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x + 1) = 8x + 4,$$

que concuerda con nuestro resultado previo.

■ *Principios en práctica 1*
Uso de la regla de la cadena

Si un objeto se mueve de manera horizontal de acuerdo con $x = 6t$, en donde t está en segundos, y de manera vertical de acuerdo con $y = 4x^2$, determine su velocidad vertical $\frac{dy}{dt}$.

EJEMPLO 1 Uso de la regla de la cadena

a. *Si* $y = 2u^2 - 3u - 2$ *y* $u = x^2 + 4$, *encontrar* dy/dx.

Solución: por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(2u^2 - 3u - 2) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 4)$$
$$= (4u - 3)(2x).$$

Podemos escribir la respuesta sólo en términos de x, reemplazando u por $x^2 + 4$.

$$\frac{dy}{dx} = [4(x^2 + 4) - 3](2x) = [4x^2 + 13](2x) = 8x^3 + 26x.$$

b. *Si* $y = \sqrt{w}$ y $w = 7 - t^3$, *encontrar* dy/dt.

Solución: aquí y es una función de w y w es una función de t, por lo que podemos considerar a y como una función de t. Por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dt} = \frac{d}{dw}(\sqrt{w}) \cdot \frac{d}{dt}(7 - t^3)$$
$$= \left(\frac{1}{2}w^{-1/2}\right)(-3t^2) = \frac{1}{2\sqrt{w}}(-3t^2)$$
$$= -\frac{3t^2}{2\sqrt{w}} = -\frac{3t^2}{2\sqrt{7 - t^3}}.$$

EJEMPLO 2 Uso de la regla de la cadena

Si $y = 4u^3 + 10u^2 - 3u - 7$ *y* $u = 4/(3x - 5)$, *encontrar* dy/dx *cuando* $x = 1$.

Solución: por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(4u^3 + 10u^2 - 3u - 7) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3x - 5}\right)$$

$$= (12u^2 + 20u - 3) \cdot \frac{(3x-5)\frac{d}{dx}(4) - 4\frac{d}{dx}(3x-5)}{(3x-5)^2}$$

$$= (12u^2 + 20u - 3) \cdot \frac{-12}{(3x-5)^2}.$$

No reemplace simplemente x por 1 y deje su respuesta en términos de u.

No obstante que dy/dx está en términos de x y u, podemos evaluarla cuando $x = 1$, si determinamos el valor correspondiente de u. Cuando $x = 1$, tenemos

$$u = \frac{4}{3(1) - 5} = -2.$$

Por tanto,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = [12(-2)^2 + 20(-2) - 3] \cdot \frac{-12}{[3(1) - 5]^2}$$
$$= 5 \cdot (-3) = -15.$$

La regla de la cadena establece que si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

En realidad, la regla de la cadena se aplica a una composición de funciones porque

$$y = f(u) = f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

Así y, como función de x, es $f \circ g$. Esto significa que podemos utilizar la regla de la cadena para diferenciar una función cuando identificamos a la función como una composición. Sin embargo, primero debemos descomponer la función en sus partes componentes.

Por ejemplo, para diferenciar

$$y = (x^3 - x^2 + 6)^{100},$$

consideramos la función como una composición. Sea

$$y = f(u) = u^{100} \quad \text{y} \quad u = g(x) = x^3 - x^2 + 6.$$

Entonces $y = (x^3 - x^2 + 6)^{100} = [g(x)]^{100} = f(g(x))$. Ahora que tenemos una composición, diferenciamos. Como $y = u^{100}$ y $u = x^3 - x^2 + 6$, por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= (100u^{99})(3x^2 - 2x)$$
$$= 100(x^3 - x^2 + 6)^{99}(3x^2 - 2x).$$

Acabamos de utilizar la regla de la cadena para diferenciar $y = (x^3 - x^2 + 6)^{100}$, que es una potencia de una *función* de x. La regla siguiente, llamada *regla de la potencia*, generaliza nuestro resultado y es un caso especial de la regla de la cadena.

Regla 8 Regla de la potencia

Si u es una función diferenciable de x y n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

Demostración. Sea $y = u^n$. Como y es una función diferenciable de u y u es una función diferenciable de x, la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Pero $dy/du = nu^{n-1}$. Por lo que,

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx},$$

que es la regla de la potencia.

Otra manera de escribir la fórmula de la regla de la potencia es

$$\frac{d}{dx}([u(x)]^n) = n[u(x)]^{n-1}u'(x).$$

EJEMPLO 3 Uso de la regla de la potencia

Si $y = (x^3 - 1)^7$, encontrar y'.

Solución: como y es una potencia de una *función* de x, es aplicable la regla de la potencia. Si hacemos $u(x) = x^3 - 1$ y $n = 7$, tenemos

$$\begin{aligned} y' &= n[u(x)]^{n-1}u'(x) \\ &= 7(x^3 - 1)^{7-1}\frac{d}{dx}(x^3 - 1) \\ &= 7(x^3 - 1)^6(3x^2) = 21x^2(x^3 - 1)^6. \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Uso de la regla de la potencia

Si $y = \sqrt[3]{(4x^2 + 3x - 2)^2}$, encontrar dy/dx cuando $x = -2$.

Solución: como $y = (4x^2 + 3x - 2)^{2/3}$, utilizamos la regla de la potencia con

$$u = 4x^2 + 3x - 2$$

y $n = \frac{2}{3}$. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2}{3}(4x^2 + 3x - 2)^{(2/3)-1}\frac{d}{dx}(4x^2 + 3x - 2) \\ &= \frac{2}{3}(4x^2 + 3x - 2)^{-1/3}(8x + 3) \\ &= \frac{2(8x + 3)}{3\sqrt[3]{4x^2 + 3x - 2}}. \end{aligned}$$

Así,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = \frac{2(-13)}{3\sqrt[3]{8}} = -\frac{13}{3}.$$

EJEMPLO 5 Uso de la regla de la potencia

Si $y = \frac{1}{x^2 - 2}$, *encontrar* $\frac{dy}{dx}$.

La técnica utilizada en el ejemplo 5 con frecuencia se utiliza cuando el numerador de un cociente es una constante y el denominador no.

Solución: aunque la regla del cociente puede emplearse aquí, un procedimiento más eficiente es tratar el miembro derecho como la potencia $(x^2 - 2)^{-1}$ y utilizar la regla de la potencia. Sea $u = x^2 - 2$. Entonces $y = u^{-1}$ y

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= nu^{n-1}\frac{du}{dx}\\ &= (-1)(x^2-2)^{-1-1}\frac{d}{dx}(x^2-2)\\ &= (-1)(x^2-2)^{-2}(2x)\\ &= -\frac{2x}{(x^2-2)^2}.\end{aligned}$$

En el ejemplo 5, la técnica de pasar el denominador al numerador, no se utiliza comúnmente cuando el numerador y el denominador de un cociente contienen variables. Por ejemplo, no escribiríamos

$$\frac{x^2+1}{x^2-2} \quad \text{como} \quad (x^2+1)(x^2-2)^{-1},$$

por la razón siguiente: al usar la regla del cociente en la primera forma, se obtiene una expresión que puede simplificarse con facilidad, pero al usar la regla del producto en la segunda forma, resulta una suma de términos con exponentes negativos que no se pueden simplificar con facilidad.

EJEMPLO 6 Diferenciación de una potencia de un cociente

Si $z = \left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right)^4$, *encontrar* $\frac{dz}{ds}$.

Aquí, el problema es reconocer la forma básica de la función por diferenciar. En este caso es una potencia, no un cociente.

Solución: como z es una potencia de una función, utilizamos primero la regla de la potencia:

$$\frac{dz}{ds} = 4\left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right)^{4-1}\frac{d}{ds}\left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right).$$

Ahora empleamos la regla del cociente:

$$\frac{dz}{ds} = 4\left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right)^{3}\left[\frac{(s^2+1)(2)-(2s+5)(2s)}{(s^2+1)^2}\right].$$

Al simplificar, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dz}{ds} &= 4\cdot\frac{(2s+5)^3}{(s^2+1)^3}\left[\frac{-2s^2-10s+2}{(s^2+1)^2}\right]\\ &= -\frac{8(s^2+5s-1)(2s+5)^3}{(s^2+1)^5}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Diferenciación de un producto de potencias

Si $y = (x^2 - 4)^5(3x + 5)^4$, *encontrar* y'.

Solución: como y es un producto, aplicamos primero la regla del producto

$$y' = (x^2 - 4)^5 \frac{d}{dx}[(3x + 5)^4] + (3x + 5)^4 \frac{d}{dx}[(x^2 - 4)^5].$$

Empleamos ahora la regla de la potencia:

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 - 4)^5[4(3x + 5)^3(3)] + (3x + 5)^4[5(x^2 - 4)^4(2x)] \\ &= 12(x^2 - 4)^5(3x + 5)^3 + 10x(3x + 5)^4(x^2 - 4)^4. \end{aligned}$$

Al diferenciar un producto en el que al menos un factor es una potencia, simplificar la derivada, por lo general, implica factorizar.

Para simplificar, primero eliminamos los factores comunes:

$$\begin{aligned} y' &= 2(x^2 - 4)^4(3x + 5)^3[6(x^2 - 4) + 5x(3x + 5)] \\ &= 2(x^2 - 4)^4(3x + 5)^3(21x^2 + 25x - 24). \end{aligned}$$

Usualmente, la regla de la potencia se emplearía para diferenciar $y = [u(x)]^n$. Aunque una función como $y = (x^2 + 2)^2$ puede escribirse como $y = x^4 + 4x^2 + 4$, y diferenciarse con facilidad, este procedimiento no es práctico para una función como $y = (x^2 + 2)^{1000}$. Como $y = (x^2 + 2)^{1000}$ es de la forma $y = [u(x)]^n$, tenemos que

$$y' = 1000(x^2 + 2)^{999}(2x).$$

Producto del ingreso marginal

Usemos ahora lo que hemos aprendido del cálculo para desarrollar un concepto de importancia en el estudio de la economía. Supongamos que un fabricante emplea m personas para producir un total de q unidades de un producto por día. Podemos pensar que q es una función de m. Si r es el ingreso total que el fabricante recibe al vender esas unidades, entonces r también puede considerarse una función de m. Así, podemos ver a dr/dm como la razón de cambio del ingreso con respecto al número de empleados. La derivada dr/dm se llama **producto del ingreso marginal,** y es aproximadamente igual al cambio en el ingreso que resulta cuando un fabricante emplea un trabajador adicional.

EJEMPLO 8 Producto del ingreso marginal

Un fabricante determina que m empleados producirán un total de q unidades de un producto por día, donde

$$q = \frac{10m^2}{\sqrt{m^2 + 19}}. \qquad (1)$$

Si la ecuación de demanda para el producto es $p = 900/(q + 9)$, *determinar el producto del ingreso marginal cuando* $m = 9$.

Solución: debemos encontrar dr/dm, donde r es el ingreso. Observe que por la regla de la cadena,

$$\frac{dr}{dm} = \frac{dr}{dq} \cdot \frac{dq}{dm}.$$

Así, debemos encontrar dr/dq y dq/dm cuando $m = 9$. Comenzamos con dr/dq. La función de ingreso está dada por

$$r = pq = \left(\frac{900}{q+9}\right)q = \frac{900q}{q+9}, \tag{2}$$

por lo que, por la regla del cociente,

$$\frac{dr}{dq} = \frac{(q+9)(900) - 900q(1)}{(q+9)^2} = \frac{8100}{(q+9)^2}.$$

Para evaluar esta expresión cuando $m = 9$, utilizamos primero la ecuación $q = 10m^2/\sqrt{m^2+19}$ para encontrar el valor correspondiente de q:

$$q = \frac{10(9)^2}{\sqrt{9^2+19}} = 81.$$

De aquí que,

$$\left.\frac{dr}{dq}\right|_{m=9} = \left.\frac{dr}{dq}\right|_{q=81} = \frac{8100}{(81+9)^2} = 1.$$

Ahora calculamos dq/dm. De las reglas del cociente y la potencia se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dm} &= \frac{d}{dm}\left(\frac{10m^2}{\sqrt{m^2+19}}\right)\\ &= \frac{(m^2+19)^{1/2}\frac{d}{dm}(10m^2) - (10m^2)\frac{d}{dm}[(m^2+19)^{1/2}]}{[(m^2+19)^{1/2}]^2}\\ &= \frac{(m^2+19)^{1/2}(20m) - (10m^2)[\frac{1}{2}(m^2+19)^{-1/2}(2m)]}{m^2+19},\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\left.\frac{dq}{dm}\right|_{m=9} &= \frac{(81+19)^{1/2}(20\cdot 9) - (10\cdot 81)[\frac{1}{2}(81+19)^{-1/2}(2\cdot 9)]}{81+19}\\ &= 10.71.\end{aligned}$$

Una fórmula directa para obtener el producto del ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dm} = \frac{dq}{dm}\left(p + q\frac{dp}{dq}\right).$$

Por tanto, de la regla de la cadena,

$$\left.\frac{dr}{dm}\right|_{m=9} = (1)(10.71) = 10.71.$$

Esto significa que si se emplea a un décimo trabajador, el ingreso aumentará en aproximadamente \$10.71 por día.

■

Tecnología

En el ejemplo 8 el producto del ingreso marginal, dr/dm, se encontró utilizando la regla de la cadena. Otro método, que se adapta muy bien a las calculadoras gráficas, consiste en utilizar la sustitución para expresar r como una función de m y luego diferenciar de manera directa. Primero tomamos la ecuación (1) y sustituimos q en la función de ingreso, ecuación (2); esto nos da r en función de m. Los detalles son: en nuestro menú de funciones introducimos

$$Y_1 = 10X\text{^}2/\sqrt{(X\text{^}2+19)},$$

$$Y_2 = 900Y_1/(Y_1 + 9).$$

Y_2 expresa el ingreso en función del número de empleados. Por último, para encontrar el producto del ingreso marginal cuando $m = 9$, calculamos nDeriv(Y_2,X,9). Debe verificar que este método da (aproximadamente) el valor 10.71.

Ejercicio 10.6

En los problemas del 1 al 8 utilice la regla de la cadena.

1. Si $y = u^2 - 2u$ y $u = x^2 - x$, encontrar dy/dx.

2. Si $y = 2u^3 - 8u$ y $u = 7x - x^3$, encontrar dy/dx.

3. Si $y = \frac{1}{w^2}$ y $w = 2 - x$, encontrar dy/dx.

4. Si $y = \sqrt[3]{z}$ y $z = x^6 - x^2 + 1$, encontrar dy/dx.

5. Si $w = u^2$ y $u = \frac{t+1}{t-1}$, encontrar dw/dt cuando $t = 3$.

6. Si $z = u^2 + \sqrt{u} + 9$ y $u = 2s^2 - 1$, encontrar dz/ds cuando $s = -1$.

7. Si $y = 3w^2 - 8w + 4$ y $w = 2x^2 + 1$, encontrar dy/dx cuando $x = 0$.

8. Si $y = 3u^3 - u^2 + 7u - 2$ y $u = 5x - 2$, encontrar dy/dx cuando $x = 1$.

En los problemas del 9 al 52 encuentre y′.

9. $y = (3x + 2)^6$.
10. $y = (x^2 - 4)^4$.
11. $y = (5 - x^2)^3$.
12. $y = (x^2 - x)^3$.

13. $y = 2(x^3 - 8x^2 + x)^{100}$.
14. $y = \frac{(2x^2 + 1)^4}{2}$.
15. $y = (x^2 - 2)^{-3}$.
16. $y = (3x^2 - 5x)^{-10}$.

17. $y = 3(2x^2 - 3x - 1)^{-10/3}$.
18. $y = 4(7x - x^4)^{-3/2}$.
19. $y = \sqrt{5x^2 - x}$.
20. $y = \sqrt{3x^2 - 7}$.

21. $y = \sqrt[4]{2x - 1}$.
22. $y = \sqrt[3]{8x^2 - 1}$.
23. $y = 2\sqrt[5]{(x^3 + 1)^2}$.
24. $y = 3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}$.

25. $y = \frac{6}{2x^2 - x + 1}$.
26. $y = \frac{3}{x^4 + 2}$.
27. $y = \frac{1}{(x^2 - 3x)^2}$.
28. $y = \frac{1}{(1 - x)^3}$.

29. $y = \frac{2}{\sqrt{8x - 1}}$.
30. $y = \frac{3}{(3x^2 - x)^{2/3}}$.
31. $y = \sqrt[3]{7x} + \sqrt[3]{7}x$.
32. $y = \sqrt{2x} + \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

33. $y = x^2(x - 4)^5$.
34. $y = x(x + 4)^4$.
35. $y = 2x\sqrt{6x - 1}$.
36. $y = 2x\sqrt{1 - x}$.

37. $y = (x^2 + 2x - 1)^3(5x)$.
38. $y = x^2(x^3 - 1)^4$.
39. $y = (8x - 1)^3(2x + 1)^4$.

40. $y = (6x + 1)^7(2x - 3)^3$.
41. $y = \left(\frac{x - 7}{x + 4}\right)^{10}$.
42. $y = \left(\frac{2x}{x + 2}\right)^4$.
43. $y = \sqrt{\frac{x - 2}{x + 3}}$.

44. $y = \sqrt[3]{\frac{8x^2 - 3}{x^2 + 2}}$.
45. $y = \frac{2x - 5}{(x^2 + 4)^3}$.
46. $y = \frac{(2x + 3)^3}{x^2 + 4}$.
47. $y = \frac{(8x - 1)^5}{(3x - 1)^3}$.

48. $y = \sqrt{(x - 1)(x + 2)^3}$.
49. $y = 6(5x^2 + 2)\sqrt{x^4 + 5}$.
50. $y = 6 + 3x - 4x(7x + 1)^2$.

51. $y = 8t + \frac{t - 1}{t + 4} - \left(\frac{8t - 7}{4}\right)^2$.
52. $y = \frac{(4x^2 - 2)(8x - 1)}{(3x - 1)^2}$.

En los problemas 53 y 54 utilice las reglas del cociente y de la potencia para encontrar y′. No simplifique su respuesta.

53. $y = \frac{(2x + 1)(3x - 5)^2}{(x^2 - 7)^4}$.
54. $y = \frac{\sqrt{x + 2}(4x^2 - 1)^2}{9x - 3}$.

---

55. Si $y = (5u + 6)^3$ y $u = (x^2 + 1)^4$, encuentre dy/dx cuando $x = 0$.

56. Si $z = 2y^2 - 4y + 5$, $y = 6x - 5$, y $x = 2t$, encuentre dz/dt cuando $t = 1$.

57. Encuentre la pendiente de la curva $y = (x^2 - 7x - 8)^3$ en el punto $(8, 0)$.

58. Encuentre la pendiente de la curva $y = \sqrt{x + 1}$ en el punto $(8, 3)$.

En los problemas del 59 al 62 encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

59. $y = \sqrt[3]{(x^2 - 8)^2}$; $(3, 1)$.

60. $y = (2x + 3)^2$; $(-1, 1)$.

61. $y = \frac{\sqrt{7x + 2}}{x + 1}$; $(1, \frac{3}{2})$.

62. $y = \frac{-3}{(3x^2 + 1)^3}$; $(0, -3)$.

En los problemas 63 y 64 determine la razón de cambio porcentual de y con respecto a x para el valor dado de x.

63. $y = (x^2 + 9)^3$; $x = 4$.

64. $y = \dfrac{1}{(x^2 + 1)^2}$; $x = -3$.

En los problemas del 65 al 68, q es el número total de unidades producidas por día por m empleados de un fabricante, y p es el precio de venta por unidad. En cada caso encuentre el producto del ingreso marginal para el valor dado de m.

65. $q = 2m$, $p = -0.5q + 20$; $m = 5$.

66. $q = (200m - m^2)/20$, $p = -0.1q + 70$; $m = 40$.

67. $q = 10m^2/\sqrt{m^2 + 9}$, $p = 525/(q + 3)$; $m = 4$.

68. $q = 100m/\sqrt{m^2 + 19}$, $p = 4500/(q + 10)$; $m = 9$.

---

69. Ecuación de demanda Suponga que $p = 100 - \sqrt{q^2 + 20}$ es una ecuación de demanda para el producto de un fabricante. (a) Encuentre la razón de cambio de p con respecto a q. (b) Calcule la razón de cambio relativa de p con respecto a q. (c) Determine la función de ingreso marginal.

70. Producto de ingreso marginal Si $p = k/q$, donde k es una constante, es la ecuación de demanda para el producto de un fabricante, y $q = f(m)$ define una función que da el número total de unidades producidas al día por m empleados, demuestre que el producto del ingreso marginal es siempre igual a cero.

71. Función de costo El costo de producir q unidades de un producto está dado por

$$c = 4000 + 10q + 0.1q^2.$$

Si el precio de p unidades está dado por la ecuación

$$q = 800 - 2.5p,$$

utilice la regla de la cadena para encontrar la razón de cambio del costo con respecto al precio unitario cuando $p = 80$.

72. Altas de hospital En un centro de salud se examinaron las altas de un grupo de individuos que estuvieron hospitalizados por una enfermedad específica. Se encontró que la cantidad total de personas que fueron dadas de alta al final de t días de hospitalización estaba dada por

$$f(t) = 1 - \left(\frac{300}{300 + t}\right)^3.$$

Encuentre $f'(300)$ e interprete su respuesta.

73. Costo marginal Si la función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2 + 3}} + 5000,$$

encuentre la función de costo marginal.

74. Salario/educación Para cierta población, si E es el número de años de educación de una persona y S representa el salario anual promedio en dólares, entonces para $E \geq 7$,

$$S = 340E^2 - 4360E + 42{,}800.$$

(a) ¿Qué tan rápido estará cambiando el salario con respecto a la educación cuando $E = 16$? (b) ¿A qué nivel educativo la tasa de cambio del salario es igual a \$5000 por año de educación?

75. Biología El volumen V de una célula esférica está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio. En el tiempo t segundos, el radio r (en centímetros) está dado por

$$r = 10^{-8}t^2 + 10^{-7}t.$$

Utilice la regla de la cadena para encontrar dV/dt cuando $t = 10$.

76. Presión en tejidos vivos Bajo ciertas condiciones, la presión p desarrollada en los tejidos vivos por la radiación ultrasónica está dada como una función de la intensidad de la radiación por la ecuación[16]

$$p = (2\rho VI)^{1/2},$$

donde ρ (letra griega "rho") es la densidad del tejido afectado y V la velocidad de propagación de la radiación. Aquí ρ y V son constantes. (a) Encuentre la razón de cambio de p con respecto a I. (b) Encuentre la razón de cambio relativa de p con respecto a I.

77. Demografía Suponga que para cierto grupo de 20,000 nacimientos, el número de personas l_x que alcanzan a vivir x años es

$$l_x = -0.000356x^4 + 0.00446x^3 + 0.846x^2 - 34.8x + 20{,}000,$$

$$0 \leq x \leq 94.1.$$

(a) Encuentre la razón de cambio de l_x con respecto a x y evalúe su respuesta para $x = 36$. (b) Encuentre la razón de cambio relativa de l_x cuando $x = 36$. Redondee sus respuestas a tres decimales.

78. Contracción muscular Un músculo tiene la capacidad de contraerse al estar sometido a una carga, como un peso, que se le impone. La ecuación

$$(P + a)(v + b) = k$$

se llama "ecuación fundamental de la contracción muscular".[17] Aquí, P es la carga impuesta al músculo, v la velocidad de contracción de las fibras musculares y a,

---

[16] R. W. Stacy et al., *Essential of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

[17] Ibid.

b y k son constantes positivas. Exprese v en función de P. Utilice su resultado para encontrar dv/dP.

79. Economía Suponga que $pq = 100$ es la ecuación de demanda para el producto de un fabricante. Sea c el costo total y suponga que el costo marginal es 0.01 cuando $q = 200$. Utilice la regla de la cadena para encontrar dc/dp cuando $q = 200$.

80. Producto del ingreso marginal Un empresario que emplea m trabajadores encuentra que ellos producen

$$q = 2m(2m + 1)^{3/2}$$

unidades de producto diariamente. El ingreso total r (en dólares) está dado por

$$r = \frac{50q}{\sqrt{1000 + 3q}}.$$

a. ¿Cuál es el precio por unidad (al centavo más cercano) cuando hay 12 trabajadores?
b. Determine el ingreso marginal cuando hay 12 trabajadores.
c. Determine el producto del ingreso marginal cuando $m = 12$.

81. Suponga que $y = f(x)$, donde $x = g(t)$. Dado que $g(2) = 3$, $g'(2) = 4$, $f(2) = 5$, $f'(2) = 6$, $g(3) = 7$, $g'(3) = 8$, $f(3) = 9$ y $f'(3) = 10$, determine el valor de $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2}$.

82. Negocios Un fabricante determinó que para su producto el costo promedio diario (en cientos de dólares) está dado por

$$\bar{c} = \frac{324}{\sqrt{q^2 + 35}} + \frac{5}{q} + \frac{19}{18}.$$

a. Conforme la producción diaria crece, el costo promedio se aproxima a una cantidad constante. ¿Cuál es esta cantidad?
b. Determine el costo marginal del fabricante cuando se producen 17 unidades por día.
c. El fabricante determina que si la producción y las ventas se incrementaran a 18 unidades diarias, el ingreso crecería a $275. ¿Deberá efectuar este incremento? ¿Por qué?


83. Si

$$y = (u + 1)\sqrt{u + 5}$$

y

$$u = x(x^2 + 5)^5,$$

encuentre dy/dx cuando $x = 0.1$. Redondee su respuesta a dos decimales.


84. Si

$$y = \frac{9u - 4}{3u^2 + 2}$$

y

$$u = \frac{4x - 1}{(2x - 5)^3},$$

encuentre dy/dx cuando $x = 5$. Redondee su respuesta a dos decimales.

10.7 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 10.1 recta secante recta tangente pendiente de una curva derivada $\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$
cociente de diferencia $f'(x)$ y' $\frac{dy}{dx}$ $\frac{d}{dx}[f(x)]$

Sección 10.3 Δx función de posición velocidad razón de cambio función de costo total
costo marginal costo promedio función de ingreso total ingreso marginal
razón de cambio relativa razón de cambio porcentual

Sección 10.5 regla del producto regla del cociente función de consumo propensión marginal al consumo
propensión marginal al ahorro

Sección 10.6 regla de la cadena regla de la potencia producto del ingreso marginal

Resumen

La recta tangente (o tangente) a una curva en el punto P es la posición límite de las rectas secantes PQ, cuando Q se acerca a P a lo largo de la curva. La pendiente de la tangente en P se llama pendiente de la curva en P.

Si $y = f(x)$, la derivada de f en x es la función definida por el límite $f'(x)$ de la ecuación

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

En forma geométrica, la derivada nos da la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$. Una ecuación de la tangente en un punto particular (x_1, y_1) se obtiene evaluando $f'(x_1)$, que es la pendiente m de la tangente, y sustituyendo en la forma punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$. Cualquier función que es diferenciable en un punto, también debe ser continua ahí.

Las reglas básicas para encontrar derivadas son las siguientes, para las que suponemos que todas las funciones son diferenciables.

$\frac{d}{dx}(c) = 0$, donde c es una constante.

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$, donde n es cualquier número real.

$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$, donde c es una constante.

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x).$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x).$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, donde y es una función de u, y u es una función de x.

$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$, donde u es una función de x, y n es cualquier número real.

La derivada dy/dx puede interpretarse también como la razón de cambio (instantánea) de y con respecto a x:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}.$$

En particular, si $s = f(t)$ es una función de posición, donde s es la posición en el tiempo t, entonces

$$\frac{ds}{dt} = \text{velocidad en el tiempo } t.$$

En economía, el término *marginal* se utiliza para describir derivadas de tipos específicos de funciones. Si $c = f(q)$ es una función de costo total (c es el costo total de q unidades de un producto), entonces la razón de cambio

$\frac{dc}{dq}$ se llama costo marginal.

Interpretamos el costo marginal como el costo aproximado de una unidad adicional de producción (el costo promedio por unidad $\bar{c}$, está relacionado con el costo total c por la relación $\bar{c} = c/q$, o $c = \bar{c}q$).

Una función de ingreso total $r = f(q)$ da el ingreso r de un fabricante al vender q unidades de un producto (el ingreso r y el precio p están relacionados por $r = pq$). La razón de cambio

$\frac{dr}{dq}$ se llama ingreso marginal,

que se interpreta como el ingreso aproximado que se obtiene al vender una unidad adicional de producto.

Si r es el ingreso que un fabricante recibe cuando la producción total de m empleados es vendida, entonces la derivada dr/dm se llama producto del ingreso marginal. El producto del ingreso marginal da el cambio aproximado que resulta en el ingreso cuando el fabricante contrata un empleado adicional.

Si $C = f(I)$ es una función de consumo, donde I es el ingreso nacional y C es el consumo nacional, entonces

$\frac{dC}{dI}$ es la propensión marginal al consumo

y

$1 - \frac{dC}{dI}$ es la propensión marginal del ahorro.

Para cualquier función, la razón de cambio relativa de $f(x)$ es

$$\frac{f'(x)}{f(x)},$$

que compara la razón de cambio de $f(x)$ con la función misma. La razón de cambio porcentual es

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100.$$

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 4 utilice la definición de derivada para encontrar $f'(x)$.

1. $f(x) = 2 - x^2$. **2.** $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. **3.** $f(x) = \sqrt{3x}$. **4.** $f(x) = \dfrac{2}{1 + 4x}$.

En los problemas del 5 al 38 obtenga la derivada.

5. $y = 6^3$.

6. $y = x$.

7. $y = 7x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 1$.

8. $y = 4(x^2 + 5) - 7x$.

9. $f(s) = s^2(s^2 + 2)$.

10. $y = \sqrt{x + 3}$.

11. $y = \dfrac{x^2 + 1}{5}$.

12. $y = \dfrac{2}{x^3}$.

13. $y = (x^2 + 6x)(x^3 - 6x^2 + 4)$.

14. $y = (x^2 + 1)^{100}(x - 6)$.

15. $f(x) = (2x^2 + 4x)^{100}$.

16. $f(w) = w\sqrt{w} + w^2$.

17. $y = \dfrac{3}{2x + 1}$.

18. $y = \dfrac{x^4 + 4x^2}{2x}$.

19. $y = (8 + 2x)(x^2 + 1)^4$.

20. $g(z) = (2z)^{3/5} + 5$.

21. $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + 4}$.

22. $y = \dfrac{x - 5}{(x + 2)^2}$.

23. $y = \sqrt[3]{4x - 1}$.

24. $h(t) = (1 + 2^2)^{17}$.

25. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$.

26. $y = \dfrac{x(x + 1)}{2x^2 + 3}$.

27. $h(x) = (x - 6)^4(x + 5)^3$.

28. $y = \dfrac{(x + 3)^5}{x}$.

29. $y = \dfrac{5x - 4}{x + 6}$.

30. $f(x) = 5x\sqrt{1 - 2x}$.

31. $y = 2x^{-3/8} + (2x)^{-3/8}$.

32. $y = \sqrt{\dfrac{x}{2}} + \sqrt{\dfrac{2}{x}}$.

33. $y = \dfrac{x^2 + 6}{\sqrt{x^2 + 5}}$.

34. $y = \sqrt[3]{(7 - 3x^2)^2}$.

35. $y = (x^3 + 6x^2 + 9)^{3/5}$.

36. $y = 0.5x(x + 1)^{-2} + 0.3$.

37. $g(z) = \dfrac{-7z}{(z - 1)^{-1}}$.

38. $g(z) = \dfrac{-3}{4(z^5 + 2z - 5)^4}$.

En los problemas del 39 al 42 encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor dado de x.

39. $y = x^2 - 6x + 4$, $x = 1$.

40. $y = -2x^3 + 6x + 1$, $x = 2$.

41. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$.

42. $y = \dfrac{x}{8 - x}$, $x = 3$.

---

43. Si $f(x) = 4x^2 + 2x + 8$ encuentre las razones de cambio relativa y porcentual de $f(x)$ cuando $x = 1$.

44. Si $f(x) = x/(x + 4)$, encuentre las razones de cambio relativa y porcentual de $f(x)$ cuando $x = 1$.

45. Ingreso marginal Si $r = q(20 - 0.1q)$ es una función de ingreso total, encuentre la función de ingreso marginal.

46. Costo marginal Si

$$c = 0.0001q^3 - 0.02q^2 + 3q + 6000$$

es una función de costo total, encuentre el costo marginal cuando $q = 100$.

47. Función de consumo Si

$$C = 7 + 0.6I - 0.25\sqrt{I}$$

es una función de consumo, encuentre la propensión marginal al consumo y al ahorro cuando $I = 16$.

48. Ecuación de demanda Si $p = \dfrac{q + 14}{q + 4}$ es una ecuación de demanda, encuentre la razón de cambio del precio con respecto a la cantidad q.

49. Ecuación de demanda Si $p = -0.5q + 450$ es una ecuación de demanda, encuentre la función de ingreso marginal.

50. Costo promedio Si $\bar{c} = 0.03q + 1.2 + \dfrac{3}{q}$ es una función de costo promedio, encuentre el costo marginal cuando $q = 100$.

51. Función de costo en una planta de energía La función de costo total de una planta de energía eléctrica es estimada por[18]

$$c = 16.68 + 0.125q + 0.00439q^2, \quad 20 \leq q \leq 90,$$

donde q es la producción total en 8 horas (como porcentaje de la capacidad) y c es el costo total del combustible en dólares. Encuentre la función de costo marginal y evalúela cuando $q = 70$.

52. Producto del ingreso marginal Un fabricante determina que m empleados producirán un total de q unidades por día, donde

$$q = m(50 - m).$$

Si la función de demanda está dada por

$$p = -0.01q + 9,$$

encuentre el producto del ingreso marginal cuando $m = 10$.

53. Polilla de invierno En un estudio relativo a la polilla de invierno en Nueva Escocia,[19] se determinó que el número promedio, y, de huevos en una polilla hembra es función de su ancho abdominal x (en milímetros); donde

$$y = f(x) = 14x^3 - 17x^2 - 16x + 34$$

y $1.5 \leq x \leq 3.5$. ¿A qué razón cambia el número de huevos con respecto al ancho abdominal cuando $x = 2$?

54. Relación huésped-parásito Para una relación particular huésped-parásito, se encontró que cuando la densidad de huéspedes (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de huéspedes con parásitos es

$$y = 10\left(1 - \frac{1}{1 + 2x}\right), \quad x \geq 0.$$

¿Para qué valor de x es dy/dx igual a $\frac{1}{5}$?

55. Crecimiento de bacterias En cierto cultivo se tienen bacterias en crecimiento. El tiempo t (en horas) para que el número de bacterias se duplique (tiempo de generación), es una función de la temperatura T (en grados Celsius) del cultivo, y está dado por

$$t = f(T) = \begin{cases} \frac{1}{24}T + \frac{11}{4}, & \text{si } 30 \leq T \leq 36, \\ \frac{4}{3}T - \frac{175}{4}, & \text{si } 36 < T \leq 39. \end{cases}$$

Encuentre dt/dT cuando (a) $T = 38$ y (b) $T = 35$.

56. Movimiento La función de posición de una partícula que se mueve en línea recta es

$$s = \frac{9}{2t^2 + 3},$$

donde t está en segundos y s en metros. Encuentre la velocidad de la partícula en $t = 1$.

57. Razón de cambio El volumen V de una esfera está dado por $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, donde d es el diámetro. Encuentre la razón de cambio de V con respecto a d cuando $d = 4$ pies.

58. Movimiento La función de posición para una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo es

$$s = 218t - 16t^2,$$

donde s es la altura en pies desde el suelo después de t segundos. ¿Para qué valor o valores de t la velocidad es igual a 64 pies/s?

59. Encuentre la función de costo marginal si la función de costo promedio es

$$\bar{c} = 2q + \frac{10{,}000}{q^2}.$$

60. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \frac{(x^4 + 1)\sqrt{3x + 1}}{x^5 + x},$$

en el punto sobre la curva donde $x = 1$.

61. Un fabricante encontró que con m empleados trabajando, el número de unidades producidas por día es q, donde

$$q = 10\sqrt{m^2 + 3600} - 600.$$

La ecuación de demanda para el producto es

$$9q + p^2 - 7200 = 0,$$

donde p es el precio de venta cuando la demanda para el producto es q unidades por día.

a. Determine el producto de ingreso marginal del fabricante cuando $m = 80$.

b. Encuentre la razón de cambio relativa del ingreso con respecto al número de empleados cuando $m = 80$.

c. Suponga que le costaría al fabricante \$300 más por día contratar un empleado adicional. ¿Aconsejaría usted al fabricante contratar este empleado adicional? ¿Por qué?

62. Si $f(x) = x^2 \ln x$, utilice el "límite de un cociente de diferencia" para estimar $f'(5)$. Redondee su respuesta a tres decimales.

63. Si $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 4}$, utilice la función de derivación numérica de su calculadora gráfica para estimar la derivada cuando $x = 10$. Redondee su respuesta a tres decimales.

[18] J. A. Nordin, "Note on a Light Plant's Cost Curves" *Econometrica*, 15 (1947), 231-255.

[19] D. G. Embree, "The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia, 1954-1962", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).

64. La función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{6q^2 + 4}{\sqrt{q^2 + 8}} + 2000,$$

donde c está en dólares. Utilice la función de derivación numérica de su calculadora gráfica para estimar el costo marginal cuando se producen 12 unidades. Redondee su respuesta al centavo más cercano.

65. Si

$$y = (u + 3)\sqrt{u + 6},$$

y

$$u = \frac{x + 4}{x + 3},$$

encuentre dy/dx cuando $x = 0.3$. Redondee su respuesta a dos decimales.

Aplicación práctica
Propensión marginal al consumo



Una función de consumo puede definirse ya sea para una nación, como en la sección 10.5, o para una familia. En cualquier caso, la función relaciona el consumo total con el ingreso total. Una función de ahorro, de manera análoga, relaciona el ahorro total con el ingreso total, ya sea en una nación o a nivel familiar.

La información acerca del ingreso, consumo y ahorro para Estados Unidos como un todo puede encontrarse en las tablas de Cuentas del Producto e Ingreso Nacional (NIPA, por sus siglas en inglés), compiladas por la oficina de Análisis Económicos, una división del Departamento de Comercio de Estados Unidos. Las tablas pueden descargarse de `wwwww.bea.doc.gov` Para los años de 1959-1999, la función de consumo nacional se indica por medio del diagrama de dispersión de la figura 10.15.

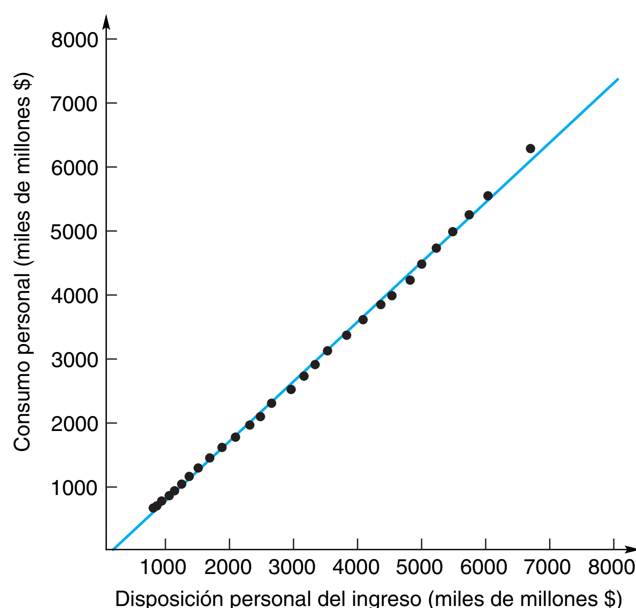


FIGURA 10.15 Función de consumo nacional para Estados Unidos.

Observe que los puntos están más o menos a lo largo de una línea recta. Una regresión lineal da la ecuación para ésta como $y = 0.9314x - 99.1936$.

La propensión marginal al consumo derivada de esta gráfica es simplemente la pendiente de la recta, esto es, alrededor de 0.931 o 93.1%. A nivel nacional, entonces, un incremento de mil millones de dólares en el ingreso total disponible produce un incremento de $931 millones en el consumo. Y si suponemos que el resto se ahorra, existe un aumento de $69 millones en el total de ahorros.[20]

Quizá algo más sencillo para relacionar, a causa de los número más pequeños involucrados, es la función de consumo para una familia. Esta función está documentada en Encuestas de Gastos del Consumidor llevada a cabo por la Oficina de Estadísticas de Trabajo, que es parte del Departamento de Trabajo de Estados Unidos. Los resultados de las encuestas para cada año pueden bajarse de `www.bls.gov/csxhome.htm`.

La encuesta de cada año proporciona información para cinco quintiles, como se denominan, donde un quintil representa un quinto de las familias de Estados Unidos. Los quintiles son ordenados por ingreso, de modo que el quintil inferior representa al 20% más pobre de las familias de Estados Unidos y el quintil superior representa al 20% más rico.

Para el año de 1999, el ingreso y consumo son como se muestra en la tabla 10.3. Los números son valores promedio dentro de cada quintil. Si estos datos se grafican por medio de una calculadora gráfica, los puntos caen en un patrón que podría aproximarse de manera razonable a una línea recta, pero podría aproximarse

TABLA 10.3 Ingresos y gastos familiares de Estados Unidos, 1999

Ingreso después de impuestos	Gastos totales
$7101	$16,766
$17,576	$24,850
$30,186	$33,078
$48,607	$46,015
$98,214	$75,080

[20]En realidad, también debe contar los pagos de intereses y otros gastos no contabilizados como consumos. Pero, por ahora ignoraremos esta complicación.

mejor a la forma de una curva, cualitativamente, parecida a una función raíz cuadrada (véase la fig. 10.16).

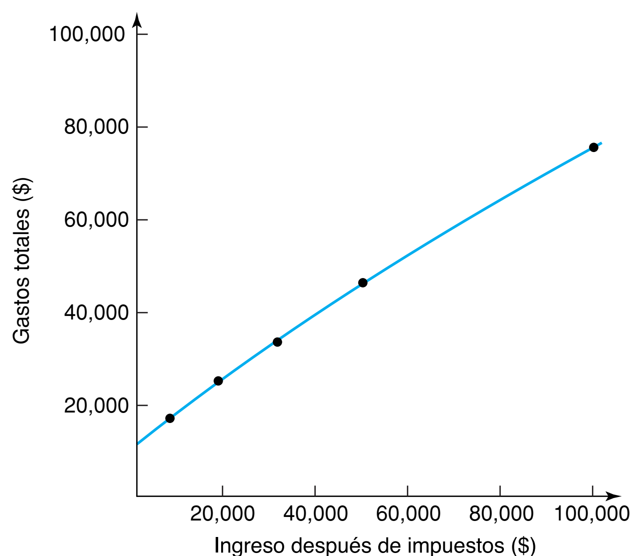


FIGURA 10.16 Función de consumo familiar (Estados Unidos).

La mayoría de las calculadoras gráficas no tienen una función de regresión para una función de tipo raíz cuadrada. Sin embargo, ellas tienen una función de regresión cuadrática y la inversa de una función cuadrática es una función de tipo raíz cuadrada (las funciones inversas se mencionaron en la sección 5.2). Así, procedemos como sigue. Primero, utilizamos las capacidades estadísticas de una calculadora, para introducir los números de la *segunda* columna de la tabla 10.3 como valores de x, y los de la *primera* columna como valores de y. Segundo, realizamos una regresión cuadrática. La función obtenida está dada por

$$y = (4.4627 \times 10^{-6})x^2 + 1.1517x - 13,461.$$

Tercero, intercambiamos las listas de los valores de x y y en preparación para la gráfica. Cuarto, reemplazamos y por x, y x por y en la ecuación de regresión cuadrática, y despejamos y (por medio de la fórmula cuadrática) para obtener la ecuación

$$y = \frac{-1.1517 \pm \sqrt{1.1517^2 - 4(4.4627 \times 10^{-6})(-13,461 - x)}}{2(4.4627 \times 10^{-6})}$$

o, con mayor sencillez,

$$y = -129,036 \pm \sqrt{1.9667 \times 10^{10} + 224,080x}.$$

Por último, introducimos la mitad superior de la curva (que corresponde a la parte $+$ del signo $\pm$) como una función para graficar; luego la desplegamos junto con una gráfica de los datos. El resultado se parece al mostrado en la figura 10.17.

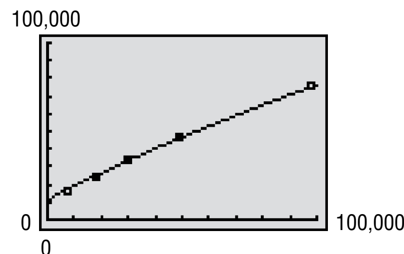


FIGURA 10.17 Gráfica de la recta de regresión.

Para encontrar el consumo marginal para un ingreso dado, ahora usamos la función dy/dx. Por ejemplo, para encontrar el consumo marginal en \$50,000, seleccionamos dy/dx, y luego introducimos 50,000. La calculadora regresa el valor 0.637675, que representa un consumo marginal de alrededor del 63.8%. En otras palabras, una familia con ingresos de \$50,000 anuales, al obtener un ingreso adicional de \$1000, gastaría \$638 de ellos y el resto lo ahorraría.

Ejercicios

1. Compare la función de consumo de la figura 10.15 con las funciones de consumo de los problemas 63 y 64 de la sección 10.5. ¿Estas funciones de consumo difieren de manera significativa?

2. El primer renglón de la tabla 10.3, en la primera columna, tiene \$7101 y en la segunda columna, \$16,766. ¿Qué significa esto?

3. Suponga que una familia tiene ingresos anuales de \$25,000, y en 1999 recibió un bono extra inesperado por \$1000. ¿Cuánto de ese cheque esperaría usted que la familia gastara? ¿Cuánto ahorraría?

4. Suponga que una familia con ingresos de \$90,000 anuales, recibió en 1999 un bono extra por \$1000, que no lo esperaba. ¿Cuánto de ese bono gastaría?

5. ¿Cuáles son las razones de la vida real para explicar la diferencia entre las respuestas de los problemas 3 y 4?



CAPÍTULO 11

Temas adicionales de diferenciación

Después de un incómodo viaje en un vehículo, en ocasiones los pasajeros describen la travesía como un viaje con "jaloneos" o con "muchos tumbos". Pero, de manera más precisa, ¿qué es el "jaloneo"?, ¿qué significa esto para, digamos, un ingeniero que diseña un nuevo sistema de transporte?

Viajar en línea recta a una velocidad constante se denomina *movimiento uniforme*, y no existe "jaloneo" alguno. Pero, si la trayectoria o la velocidad cambian, el viaje puede tener "jalones". El cambio en la velocidad con respecto al tiempo, formalmente, es la derivada de la velocidad. Llamada aceleración, el cambio en la velocidad es la *segunda derivada* de la posición con respecto al tiempo —la derivada de la derivada de la posición. Uno de los conceptos importantes que se tratan en este capítulo es el de derivadas de orden superior, de las cuales la aceleración es un ejemplo.

Pero, ¿la aceleración es la responsable de "los jalones"? La sensación de "jaloneo" hacia delante y hacia atrás en una montaña rusa ciertamente está relacionada con la aceleración. Por otra parte, las revistas de automóviles con frecuencia elogian a los automóviles que tienen una aceleración *suave*. De modo que parece que la aceleración tiene algo que ver con "los jalones", pero no es en sí la causa.

La derivada de la aceleración es la *tercera* derivada de la posición con respecto al tiempo. Cuando esta tercera derivada es grande, la aceleración está cambiando con rapidez. En una montaña rusa, en una vuelta uniforme a la izquierda se experimenta una aceleración uniforme hacia la izquierda. Pero cuando la montaña rusa cambia de manera abrupta de una vuelta hacia la izquierda a una vuelta hacia la derecha, la aceleración cambia de direcciones, y los pasajeros experimentan un jalón. La tercera derivada de la posición es, en efecto, muy adecuada para medir "los jalones", que es costumbre denominar "jalón" o "giro", al igual que la segunda derivada se denomina aceleración.

El "giro" tiene implicaciones no sólo para la comodidad de los pasajeros en un vehículo, sino también para la fiabilidad de los equipos. Por ejemplo, los ingenieros diseñan equipo para naves espaciales siguiendo directrices acerca del máximo "giro" o "jalón" que el equipo debe ser capaz de soportar sin dañar sus componentes internos.

OBJETIVO Desarrollar una fórmula de diferenciación para $y = \ln u$, aplicar la fórmula y utilizarla para diferenciar una función logarítmica para una base diferente de e.

11.1 Derivadas de funciones logarítmicas

En esta sección desarrollaremos fórmulas para diferenciar funciones logarítmicas. Comenzamos con la derivada de $f(x) = \ln x$, donde $x > 0$. De acuerdo con la definición de derivada,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}.$$

Si utilizamos la propiedad de los logaritmos de que $\ln m - \ln n = \ln(m/n)$, tenemos

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{\text{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right].$$

Al escribir $\frac{1}{h}$ como $\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h}$, se obtiene

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}\right] \qquad \text{(ya que } r \ln m = \ln m^r\text{)}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \lim_{h\to 0}\left[\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}\right].$$

Como puede demostrarse que el límite de un logaritmo es el logaritmo del límite ($\lim \ln u = \ln \lim u$), tenemos

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}\right]. \qquad \textbf{(1)}$$

Para evaluar $\lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}$, primero observamos que cuando $h \to 0$, entonces $\frac{h}{x} \to 0$. Así, si reemplazamos $\frac{h}{x}$ por k, el límite adquiere la forma

$$\lim_{k\to 0}(1 + k)^{1/k}.$$

Como se estableció en la sección 9.1, este límite es e. Así, la ecuación (1) resulta

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}(1) = \frac{1}{x}.$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}. \qquad \textbf{(2)}$$

EJEMPLO 1 Diferenciación de funciones que contienen ln *x*

a. *Diferenciar* $f(x) = 5 \ln x$.

Solución: Aquí f es una constante (5) que multiplica a una función ($\ln x$), por lo que, según la ecuación (2) tenemos

$$f'(x) = 5\frac{d}{dx}(\ln x) = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}.$$

b. *Diferenciar* $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Solución: según la regla del cociente y la ecuación (2),

$$y' = \frac{x^2\frac{d}{dx}(\ln x) - (\ln x)\frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

Ahora extenderemos la ecuación (2) para considerar una clase más amplia de funciones. Sea $y = \ln u$, donde u es una función positiva y diferenciable de x. Por la regla de la cadena,

La regla de la cadena es invaluable en el desarrollo de la fórmula de diferenciación para $\ln u$.

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\ln u) \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Por lo que,

$$\frac{d}{du}(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}. \quad \textbf{(3)}$$

EJEMPLO 2 Diferenciación de funciones que contienen ln *u*

a. *Diferenciar* $y = \ln(x^2 + 1)$.

Solución: esta función tiene la forma $\ln u$, con $u = x^2 + 1$. Empleando la ecuación (3), se obtiene

No olvide que falta $\frac{d}{dx}(x^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1}\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2 + 1}(2x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

b. *Diferenciar* $y = x^2 \ln(4x + 2)$.

Solución: utilizando la regla del producto se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = x^2\frac{d}{dx}[\ln(4x + 2)] + [\ln(4x + 2)]\frac{d}{dx}(x^2).$$

Con base en la ecuación (3) con $u = 4x + 2$,

$$\frac{dy}{dx} = x^2\left(\frac{1}{4x + 2}\right)(4) + [\ln(4x + 2)](2x)$$

$$= \frac{2x^2}{2x + 1} + 2x\ln(4x + 2).$$

c. *Diferenciar* $y = \ln(\ln x)$.

Principios en práctica 1
Diferenciación de funciones que incluyen ln *u*

La oferta de q unidades de un producto al precio de p dólares por unidad está dada por $q(p) = 25 + 2\ln(3p^2 + 4)$. Determine la razón de cambio de la oferta con respecto al precio, $\frac{dq}{dp}$.

Solución: ésta tiene la forma $y = \ln u$, con $u = \ln x$. Con la ecuación (3) obtenemos,

$$y' = \frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x \ln x}.$$

Con frecuencia podemos reducir el trabajo implicado en diferenciar el logaritmo de un producto, cociente o potencia, utilizando las propiedades de los logaritmos para reescribir el logaritmo *antes* de diferenciar. Esto lo ilustra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Reescritura de funciones logarítmicas antes de diferenciarlas

a. *Encontrar* $\frac{dy}{dx}$ *si* $y = \ln(2x + 5)^3$.

Solución: aquí se tiene el logaritmo de una potencia. Primero simplificamos el miembro derecho utilizando las propiedades de los logaritmos. Luego diferenciamos. Tenemos

$$y = \ln(2x + 5)^3 = 3\ln(2x + 5),$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{1}{2x + 5}\right)(2) = \frac{6}{2x + 5}.$$

De otra manera, si primero no simplificamos, escribiríamos

Al comparar ambos métodos, notamos que el más sencillo es primero simplificar y después diferenciar.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2x + 5)^3}\frac{d}{dx}[(2x + 5)^3]$$

$$= \frac{1}{(2x + 5)^3}(3)(2x + 5)^2(2) = \frac{6}{2x + 5}.$$

b. *Encontrar* $f'(p)$ *si* $f(p) = \ln[(p + 1)^2(p + 2)^3(p + 3)^4]$.

Solución: simplificamos el miembro derecho y luego diferenciamos:

$$f(p) = 2\ln(p + 1) + 3\ln(p + 2) + 4\ln(p + 3),$$

$$f'(p) = 2\left(\frac{1}{p + 1}\right)(1) + 3\left(\frac{1}{p + 2}\right)(1) + 4\left(\frac{1}{p + 3}\right)(1)$$

$$= \frac{2}{p + 1} + \frac{3}{p + 2} + \frac{4}{p + 3}.$$

EJEMPLO 4 Diferenciación de funciones que contienen logaritmos

a. *Encontrar* $f'(w)$ *si* $f(w) = \ln\sqrt{\frac{1 + w^2}{w^2 - 1}}$.

Solución: simplificamos usando las propiedades de los logaritmos y luego diferenciamos:

$$f(w) = \frac{1}{2}[\ln(1 + w^2) - \ln(w^2 - 1)],$$

$$f'(w) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+w^2}(2w) - \frac{1}{w^2-1}(2w)\right]$$

$$= \frac{w}{1+w^2} - \frac{w}{w^2-1} = -\frac{2w}{w^4-1}.$$

b. *Encontrar $f'(x)$ si $f(x) = \ln^3(2x+5)$.*

Solución: el exponente 3 afecta a $\ln(2x+5)$. Esto es,

$$f(x) = \ln^3(2x+5) = [\ln(2x+5)]^3.$$

Por la regla de la potencia,

$$f'(x) = 3[\ln(2x+5)]^2 \frac{d}{dx}[\ln(2x+5)]$$

$$= 3[\ln(2x+5)]^2\left[\frac{1}{2x+5}(2)\right]$$

$$= \frac{6}{2x+5}[\ln(2x+5)]^2 = \frac{6}{2x+5}\ln^2(2x+5).$$



Advertencia No confunda $\ln^3(2x+5)$ con $\ln(2x+5)^3$, que apareció en el ejemplo 3(a).

Derivadas de funciones logarítmicas con base *b*

Para diferenciar una función logarítmica con base diferente a e, podemos convertir primero el logaritmo a logaritmos naturales por medio de la fórmula del cambio de base, y luego diferenciar la expresión resultante. Por ejemplo, considere $y = \log_b u$, donde u es una función diferenciable de x. Según la fórmula del cambio de base,

$$y = \log_b u = \frac{\ln u}{\ln b}.$$

Al diferenciar, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln u}{\ln b}\right) = \frac{1}{\ln b}\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{\ln b}\cdot\frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

Por lo que,

$$\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{(\ln b)\,u}\cdot\frac{du}{dx}.$$

En vez de memorizar esta regla, le sugerimos recuerde el procedimiento utilizado para obtenerla.

Procedimiento para diferenciar $\log_b u$

Convierta $\log_b u$ a logaritmos naturales para obtener $\dfrac{\ln u}{\ln b}$ y luego diferencie.

EJEMPLO 5 Diferenciación de una función logarítmica con base 2

Diferenciar $y = \log_2 x$.

Solución: de acuerdo con el procedimiento anterior, tenemos

$$\frac{d}{dx}(\log_2 x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x \ln 2}.$$

Vale la pena mencionar que podemos escribir la respuesta en términos de la base original. Ya que

$$\frac{1}{\ln b} = \frac{1}{\dfrac{\log_b b}{\log_b e}} = \frac{\log_b e}{1} = \log_b e,$$

podemos expresar $\frac{1}{x \ln 2}$ como $\frac{1}{x}\log_2 e$.

■

Principios en práctica 2
Diferenciación de una función logarítmica de base 10

La intensidad de un sismo se mide en la escala de Richter. La lectura está dada por $R = \log \frac{I}{I_0}$, en donde I es la intensidad e I_0 es una intensidad mínima estándar. Si $I_0 = 1$, encuentre $\frac{dR}{dI}$, la tasa de cambio de la lectura en la escala de Richter con respecto a la intensidad.

EJEMPLO 6 Diferenciación de una función logarítmica con base 10

Si $y = \log(2x + 1)$, *encontrar la razón de cambio de y con respecto a x.*

Solución: la razón de cambio es dy/dx y la base implicada es 10. Por tanto, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\log(2x+1)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln(2x+1)}{\ln 10}\right]$$
$$= \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{2x+1}(2) = \frac{2}{(2x+1)\ln 10}.$$

■

Ejercicio 11.1

En los problemas del 1 al 44 diferencie las funciones. Si es posible, utilice primero las propiedades de los logaritmos para simplificar la función dada.

1. $y = 4 \ln x$.
2. $y = \frac{\ln x}{14}$.
3. $y = \ln(3x - 7)$.
4. $y = \ln(5x - 6)$.
5. $y = \ln x^2$.
6. $y = \ln(ax^2 + b)$.
7. $y = \ln(1 - x^2)$.
8. $y = \ln(-x^2 + 6x)$.
9. $f(p) = \ln(2p^3 + 3p)$.
10. $f(r) = \ln(2r^4 - 3r^2 + 2r + 1)$.
11. $f(t) = t \ln t$.
12. $y = x^2 \ln x$.
13. $y = x^2 \ln(4x + 3)$.
14. $y = (2x + 5)^2 \ln(2x + 5)$.
15. $y = \log_3(8x - 1)$.
16. $f(w) = \log(w^2 + w)$.
17. $y = x^2 + \log_2(x^2 + 4)$.
18. $y = x^3 \log_4 x$.
19. $f(z) = \frac{\ln z}{z}$.
20. $y = \frac{x^2}{\ln x}$.
21. $y = \frac{x^2 - 1}{\ln x}$.
22. $y = \ln x^{100}$.
23. $y = \ln(x^2 + 4x + 5)^3$.
24. $y = 6 \ln \sqrt[3]{x}$.
25. $y = 9 \ln \sqrt{1 + x^2}$.
26. $f(s) = \ln\left(\frac{s^2}{1 + s^2}\right)$.
27. $f(l) = \ln\left(\frac{1 + l}{1 - l}\right)$.

28. $y = \ln\left(\frac{2x+3}{3x-4}\right)$.

29. $y = \ln\sqrt[4]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$.

30. $y = \ln\sqrt{\frac{x^4-1}{x^4+1}}$.

31. $y = \ln[(x^2+2)^2(x^3+x-1)]$.

32. $y = \ln[(5x+2)^4(8x-3)^6]$.

33. $y = 5\ln(x\sqrt{2x+1})$.

34. $y = 6\ln\frac{x}{\sqrt{2x+1}}$.

35. $y = (x^2+1)\ln(2x+1)$.

36. $y = (ax+b)\ln(ax)$.

37. $y = \ln x^3 + \ln^3 x$.

38. $y = x^{\ln 3}$.

39. $y = \ln^4(ax)$.

40. $y = \ln^2(2x+11)$.

41. $y = x\ln\sqrt{x-1}$.

42. $y = \ln(x^2\sqrt{3x-9})$.

43. $y = \sqrt{4+3\ln x}$.

44. $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

---

45. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \ln(x^2-2x-2)$$

cuando $x = 3$.

46. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = x[\ln(x)-1]$$

en el punto donde $x = e$.

47. Encuentre la pendiente de la curva $y = \frac{x}{\ln x}$ cuando $x = 3$.

48. Ingreso marginal Encuentre la función de ingreso marginal si la función de demanda es $p = 25/\ln(q+2)$.

49. Costo marginal Una función de costo total está dada por

$$c = 25\ln(q+1) + 12.$$

Encuentre el costo marginal cuando $q = 6$.

50. Costo marginal La función del costo promedio de un fabricante, en dólares, está dada por

$$\bar{c} = \frac{400}{\ln(q+5)}.$$

Encuentre el costo marginal (redondeado a dos decimales) cuando $q = 45$.

51. Cambio en la oferta La oferta de q unidades de un producto al precio de p dólares por unidad está dada por $q(p) = 25 + 10\ln(2p+1)$. Determine la tasa de cambio de la oferta con respecto al precio, $\frac{dq}{dp}$.

52. Percepción de sonido El nivel de un sonido (L, medido en decibeles) percibido por el oído humano depende de los niveles de intensidad (I), de acuerdo con $L = 10\log\frac{I}{I_0}$, en donde I_0 es el umbral de audibilidad. Si $I_0 = 17$, determine $\frac{dL}{dI}$, la razón de cambio del nivel del sonido con respecto a la intensidad.

53. Biología En cierto experimento con bacterias, se observó que la actividad relativa de una colonia particular de bacterias está descrita por

$$A = 6\ln\left(\frac{T}{a-T} - a\right),$$

donde a es una constante y T es la temperatura del medio ambiente. Encuentre la razón de cambio de A con respecto a T.

54. Demuestre que la razón de cambio relativa de $y = f(x)$ con respecto a x es igual a la derivada de $y = \ln f(x)$.

En los problemas 56 y 57 use las reglas de diferenciación para encontrar $f'(x)$. Luego use su calculadora gráfica para encontrar todos los ceros de $f'(x)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

56. $f(x) = x^2\ln x$.

57. $f(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$.

OBJETIVO Desarrollar una fórmula de diferenciación para $y = e^u$, aplicar la fórmula y utilizarla para diferenciar una función exponencial con base diferente a e.

11.2 Derivadas de funciones exponenciales

Ahora obtendremos una fórmula para la derivada de la función exponencial

$$y = e^u,$$

donde u es una función diferenciable de x. En forma logarítmica tenemos

$$u = \ln y.$$

Si diferenciamos ambos miembros con respecto a x obtenemos

$$\frac{d}{dx}(u) = \frac{d}{dx}(\ln y),$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}.$$

Si despejamos dy/dx y luego reemplazamos y por e^u resulta

$$\frac{dy}{dx} = y\frac{du}{dx} = e^u\frac{du}{dx}.$$

Por lo que,

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}. \quad (1)$$

Como caso especial, sea $u = x$. Entonces $du/dx = 1$ y

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x. \quad (2)$$

Observe que la función y su derivada son iguales.



Advertencia La regla de la potencia no se aplica a ex. Esto es $\frac{d}{dx}(e^x) \neq xe^{x-1}$.

EJEMPLO 1 Diferenciación de funciones que contienen e^x

a. *Encontrar* $\frac{d}{dx}(3e^x)$.

Solución: como 3 es un factor constante,

$$\frac{d}{dx}(3e^x) = 3\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$= 3e^x \qquad \text{[según la ecuación (2)].}$$

b. *Si* $y = \frac{x}{e^x}$, *encontrar* $\frac{dy}{dx}$.

Solución: *primero* utilizamos la regla del cociente y luego la ecuación (2):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(e^x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1) - x(e^x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}.$$

c. *Si* $y = e^2 + e^x + \ln 3$, *encontrar* y'.

Solución: como e^2 y $\ln 3$ son constantes, $y' = 0 + e^x + 0 = e^x$.

EJEMPLO 2 Diferenciación de funciones que contienen e^u

a. *Encontrar* $\frac{d}{dx}(e^{x^3+3x})$.

Solución: la función tiene la forma e^u con $u = x^3 + 3x$. De la ecuación (1),

$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$. No olvide la $\frac{du}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(e^{x^3+3x}) = e^{x^3+3x}\frac{d}{dx}(x^3 + 3x) = e^{x^3+3x}(3x^2 + 3)$$
$$= 3(x^2 + 1)e^{x^3+3x}.$$

b. *Encontrar* $\frac{d}{dx}[e^{x+1}\ln(x^2 + 1)]$.

Solución: según la regla del producto,

$$\frac{d}{dx}[e^{x+1}\ln(x^2 + 1)] = e^{x+1}\frac{d}{dx}[\ln(x^2 + 1)] + [\ln(x^2 + 1)]\frac{d}{dx}(e^{x+1})$$
$$= e^{x+1}\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)(2x) + [\ln(x^2 + 1)]e^{x+1}(1)$$
$$= e^{x+1}\left[\frac{2x}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1)\right].$$

■

■ *Principios en práctica 1*
Diferenciación de funciones que contienen a e^u

Cuando un objeto se mueve de un entorno a otro, el cambio de la temperatura del objeto está dado por $T = Ce^{kt}$, donde C es la diferencia de temperaturas de los dos entornos, t es el tiempo en el entorno nuevo y k es una constante. Determine la razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo.

EJEMPLO 3 Función de densidad de la distribución normal

Una función importante utilizada en las ciencias sociales es la ***función de densidad de la distribución normal***

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}$$

donde σ *(letra griega que se lee "sigma") y* μ *(letra griega que se lee "mu") son constantes. La gráfica de esta función, llamada curva normal, tiene forma de "campana"* (véase la fig. 11.1). *Determinar la razón de cambio de y con respecto a x cuando* $x = \mu$.

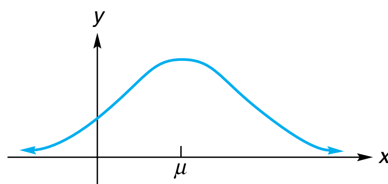


FIGURA 11.1 La función de densidad de la distribución normal.

Solución: la razón de cambio de y con respecto a x es dy/dx. Observamos que el factor $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ es una constante y que el segundo factor tiene la forma e^u, donde

$$u = -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2.$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}\right]\left[-\frac{1}{2}(2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right].$$

Al evaluar dy/dx cuando $x = \mu$, obtenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\mu} = 0.$$

En forma geométrica, esto significa que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = \mu$ es horizontal (véase la fig. 11.1).

Diferenciación de funciones exponenciales con base *a*

Ahora que estamos familiarizados con la derivada e^u, consideraremos la derivada de la función exponencial más general a^u. Si reemplazamos a por la forma equivalente $e^{\ln a}$, podemos expresa a^u como una función exponencial con base e, una forma que podemos diferenciar. Tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a^u) &= \frac{d}{dx}[(e^{\ln a})^u] = \frac{d}{dx}(e^{u \ln a}) \\ &= e^{u \ln a}\frac{d}{dx}(u \ln a) \\ &= e^{u \ln a}\left(\frac{du}{dx}\right)\ln a \\ &= a^u (\ln a)\frac{du}{dx} \qquad \text{(ya que } e^{u \ln a} = a^u\text{)}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u (\ln a)\frac{du}{dx}. \qquad \textbf{(3)}$$

Observe que si $a = e$, el factor $\ln a$ en la ecuación (3) es igual a 1. Por tanto, si se usan funciones exponenciales con base e, tendremos una fórmula de diferenciación más sencilla con la cual trabajar. Ésta es una razón por la que las funciones exponenciales naturales se usan tan ampliamente en cálculo. En vez de memorizar la ecuación (3), le sugerimos recordar el procedimiento para obtenerla.

Procedimiento para diferenciar a^u

Convierta a^u en una función exponencial natural, aprovechando la propiedad de que $a = e^{\ln a}$ y luego diferencie.

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 4 Diferenciación de una función exponencial con base 4

Encontrar $\frac{d}{dx}(4^x)$.

Solución: empleando el procedimiento anterior, tenemos

Verifique el resultado de manera directa, por medio de la ecuación (3).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(4^x) &= \frac{d}{dx}[(e^{\ln 4})^x] \\ &= \frac{d}{dx}[e^{(\ln 4)x}] && \left[\text{forma } \frac{d}{dx}(e^u)\right] \\ &= e^{(\ln 4)x}(\ln 4) && \text{[según la ecuación (1)]} \\ &= 4^x(\ln 4). \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Diferenciación de formas diferentes

Encontrar $\frac{d}{dx}(e^2 + x^e + 2^{\sqrt{x}})$.

Solución: aquí tenemos que diferenciar tres formas distintas; ¡no las confunda! La primera (e^2) es una base constante elevada a una potencia constante, por lo que es en sí misma una constante. Así, su derivada es igual a cero. La segunda (x^e) es una base variable elevada a una potencia constante, por lo que se aplica la regla de la potencia. La tercera ($2^{\sqrt{x}}$) es una base constante elevada a una potencia variable, por lo que debemos diferenciar una función exponencial. Reuniendo todo, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^2 + x^e + 2^{\sqrt{x}}) &= 0 + ex^{e-1} + \frac{d}{dx}[e^{(\ln 2)\sqrt{x}}] \\ &= ex^{e-1} + [e^{(\ln 2)\sqrt{x}}](\ln 2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= ex^{e-1} + \frac{2^{\sqrt{x}}\ln 2}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Ejercicio 11.2

En los problemas del 1 al 28 diferencie las funciones.

1. $y = 7e^x$.

2. $y = \frac{2e^x}{5}$.

3. $y = e^{x^2+4}$.

4. $y = e^{2x^2+5}$.

5. $y = e^{9-5x}$.

6. $f(q) = e^{-q^3+6q-1}$.

7. $f(r) = e^{3r^2+4r+4}$.

8. $y = e^{9x^2+5x^3-6}$.

9. $y = xe^x$.

10. $y = x^2e^{-x}$.

11. $y = x^2e^{-x^2}$.

12. $y = xe^{3x}$.

13. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{3}$.

14. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

15. $y = 4^{3x^2}$.

16. $y = 2^x x^2$.

17. $f(w) = \frac{e^{2w}}{w^2}$.

18. $y = e^{x-\sqrt{x}}$.

19. $y = e^{1+\sqrt{x}}$.

20. $y = (e^{3x} + 1)^4$.

21. $y = x^5 - 5^x$.

22. $f(z) = e^{1/z}$.

23. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

24. $y = e^{2x}(x + 6)$.

25. $y = e^{\ln x}$.

26. $y = e^{-x}\ln x$.

27. $y = e^{x \ln x}$.

28. $y = \ln e^{4x+1}$.

29. Si $f(x) = ee^x e^{x^2}$, encuentre $f'(-1)$.

30. Si $f(x) = 5^{x^2 \ln x}$, encuentre $f'(1)$.

31. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$ cuando $x = -2$.

32. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^e e^x$ en el punto $(1, e)$.

En cada una de las ecuaciones de demanda en los problemas 33 y 34, encuentre la razón de cambio del precio p con respecto a la cantidad q. ¿Cuál es la razón de cambio para el valor indicado de q?

33. $p = 15e^{-0.001q}$; $q = 500$.

34. $p = 8e^{-3q/800}$; $q = 400$.

En los problemas 35 y 36, $\bar{c}$ *es el costo promedio de producir q unidades de un producto. Encuentre la función de costo marginal y el costo marginal para los valores dados de q.*

35. $\bar{c} = \frac{7000e^{q/700}}{q}$; $q = 350$, $q = 700$.

36. $\bar{c} = \frac{850}{q} + 4000\frac{e^{(2q+6)/800}}{q}$; $q = 97$, $q = 197$.

37. Si

$$w = e^{x^3-4x} + x\ln(x-1) \text{ y } x = \frac{t+1}{t-1}, \text{ encuentre } \frac{dw}{dt}$$

cuando $t = 3$.

38. Si $f'(x) = e^{-2x}$ y $u = \ln x^2$, demuestre que

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = \frac{2}{x^5}.$$

39. Determine el valor de la constante positiva c si

$$\frac{d}{dx}(c^x - x^c) = 0$$

cuando $x = 1$.

40. Calcule la razón de cambio relativa de

$$f(x) = 10^{-x} + \ln(8 + x) + 0.01e^{x-2}$$

cuando $x = 2$. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

41. Ciclo de producción Para una empresa, la producción diaria q en el t-ésimo día de un ciclo de producción está dada por

$$q = 500(1 - e^{-0.2t}).$$

Encuentre la razón de cambio de la producción q con respecto a t en el décimo día.

42. Función de densidad normal Para la función de densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},$$

encuentre $f'(0)$.

43. Población La población, en millones, del área más grande de Seattle dentro de t años, contados a partir de 1970 se estima por medio de $P = 1.92e^{0.0176t}$. Demuestre que $dP/dt = kP$, donde k es una constante. Esto significa que la razón de cambio de la población en cualquier tiempo es proporcional a la población en ese tiempo.

44. Penetración de mercado En un análisis de la difusión de un nuevo proceso en un mercado, Hunter y Rubenstein[1] se refieren a una ecuación de la forma

$$Y = k\alpha^{\beta^t},$$

donde Y es el nivel acumulado de difusión del nuevo proceso en el tiempo t, y k, α y β son constantes positivas. Verifique la afirmación de que

$$\frac{dY}{dt} = k\alpha^{\beta^t}(\beta^t \ln \alpha)\ln \beta.$$

45. Finanzas Después de t años, el valor S de un capital de P dólares que se invierte a una tasa anual r compuesta continuamente, está dado por $S = Pe^{rt}$. Demuestre que la razón relativa de cambio de S con respecto a t es r.



46. Relación depredador-presa En un artículo sobre depredadores y presas, Holling[2] se refiere a una ecuación de la forma

$$y = K(1 - e^{-ax}),$$

donde x es la densidad de presas, y el número de presas atacadas y K y a son constantes. Verifique la afirmación de que

$$\frac{dy}{dx} = a(K - y).$$

47. Terremotos De acuerdo con la escala de Richter,[3] el número de temblores de magnitud M o superiores por cada unidad de tiempo, se obtiene por medio de $N = 10^A 10^{-bM}$, donde A y b son constantes. Despeje dN/dM.

48. Psicología La retención a corto plazo fue estudiada por Peterson y Peterson.[4] Los dos investigadores analizaron un procedimiento en el que un experimentador daba verbalmente a una persona una sílaba de tres letras consonantes, por ejemplo, CHJ, seguida de un número de tres dígitos, como 309. La persona repetía entonces el número y contaba hacia atrás restando cada vez tres unidades, esto es, 309, 306, 303,... Después de cierto tiempo se ordenaba a la persona por medio de una luz, recitar la sílaba de tres constantes. El intervalo de tiempo comprendido entre la terminación de la enunciación de la última consonante por el experimentador, hasta la aparición de la luz, se denominó *intervalo de evocación*. El tiempo entre la aparición de la luz y la terminación del enunciado de la respuesta se denominó *latencia*. Después de muchos ensayos se determinó que para un intervalo de evocación de t segundos, la proporción aproximada de recuerdos correctos con latencia inferior a 2.83 segundos fue igual a p, donde

$$p = 0.89[0.01 + 0.99(0.85)^t].$$

a. Encuentre dp/dt e interprete su resultado.
b. Evalúe dp/dt para $t = 2$. Redondee su respuesta a dos decimales.

49. Medicina Suponga que un indicador radiactivo, como un tinte colorante, se inyecta instantáneamente al corazón en el tiempo $t = 0$, y se mezcla en forma uniforme con la sangre dentro del corazón. Sea C_0 la concentración inicial del indicador en el corazón y suponga que el corazón tiene un volumen constante V. También suponga que conforme sangre fresca fluye hacia el corazón, la mezcla diluida de sangre e indicador salen a una razón

---

[1] A. P. Hurter, Jr., A. H. Rubenstein, et al., "Market Penetration By New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 197-221.

[2] C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, XCI, núm. 7 (1959), 385-398.

[3] C. F. Richter, *Elementary Seismology* (San Francisco: W. H. Freeman and Company, Publishers, 1958).

[4] L. R. Peterson y M. J. Peterson, "Short-Term Retention of Individual Verbal Items", *Journal of Experimental Psychology*, 58 (1959), 193-198.

constante positiva de r. Entonces la concentración del indicador en el corazón en el instante t está dada por

$$C(t) = C_0 e^{-(r/V)t}.$$

Demuestre que $dC/dt = (-r/V)C(t)$.

50. Medicina En el problema 49, suponga que el indicador radiactivo se inyecta a una razón constante R. La concentración en el instante t es entonces

$$C(t) = \frac{R}{r}[1 - e^{-(r/V)t}].$$

a. Encuentre $C(0)$.

b. Demuestre que $\frac{dC}{dt} = \frac{R}{V} - \frac{r}{V}C(t)$.

51. Esquizofrenia Se han usado varios modelos para analizar el tiempo de permanencia en un hospital. Para un grupo particular de esquizofrénicos, un modelo[5] está dado por

$$f(t) = 1 - e^{-0.008t},$$

donde $f(t)$ es la proporción del grupo dado de alta al final de t días de hospitalización. Encuentre la razón de altas (proporción de altas por día) al final de 100 días. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

52. Ahorro y consumo El ahorro S de un país (en miles de millones de dólares) está relacionado con el ingreso nacional I (en miles de millones de dólares) por la ecuación

$$S = \ln \frac{3}{2 + e^{-I}}.$$

a. Demuestre que la propensión marginal al consumo en función del ingreso es $\frac{2}{2 + e^{-I}}$.

b. Al millón más cercano, ¿cuál es el ingreso nacional cuando la propensión marginal al ahorro es de $\frac{1}{10}$?

En los problemas 53 y 54 utilice las reglas de diferenciación para encontrar $f'(x)$. Luego use su calculadora gráfica para encontrar todos los ceros reales de $f'(x)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

53. $f(x) = e^{x^4 + 2x^2 - 4x}$.

54. $f(x) = \frac{x^2}{2} + e^{-x}$.

[5] W. W. Eaton y G. A. Whitmore, "Length of Stay as a Stochastic Process: A General Approach and Application to Hospitalization for Schizophrenia". *Journal of Mathematical Sociology*, 5 (1977), 273-292.

OBJETIVO Estudiar la noción de una función definida de manera implícita y determinar derivadas por medio de diferenciación implícita.

11.3 DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

La diferenciación implícita es una técnica para diferenciar funciones que no están dadas en la forma usual $y = f(x)$. Para presentar esta técnica, encontraremos la pendiente de una recta tangente a un círculo. Consideremos el círculo de radio 2, cuyo centro está en el origen (véase la fig. 11.2). Su ecuación es

$$x^2 + y^2 = 4,$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0. \quad (1)$$

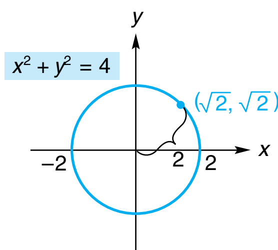


FIGURA 11.2 El círculo $x^2 + y^2 = 4$.

El punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ está en el círculo. Para encontrar la pendiente en este punto necesitamos encontrar dy/dx ahí. Hasta ahora, hemos tenido a y en forma explícita (directa) en términos de x antes de determinar y'; esto es, en la forma $y = f(x)$. En la ecuación (1) esto no es así. Decimos que la ecuación (1) tiene la forma $F(x, y) = 0$, donde $F(x, y)$ denota una función de dos variables. Lo que parece obvio es despejar y en la ecuación (1) en términos de x:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0,$$

$$y^2 = 4 - x^2,$$

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}. \quad (2)$$

Se presenta ahora un problema: la ecuación (2) puede dar dos valores de y para un solo valor de x. No define a y de manera explícita en función de x. Sin embargo, podemos suponer que la ecuación (1) define a y como una de dos funciones diferentes de x,

$$y = +\sqrt{4 - x^2} \quad \text{y} \quad y = -\sqrt{4 - x^2},$$

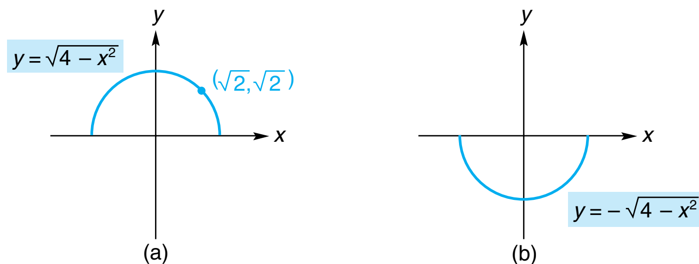


FIGURA 11.3 $x^2 + y^2 = 4$ da lugar a dos funciones diferentes de la variable x.

cuyas gráficas se muestran en la figura 11.3. Como el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ se encuentra en la gráfica de $y = \sqrt{4 - x^2}$, debemos diferenciar esa función:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4 - x^2}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}. \end{aligned}$$

Así,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2}} = -1.$$

Por lo que la pendiente del círculo $x^2 + y^2 - 4 = 0$ en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ es igual a -1.

Resumamos las dificultades que se han presentado. Primero, y no se dio al principio en forma explícita en términos de x. Segundo, después de que tratamos de encontrar alguna relación, terminamos con más de una función de x. De hecho, dependiendo de la ecuación dada, puede ser complicado o incluso imposible encontrar una expresión explícita para y. Por ejemplo, sería difícil despejar a y de la ecuación $y^{ex} + \ln(x + y) = 0$. Veremos ahora un método que evita tales dificultades.

Una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$, como la que teníamos originalmente, expresa a y como función de x en forma *implícita*. La palabra "implícita" se usa puesto que y no está dada de manera explícita como función de x. Sin embargo, se supone o queda *implicado* que la ecuación define a y por lo menos como una función diferenciable de x. Suponemos entonces que la ecuación (1), $x^2 + y^2 - 4 = 0$, define alguna función diferenciable de x, digamos $y = f(x)$. A continuación tratamos a y como una función de x y diferenciamos ambos miembros de la ecuación (1) con respecto a x. Por último, despejamos dy/dx del resultado. Aplicando este procedimiento, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 4) = \frac{d}{dx}(0),$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(4) = \frac{d}{dx}(0). \quad (3)$$

Sabemos que $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ y que tanto $\frac{d}{dx}(4)$ como $\frac{d}{dx}(0)$ son cero. Pero, $\frac{d}{dx}(y^2)$ **no** es $2y$, porque estamos diferenciando con respecto a x y no con respecto a y. Esto es, y no es la variable independiente. Como se supone que y es una función de x, y^2 tiene la forma u^n, donde y desempeña el papel de u. Así como la regla de la potencia establece que, $\frac{d}{dx}(u^2) = 2u\frac{du}{dx}$, tenemos $\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\frac{dy}{dx}$. De aquí que la ecuación (3) se transforma en

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Despejando dy/dx resulta

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \qquad (4)$$

Observe que la expresión para dy/dx contiene la variable y, así como la variable x. Esto significa que para encontrar dy/dx en un punto, ambas coordenadas del punto deben sustituirse en dy/dx. Así,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{2},\sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1, \text{ como antes.}$$

Este método para encontrar dy/dx se llama **diferenciación implícita.** Observamos que la ecuación (4) no está definida cuando $y = 0$. De manera geométrica esto es claro, ya que la recta tangente al círculo en $(2, 0)$ o $(-2, 0)$ es vertical y, por tanto, la pendiente no está definida.

A continuación se dan los pasos a seguir al diferenciar de manera implícita:

Procedimiento de diferenciación implícita

Para una ecuación que suponemos define implícitamente a y como una función diferenciable de x, la derivada $\frac{dy}{dx}$ puede encontrarse como sigue:

1. Diferencie ambos miembros de la ecuación con respecto a x.
2. Agrupe todos lo términos que contengan $\frac{dy}{dx}$ en un miembro de la ecuación y agrupe los demás términos en el otro miembro.
3. Saque $\frac{dy}{dx}$ como factor común en el miembro que contenga los términos $\frac{dy}{dx}$.
4. Despeje $\frac{dy}{dx}$.

EJEMPLO 1 Diferenciación implícita

Encontrar $\frac{dy}{dx}$ *por medio de diferenciación implícita si* $y + y^3 - x = 7$.

Solución: aquí y no está dada como función explícita de x [esto es, no está en la forma $y = f(x)$]. Por lo que, suponemos que y es una función implícita (diferenciable) de x y aplicamos el procedimiento anterior de cuatro pasos:

1. Diferenciamos ambos miembros con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}(y + y^3 - x) = \frac{d}{dx}(7),$$

$$\frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(7).$$

Ahora, $\frac{d}{dx}(y)$ puede escribirse $\frac{dy}{dx}$, y $\frac{d}{dx}(x) = 1$. Por la regla de la potencia,

La derivada de y^3 con respecto a x es $3y^2\frac{dy}{dx}$, no $3y^2$.

$$\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2\frac{dy}{dx}.$$

Obtenemos así

$$\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

2. Al agrupar todos los términos $\frac{dy}{dx}$ en el miembro izquierdo y los demás en el miembro derecho, resulta

$$\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = 1.$$

3. Si factorizamos $\frac{dy}{dx}$ en el miembro izquierdo, tenemos

$$\frac{dy}{dx}(1 + 3y^2) = 1.$$

En un problema de diferenciación implícita, somos capaces de encontrar la derivada de una función sin conocer a la función.

4. Despejamos $\frac{dy}{dx}$ dividiendo ambos miembros entre $1 + 3y^2$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + 3y^2}.$$

■ ***Principios en práctica 1***
Diferenciación implícita

Suponga que P, la proporción de gente afectada por cierta enfermedad, se describe por medio de $\ln\left(\frac{P}{1 - P}\right) = 0.5t$, donde t es el tiempo en meses. Encontrar $\frac{dP}{dt}$, la razón de cambio a la cual P crece con respecto al tiempo.

EJEMPLO 2 Diferenciación implícita

Encontrar $\frac{dy}{dx}$ *si* $x^3 + 4xy^2 - 27 = y^4$.

Solución: como y no está dada de manera explícita en términos de x, utilizamos el método de diferenciación implícita:

1. Suponemos que y es una función de x y diferenciamos ambos miembros con respecto a x, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 4xy^2 - 27) = \frac{d}{dx}(y^4),$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) + 4\frac{d}{dx}(xy^2) - \frac{d}{dx}(27) = \frac{d}{dx}(y^4).$$

Para encontrar $\frac{d}{dx}(xy^2)$ utilizamos la regla del producto:

$$3x^2 + 4\left[x\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{d}{dx}(x)\right] - 0 = 4y^3\frac{dy}{dx},$$

$$3x^2 + 4\left[x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2(1)\right] = 4y^3\frac{dy}{dx},$$

$$3x^2 + 8xy\frac{dy}{dx} + 4y^2 = 4y^3\frac{dy}{dx}.$$

2. Al agrupar los términos $\frac{dy}{dx}$ en el miembro izquierdo y los otros miembros en el lado derecho obtenemos

$$8xy\frac{dy}{dx} - 4y^3\frac{dy}{dx} = -3x^2 - 4y^2.$$

3. Factorizamos $\frac{dy}{dx}$ en el miembro izquierdo obtenemos

$$\frac{dy}{dx}(8xy - 4y^3) = -3x^2 - 4y^2.$$

4. Despejamos $\frac{dy}{dx}$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - 4y^2}{8xy - 4y^3} = \frac{3x^2 + 4y^2}{4y^3 - 8xy}.$$

Principios en práctica 2
Diferenciación implícita

El volumen V de un globo esférico está dado por la ecuación $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio del globo. Si el radio está creciendo a la velocidad de 5 pulgadas/minuto $\left(\text{esto es, } \frac{dr}{dt} = 5\right)$, entonces determine $\frac{dV}{dt}$, la razón de aumento del volumen del globo, cuando el radio es de 12 pulgadas.

EJEMPLO 3 Diferenciación implícita

Encontrar la pendiente de la curva $x^3 = (y - x^2)^2$ *en* $(1, 2)$.

Solución: la pendiente en $(1, 2)$ es el valor de dy/dx en ese punto. Encontraremos dy/dx por medio de diferenciación implícita. Tenemos

$$\frac{d}{dx}(x^3) = \frac{d}{dx}[(y - x^2)^2],$$

$$3x^2 = 2(y - x^2)\left(\frac{dy}{dx} - 2x\right),$$

$$3x^2 = 2\left(y\frac{dy}{dx} - 2xy - x^2\frac{dy}{dx} + 2x^3\right),$$

$$3x^2 = 2y\frac{dy}{dx} - 4xy - 2x^2\frac{dy}{dx} + 4x^3,$$

$$3x^2 + 4xy - 4x^3 = 2y\frac{dy}{dx} - 2x^2\frac{dy}{dx},$$

$$3x^2 + 4xy - 4x^3 = 2\frac{dy}{dx}(y - x^2),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4xy - 4x^3}{2(y - x^2)}.$$

Así, la pendiente de la curva en (1, 2) es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} = \frac{3(1)^2 + 4(1)(2) - 4(1)^3}{2[2 - (1)^2]} = \frac{7}{2}.$$

Principios en práctica 3

Diferenciación implícita

Una escalera de 10 pies de largo está recargada en una pared vertical. Suponga que la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a una velocidad constante de 3 pies/s. $\left(\text{Esto es, } \frac{dx}{dt} = 3.\right)$ ¿Qué tan rápido la parte superior de la escalera se desliza hacia abajo, cuando la parte superior de la escalera está a 8 pies (esto es cuando $y = 8$) del piso? (es decir, ¿cuánto es $\frac{dy}{dt}$?) (Utilice el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos, $x^2 + y^2 = z^2$, en donde x y y son los catetos del triángulo y z es la hipotenusa.)

EJEMPLO 4 Diferenciación implícita

Si $q - p = \ln q + \ln p$, encuentre dq/dp.

Solución: suponemos que q es una función de p y diferenciamos ambos miembros de la ecuación con respecto a p:

$$\frac{d}{dp}(q) - \frac{d}{dp}(p) = \frac{d}{dp}(\ln q) + \frac{d}{dp}(\ln p),$$

$$\frac{dq}{dp} - 1 = \frac{1}{q}\frac{dq}{dp} + \frac{1}{p},$$

$$\frac{dq}{dp} - \frac{1}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{1}{p} + 1,$$

$$\frac{dq}{dp}\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{p} + 1,$$

$$\frac{dq}{dp}\left(\frac{q-1}{q}\right) = \frac{1+p}{p} \quad \text{(simplificando),}$$

$$\frac{dq}{dp} = \frac{(1+p)q}{p(q-1)}.$$

Ejercicio 11.3

En los problemas del 1 al 24 encuentre dy/dx por medio de diferenciación implícita.

1. $x^2 + 4y^2 = 4.$
2. $3x^2 + 6y^2 = 1.$
3. $3y^4 - 7x = 0.$
4. $2x^2 - 3y^2 = 4.$
5. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3.$
6. $x^{1/5} + y^{1/5} = 4.$
7. $x^{3/4} + y^{3/4} = 5.$
8. $y^3 = 4x.$
9. $xy = 4.$
10. $x + xy - 2 = 0.$
11. $xy - y - 11x = 5.$
12. $x^2 + y^2 = 2xy + 3.$
13. $2x^3 + y^3 - 12xy = 0.$
14. $2x^3 + 3xy + y^3 = 0.$
15. $x = \sqrt{y} + \sqrt[4]{y}.$
16. $x^3y^3 + x = 9.$
17. $3x^2y^3 - x + y = 25.$
18. $y^2 + y = \ln x.$
19. $y \ln x = xe^y.$
20. $\ln(xy) + x = 4.$
21. $xe^y + y = 13.$
22. $ax^2 - by^2 = c.$
23. $(1 + e^{3x})^2 = 3 + \ln(x + y).$
24. $y^2 = \ln(x + y).$

25. Si $x + xy + y^2 = 7$, encuentre dy/dx en (1, 2).

26. Si $x\sqrt{y+1} = y\sqrt{x+1}$, encuentre dy/dx en (3, 3).

27. Encuentre la pendiente de la curva $4x^2 + 9y^2 = 1$ en el punto $\left(0, \frac{1}{3}\right)$; y también en (x_0, y_0).

28. Encuentre la pendiente de la curva $(x^2 + y^2)^3 = 16y^2$ en el punto (0, 2).

29. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

$$x^3 + y^2 = 3$$

en el punto (−1, 2).

30. Repita el problema 29 para la curva

$$y^2 + xy - x^2 = 5$$

en el punto (4, 3).

Para las ecuaciones de demanda en los problemas del 31 al 34 encuentre la razón de cambio de q con respecto a p.

31. $p = 100 - q^2$.

32. $p = 400 - \sqrt{q}$.

33. $p = \dfrac{20}{(q+5)^2}$.

34. $p = \dfrac{20}{q^2+5}$.

---

35. Radiactividad La actividad relativa I/I_0 de un elemento readiactivo varía con el tiempo transcurrido de acuerdo con la ecuación

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\lambda t,$$

donde λ (una letra griega que se lee “lambda”) es la *constante* de desintegración e I_0 es la intensidad inicial (una constante). Encuentre la razón de cambio de la intensidad I con respecto al tiempo transcurrido t.

36. Física Para una estrella cuya brillantez no es muy diferente de la de nuestro Sol, la relación entre su masa m y su luminosidad L está dada por

$$\log m = 0.06 + 0.26 \log L.$$

a. Encuentre dm/dL por diferenciación implícita.
b. Suponga ahora que la masa de una estrella está cambiando con respecto al tiempo t a razón de dm/dt. Encuentre una expresión para dL/dt, la razón correspondiente de cambio en la luminosidad.

37. Sismos La magnitud M de un sismo y su energía E están relacionadas por la ecuación[6]

$$1.5\, M = \log\left(\frac{E}{2.5 \times 10^{11}}\right).$$

Aquí M está dada en términos de la escala de Richter de 1958 y E está en ergios. Determine la razón de cambio de la energía con respecto a la magnitud.

38. Escala física La relación entre la velocidad (v), la frecuencia (f) y la longitud de onda (λ) de cualquier onda está dada por

$$v = f\lambda.$$

Encuentre $df/d\lambda$ por diferencia implícita. (Trate a v como constante.) Luego demuestre que el mismo resultado se obtiene si primero se despeja f y enseguida se diferencia con respecto a λ.

39. Física La relación entre la temperatura T y el volumen V cuando cierto gas queda sometido a un proceso adiabático está dada por

$$TV^{0.4} = 1500.$$

Encuentre la razón de cambio del volumen con respecto a la temperatura.

40. Biología La ecuación $(P + a)(v + b) = k$ se llama “ecuación fundamental de la contracción muscular”.[7] Aquí P es la carga impuesta al músculo, v la velocidad del acortamiento de las fibras del músculo, y a, b y k son constantes positivas. Use diferenciación implícita para mostrar que dv/dP, en términos de P, está dada por

$$\frac{dv}{dP} = -\frac{k}{(P+a)^2}.$$

41. Propensión marginal al consumo Los ahorros S de un país se definen implícitamente en términos de su ingreso nacional I por medio de la ecuación

$$S^2 + \frac{1}{4}I^2 = SI + I,$$

donde S e I están en miles de millones de dólares. Encuentre la propensión marginal al *consumo* cuando $I = 16$ y $S = 12$.

42. Sustitución tecnológica Tecnologías o productos nuevos suelen reemplazar a los viejos. Por ejemplo, la mayoría de las aerolíneas comerciales usan actualmente motores de reacción en vez de motores de hélice. En su análisis de pronósticos de la sustitución tecnológica, Hurter y Rubenstein[8] se refieren a la ecuación

$$\ln \frac{f(t)}{1 - f(t)} + \sigma \frac{1}{1 - f(t)} = C_1 + C_2 t,$$

donde $f(t)$ es la participación en el mercado del sustituto en un tiempo t y C_1, C_2 y σ (letra griega que se lee “sigma”) son constantes. Verifique la afirmación de que la razón de sustitución está dada por

$$f'(t) = \frac{C_2\, f(t)[1 - f(t)]^2}{\sigma f(t) + [1 - f(t)]}.$$

[6] K. E. Bullen, *An Introduction to the Theory of Seismology* (Cambridge en la University Press, 1963).

[7] R.W. Stacy et al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

[8] A. P Hurter, Jr., A. H. Rubenstein, et al., “Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature”, *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 197-221.

OBJETIVO Describir el método de diferenciación logarítmica y mostrar cómo diferenciar una función de la forma u^v.

11.4 Diferenciación logarítmica

Existe una técnica llamada **diferenciación logarítmica,** que con frecuencia simplifica la diferenciación de $y = f(x)$ cuando $f(x)$ contiene productos, cocientes o potencias. El procedimiento es como sigue:

Diferenciación logarítmica

Para diferenciar $y = f(x)$,

1. Tome el logaritmo natural de ambos miembros de la ecuación. Esto resulta en
$$\ln y = \ln[f(x)].$$
2. Simplifique $\ln[f(x)]$ por medio de las propiedades de los logaritmos.
3. Diferencie ambos miembros con respecto a x.
4. Despeje $\frac{dy}{dx}$.
5. Exprese la respuesta sólo en términos de x. Esto requiere sustituir $f(x)$ por y.

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 1 Diferenciación logarítmica

Encontrar y' si $y = \frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}$.

Solución: la diferenciación de esta función en la manera usual es engorrosa, porque implica las reglas del cociente, de la potencia y del producto. La diferenciación logarítmica simplifica el trabajo.

1. Tomamos logaritmos naturales en ambos miembros,
$$\ln y = \ln \frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}.$$
2. Simplificamos por medio de las propiedades de los logaritmos
$$\ln y = \ln(2x-5)^3 - \ln[x^2\sqrt[4]{x^2+1}]$$
$$= \ln(2x-5)^3 - [\ln x^2 + \ln(x^2+1)^{1/4}],$$
$$\ln y = 3\ln(2x-5) - 2\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+1).$$
3. Al diferenciar con respecto a x se obtiene
$$\frac{1}{y}y' = 3\left(\frac{1}{2x-5}\right)(2) - 2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(2x),$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{6}{2x-5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

Como y es una función de x, al diferenciar $\ln y$ con respecto a x se obtiene $\frac{1}{y}y'$.

4. Al despejar y' resulta
$$y' = y\left[\frac{6}{2x-5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)}\right].$$

5. Sustituimos la expresión inicial para y y obtenemos y' sólo en términos de x:

$$y' = \frac{(2x - 5)^3}{x^2 \sqrt[4]{x^2 + 1}} \left[\frac{6}{2x - 5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2 + 1)} \right].$$

La diferenciación logarítmica puede usarse también para diferenciar funciones de la forma $\boldsymbol{y = u^v}$, donde u y v son funciones diferenciables de x. Como la base y el exponente no son necesariamente constantes, las técnicas de diferenciación para u^n y a^u no se aplican aquí.

EJEMPLO 2 Diferenciación de la forma $\boldsymbol{u^v}$

Diferenciar $y = x^x$ usando la diferenciación logarítmica.

Solución: esta función es de la forma $y = u^v$, donde u y v son funciones de x. Si tomamos logaritmos naturales de ambos miembros resulta $\ln y = \ln x^x$ o bien

$$\ln y = x \ln x.$$

Diferenciando ambos miembros con respecto a x se obtiene

$$\frac{1}{y} y' = x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1),$$

$$\frac{y'}{y} = 1 + \ln x.$$

Despejamos y' y sustituimos y por x^x, obtenemos

$$y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x).$$

Vale la pena mencionar que una técnica alternativa para diferenciar una función de la forma $y = u^v$ es convertirla en una función exponencial con base e. Por ejemplo, para la función del ejemplo 2, tenemos

$$y = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x},$$

$$y' = e^{x \ln x}\left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x\right)$$

$$= x^x(1 + \ln x).$$

EJEMPLO 3 Diferenciación de la forma $\boldsymbol{u^v}$

Encontrar la derivada de $y = (1 + e^x)^{\ln x}$.

Solución: ésta tiene la forma $y = u^v$, donde $u = 1 + e^x$ y $v = \ln x$. Por medio de la diferenciación logarítmica se obtiene

$$\ln y = \ln[(1 + e^x)^{\ln x}],$$

$$\ln y = (\ln x) \ln(1 + e^x),$$

$$\frac{1}{y}y' = (\ln x)\left[\frac{1}{1+e^x}\cdot e^x\right] + [\ln(1+e^x)]\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{e^x \ln x}{1+e^x} + \frac{\ln(1+e^x)}{x},$$

$$y' = y\left[\frac{e^x \ln x}{1+e^x} + \frac{\ln(1+e^x)}{x}\right],$$

$$y' = (1+e^x)^{\ln x}\left[\frac{e^x \ln x}{1+e^x} + \frac{\ln(1+e^x)}{x}\right].$$

Después de terminar esta sección, usted deberá entender cómo diferenciar las siguientes formas:

$$y = \begin{cases} [f(x)]^n, & \text{(a)} \\ a^{f(x)}, & \text{(b)} \\ [f(x)]^{g(x)}. & \text{(c)} \end{cases}$$

Para el tipo (a) puede utilizar la regla de la potencia. Para el tipo (b) utilice la fórmula de diferenciación de funciones exponenciales [si $a \neq e$, convierta primero $a^{f(x)}$ en una función e^u]. Para el tipo (c) utilice diferenciación logarítmica o primero convierta la función en una función e^u. No emplee una regla en situaciones en que no sea aplicable. Por ejemplo, la derivada de x^x no es $x \cdot x^{x-1}$.

Ejercicio 11.4

En los problemas del 1 al 12 encuentre y′ por medio de la diferenciación logarítmica.

1. $y = (x+1)^2(x-2)(x^2+3)$.

2. $y = (3x+4)(8x-1)^2(3x^2+1)^4$.

3. $y = (3x^3-1)^2(2x+5)^3$.

4. $y = (3x+1)\sqrt{8x-1}$.

5. $y = \sqrt{x+1}\sqrt{x^2-2}\sqrt{x+4}$.

6. $y = (x+2)\sqrt{x^2+9}\sqrt[3]{6x+1}$.

7. $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-2x}$.

8. $y = \sqrt{\dfrac{x^2+5}{x+9}}$.

9. $y = \dfrac{(2x^2+2)^2}{(x+1)^2(3x+2)}$.

10. $y = \dfrac{x(1+x^2)^2}{\sqrt{2+x^2}}$.

11. $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x+1)}{3x-4}}$.

12. $y = \sqrt[3]{\dfrac{6(x^3+1)^2}{x^6e^{-4x}}}$.

En los problemas del 13 al 20 determine y′.

13. $y = x^{2x+1}$.

14. $y = (2x)^{\sqrt{x}}$.

15. $y = x^{1/x}$.

16. $y = \left(\dfrac{2}{x}\right)^x$.

17. $y = (3x+1)^{2x}$.

18. $y = 4x^{x^2}$.

19. $y = 4e^x x^{3x}$.

20. $y = (\ln x)^{e^x}$.

21. Si $y = (4x-3)^{2x+1}$, encuentre dy/dx cuando $x = 1$.

22. Si $y = (\ln x)^{\ln x}$, encuentre dy/dx cuando $x = e$.

23. Determine una ecuación de la recta tangente a

$$y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^2$$

en el punto en donde $x = 0$.

24. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$y = e^x(-x)^x$$

en el punto en donde $x = -1$.

25. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$y = 3e^x(x^2-x+1)^x$$

en el punto en donde $x = 1$.

26. Si $y = x^{2x}$, determine la razón de cambio relativa de y con respecto a x, cuando $x = 2$.

27. Si $y = (3x)^{-2x}$, determine el valor de x para el que la razón *porcentual* de cambio de y con respecto a x es 60.

28. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones positivas y diferenciables y $y = [f(x)]^{g(x)}$. Utilice diferenciación logarítmica para demostrar que

$$\frac{dy}{dx} = [f(x)]^{g(x)}\left(f'(x)\frac{g(x)}{f(x)} + g'(x)\ln[f(x)]\right).$$

OBJETIVO Determinar las derivadas de orden superior explícita e implícitamente.

11.5 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Sabemos que la derivada de una función $y = f(x)$ es a su vez una función $f'(x)$. Si diferenciamos $f'(x)$, la función resultante se llama **segunda derivada** de f con respecto a x. Se denota como $f''(x)$, que se lee "f doble prima de x". De manera similar, la derivada de la segunda derivada se llama **tercera derivada** y se escribe $f'''(x)$. Continuando de esta manera, obtenemos *derivadas de orden superior*. En la tabla 11.1, se indican algunos de los símbolos utilizados para representarlas. Para derivadas de orden superior al tercero, no se usan primas en su representación.

TABLA 11.1

Primera derivada	y',	$f'(x)$,	$\frac{dy}{dx}$,	$\frac{d}{dx}[f(x)]$,	$D_x y$
Segunda derivada	y'',	$f''(x)$,	$\frac{d^2y}{dx^2}$,	$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$,	$D_x^2 y$
Tercera derivada	y''',	$f'''(x)$,	$\frac{d^3y}{dx^3}$,	$\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$,	$D_x^3 y$
Cuarta derivada	$y^{(4)}$,	$f^{(4)}(x)$,	$\frac{d^4y}{dx^4}$,	$\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$,	$D_x^4 y$



Advertencia El símbolo d^2y/dx^2 representa la segunda derivada de y. No es lo mismo que $(dy/dx)^2$, que es el cuadrado de la primera derivada de y. Esto es,

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

EJEMPLO 1 Encontrar derivadas de orden superior

a. *Si* $f(x) = 6x^3 - 12x^2 + 6x - 2$, *encontrar todas sus derivadas de orden superior.*

Solución: al diferenciar $f(x)$ resulta

$$f'(x) = 18x^2 - 24x + 6.$$

Al diferenciar $f'(x)$ resulta

$$f''(x) = 36x - 24.$$

De manera similar,

$$f'''(x) = 36,$$
$$f^{(4)}(x) = 0.$$

Todas las derivadas sucesivas son también cero: $f^{(5)}(x) = 0$, etcétera.

b. *Si* $f(x) = 7$, *encontrar* $f''(x)$.

Solución:

$$f'(x) = 0,$$
$$f''(x) = 0.$$

Principios en práctica 1

Determinación de una derivada de segundo orden

La altura *h(t)* de un piedra que se deja caer desde un edificio de 200 pies de altura, está dada por $h(t) = 200 - 16t^2$, en donde t es el tiempo medido en segundos. Determine $\frac{d^2h}{dt^2}$, la aceleración de la piedra en el instante t.

EJEMPLO 2 Determinación de una derivada de segundo orden

Si $y = e^{x^2}$*, encontrar* $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}(2x) = 2xe^{x^2}.$$

Por la regla del producto,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2[x(e^{x^2})(2x) + e^{x^2}(1)] = 2e^{x^2}(2x^2 + 1).$$

Principios en práctica 2

Evaluación de una derivada de segundo orden

Si el costo de producir q unidades de un producto es

$$c(q) = 7q^2 + 11q + 19$$

y la función de costo marginal es $c'(q)$, determine la razón de cambio de la función de costo marginal con respecto a q cuando $q = 3$.

EJEMPLO 3 Evaluación de una derivada de segundo orden

Si $y = f(x) = \frac{16}{x + 4}$*, encontrar* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *y evaluarla cuando* $x = 4$.

Solución: como $y = 16(x + 4)^{-1}$, la regla de la potencia nos da

$$\frac{dy}{dx} = -16(x + 4)^{-2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 32(x + 4)^{-3} = \frac{32}{(x + 4)^3}.$$

Evaluando cuando $x = 4$, obtenemos

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=4} = \frac{32}{8^3} = \frac{1}{16}.$$

La segunda derivada evaluada en $x = 4$, se denota también como $f''(4)$ o $y''(4)$.

EJEMPLO 4 Determinación de la razón de cambio de $f''(x)$

Si $f(x) = x \ln x$*, encontrar la razón de cambio de* $f''(x)$.

La razón de cambio de $f''(x)$ es $f'''(x)$.

Solución: para encontrar la razón de cambio de cualquier función, debemos encontrar su derivada. Así, queremos la derivada de $f''(x)$, que es $f'''(x)$. De acuerdo con esto,

$$f'(x) = x\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x,$$

$$f''(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Diferenciación implícita de orden superior

Encontraremos ahora una derivada de orden superior por medio de diferenciación implícita. Recuerde que suponemos que y es una función de x.

EJEMPLO 5 Diferenciación implícita de orden superior

Encontrar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ *si* $x^2 + 4y^2 = 4$.

Solución: al diferenciar ambos miembros con respecto a x, obtenemos

$$2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}, \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4y\dfrac{d}{dx}(-x) - (-x)\dfrac{d}{dx}(4y)}{(4y)^2}$$

$$= \frac{4y(-1) - (-x)\left(4\dfrac{dy}{dx}\right)}{16y^2}$$

$$= \frac{-4y + 4x\dfrac{dy}{dx}}{16y^2}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y + x\dfrac{dy}{dx}}{4y^2} \quad (2)$$

Aunque hemos encontrado una expresión para d^2y/dx^2, nuestra respuesta contiene la derivada dy/dx. Es costumbre expresar la respuesta sin la derivada, esto es, sólo en términos de x y y. Esto se hace con facilidad. De la ecuación (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{4y}$, por lo que al sustituir este valor en la ecuación (2), obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y + x\left(\dfrac{-x}{4y}\right)}{4y^2} = \frac{-4y^2 - x^2}{16y^3} = -\frac{4y^2 + x^2}{16y^3}.$$

Podemos simplificar aún más la respuesta. Como $x^2 + 4y^2 = 4$ (ecuación original),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{16y^3} = -\frac{1}{4y^3}.$$

En el ejemplo 5 no es rara la simplificación de d^2y/dx^2 por medio del uso de la ecuación original.

EJEMPLO 6 Diferenciación implícita de orden superior

Encontrar $\frac{d^2y}{dx^2}$ *si* $y^2 = e^{x+y}$.

Solución: al diferenciar ambos miembros con respecto a x se obtiene

$$2y\frac{dy}{dx} = e^{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right).$$

Despejando dy/dx, obtenemos

$$2y\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + e^{x+y}\frac{dy}{dx},$$

$$2y\frac{dy}{dx} - e^{x+y}\frac{dy}{dx} = e^{x+y},$$

$$(2y - e^{x+y})\frac{dy}{dx} = e^{x+y},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y}}{2y - e^{x+y}}.$$

Como $y^2 = e^{x+y}$ (ecuación original),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2y - y^2} = \frac{y}{2 - y}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2 - y)\frac{dy}{dx} - y\left(-\frac{dy}{dx}\right)}{(2 - y)^2} = \frac{2\frac{dy}{dx}}{(2 - y)^2}.$$

Ahora expresamos la respuesta sin dy/dx. Como $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2 - y}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\left(\frac{y}{2 - y}\right)}{(2 - y)^2} = \frac{2y}{(2 - y)^3}.$$

Ejercicio 11.5

En los problemas del 1 al 20 encuentre las derivadas indicadas.

1. $y = 4x^3 - 12x^2 + 6x + 2, \quad y'''.$

2. $y = 2x^4 - 6x^2 + 7x - 2, \quad y'''.$

3. $y = 8 - x, \quad \frac{d^2y}{dx^2}.$

4. $y = -x - x^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2}.$

5. $y = x^3 + e^x, \quad y^{(4)}.$

6. $f(q) = \ln q, \quad f'''(q).$

7. $f(x) = x^2 \ln x, \quad f''(x).$

8. $y = \frac{1}{x}, \quad y'''.$

9. $f(p) = \frac{1}{6p^3}, \quad f'''(p).$

10. $f(x) = \sqrt{x}, \quad f''(x).$

11. $f(r) = \sqrt{9 - r}, \quad f''(r).$

12. $y = e^{-4x^2}, \quad y''.$

13. $y = \frac{1}{5x - 6}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}.$

14. $y = (2x + 1)^4, \quad y''.$

15. $y = \frac{x+1}{x-1}$, y''.

16. $y = 2x^{1/2} + (2x)^{1/2}$, y''.

17. $y = \ln[x(x+6)]$, y''.

18. $y = \ln\frac{(2x-3)(4x-1)}{x+3}$, y''.

19. $f(z) = z^2e^z$, $f''(z)$.

20. $y = \frac{x}{e^x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

21. Si $y = e^{2x}$, encuentre $\left.\frac{d^5y}{dx^5}\right|_{x=0}$.

22. Si $y = e^{2\ln(x^3+1)}$, encuentre y'' cuando $x = 1$.

En los problemas del 23 al 32 determine y''.

23. $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$.

24. $x^2 - y^2 = 16$.

25. $y^2 = 4x$.

26. $4x^2 + 3y^2 = 4$.

27. $\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 4$.

28. $y^2 - 6xy = 4$.

29. $xy + y - x = 4$.

30. $xy + y^2 = 1$.

31. $y = e^{x+y}$.

32. $e^x - e^y = x^2 + y^2$.

---

33. Si $x^2 + 8y = y^2$, encuentre d^2y/dx^2 cuando $x = 3$ y $y = -1$.

34. Demuestre que la ecuación

$$f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 0$$

satisface si $f(x) = (3x - 5)e^{-2x}$.

35. Encuentre la razón de cambio de $f'(x)$ si $f(x) = (5x - 3)^4$.

36. Encuentre la razón de cambio de $f''(x)$ si

$$f(x) = 6\sqrt{x} + \frac{1}{6\sqrt{x}}.$$

37. Costo marginal Si $c = 0.3q^2 + 2q + 850$ es una función de costo, ¿qué tan rápido está cambiando el costo marginal cuando $q = 100$?

38. Ingreso marginal Si $p = 1000 - 45q - q^2$ es una ecuación de demanda, ¿qué tan rápido está cambiando el ingreso marginal cuando $q = 10$?

39. Si $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5x - 6$, determine los valores de x para los que $f''(x) = 0$.

40. Suponga que $e^y = y^2e^x$. (a) Determine dy/dx y exprese su respuesta sólo en términos de y. (b) Determine d^2y/dx^2 y exprese su respuesta sólo en términos de y.

En los problemas 41 y 42 determine $f''(x)$. Luego use su calculadora gráfica para encontrar todos los ceros de $f''(x)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

41. $f(x) = 6e^x - x^3 - 15x^2$.

42. $f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{6} + \frac{x^2}{2}$.

11.6 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 11.3 diferenciación implícita

Sección 11.4 diferenciación logarítmica

Sección 11.5 derivadas de orden superior, $f''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$, y así sucesivamente

Resumen

Si una ecuación define de manera implícita a y como función de x [en vez de definirla en forma explícita, en la forma $y = f(x)$], entonces dy/dx puede encontrarse por diferenciación implícita. Con este método, tratamos a y como una función de x y diferenciamos ambos miembros de la ecuación con respecto a x. Al hacer esto, recuerde que

$$\frac{d}{dx}(y^n) = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}.$$

Por último, despejamos de la ecuación a dy/dx.

Las fórmulas para derivar logaritmos naturales y funciones exponenciales son

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

y

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}.$$

Para diferenciar funciones logarítmicas y exponenciales con base diferente a e, primero la función puede transformarse a base e y luego diferenciarse el resultado. De manera alterna, pueden aplicarse las fórmulas de diferenciación

$$\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{(\ln b)u} \cdot \frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u(\ln a)\frac{du}{dx}.$$

Suponga que $f(x)$ consiste en productos, cocientes o potencias. Para diferenciar $y = \log_b [f(x)]$, puede ser conveniente usar las propiedades de los logaritmos para reescribir $\log_b [f(x)]$ en términos de logaritmos más sencillos y luego diferenciar esa forma. Para diferenciar $y = f(x)$, donde $f(x)$ consiste en productos, cocientes o potencias, puede utilizarse el método de diferenciación logarítmica. En este método, tomamos el logaritmo natural de ambos miembros de $y = f(x)$ para obtener $\ln y = \ln[f(x)]$. Después de simplificar $\ln[f(x)]$ por medio de las propiedades de los logaritmos, diferenciamos ambos miembros de $\ln y = \ln[f(x)]$ con respecto a x y luego despejamos y'. La diferenciación logarítmica se utiliza también para diferenciar $y = u^v$, donde u y v son funciones de x.

Como la derivada $f'(x)$ de una función $y = f(x)$ es a su vez una función, podemos diferenciarla de manera sucesiva para obtener la segunda derivada $f''(x)$, la tercera derivada $f'''(x)$ y otras derivadas de orden superior.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 30 diferencie las funciones dadas.

1. $y = 2e^x + e^2 + e^{x^2}$.

2. $f(w) = we^w + w^2$.

3. $f(r) = \ln(r^2 + 5r)$.

4. $y = e^{\ln x}$.

5. $y = e^{x^2+4x+5}$.

6. $f(t) = \log_6\sqrt{t^2 + 1}$.

7. $y = e^x(x^2 + 2)$.

8. $y = 2^{7x^2}$.

9. $y = \sqrt{(x - 6)(x + 5)(9 - x)}$.

10. $f(t) = e^{\sqrt{t}}$.

11. $y = \frac{\ln x}{e^x}$.

12. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{x^2}$.

13. $f(q) = \ln[(q + 1)^2(q + 2)^3]$.

14. $y = (x - 6)^4(x + 4)^3(6 - x)^2$.

15. $y = 10^{2-7x}$.

16. $y = (e + e^2)^0$.

17. $y = \frac{4e^{3x}}{xe^{x-1}}$.

18. $y = \frac{e^x}{\ln x}$.

19. $y = \log_2(8x + 5)^2$.

20. $y = \ln\left(\frac{2}{x}\right)$.

21. $f(l) = \ln(1 + l + l^2 + l^3)$.

22. $y = x^{x^3}$.

23. $y = (x + 1)^{x+1}$.

24. $y = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$.

25. $f(t) = \ln(t^2\sqrt{2 - t})$.

26. $y = (x + 3)^{\ln x}$.

27. $y = \frac{(x^2 + 2)^{3/2}(x^2 + 9)^{4/9}}{(x^3 + 6x)^{4/11}}$

28. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

29. $y = (x^x)^x$.

30. $y = x^{(x^x)}$.

En los problemas del 31 al 34 evalúe y′ en el valor dado de x.

31. $y = (x + 1)\ln x^2, \quad x = 1$.

32. $y = \frac{e^{x^2-4}}{\sqrt{x + 7}}, \quad x = 2$.

33. $y = e^{e+x\ln(1/x)}, \quad x = e$.

34. $y = \left[\frac{4^{3x}(x^3 - x + 1)^{1/5}}{(x^2 + x + 1)^4}\right]^{-2}, \quad x = 0$.

En los problemas 35 y 36 encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor dado de x.

35. $y = 3e^x, \quad x = \ln 2$.

36. $y = x + x^2 \ln x, \quad x = 1$.

---

37. Encuentre la intersección con el eje y de la recta tangente a la gráfica de $y = x(2^{2-x^2})$ en el punto en que $x = 1$.

38. Si $w = 5^{x+1} + \ln(1 - x^2)$ y

$$x = \log_5(t^2 + 4) - e^{(t-1)^2},$$

encuentre w y dw/dt cuando $t = 1$. Simplifique sus respuestas.

En los problemas del 39 al 42 encuentre la derivada indicada en el punto dado.

39. $y = e^{x^2-4}, \quad y'', \quad (2, 1).$

40. $y = x^2e^x, \quad y''', \quad (1, e).$

41. $y = \ln(2x), \quad y''', \quad (1, \ln 2).$

42. $y = x \ln x, \quad y'', \quad (1, 0).$

En los problemas del 43 al 46 encuentre dy/dx.

43. $2xy + y^2 = 10.$

44. $x^2y^2 = 1.$

45. $\ln(xy^2) = xy.$

46. $(\ln y)e^{y \ln x} = e^2.$

En los problemas 47 y 48 encuentre d^2y/dx^2 en el punto dado.

47. $x + xy + y = 5, \quad (2, 1).$

48. $xy + y^2 = 2, \quad (-1, 2).$

49. Si y se define implícitamente por $e^y = (y + 1)e^x$, determine dy/dx y d^2y/dx^2 sólo como funciones explícitas de y.

50. Si $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$, demuestre que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 2x^{-3/2}.$$

51. Esquizofrenia Se han usado varios modelos para analizar la permanencia en un hospital. Para un grupo particular de esquizofrénicos, un modelo es[9]

$$f(t) = 1 - (0.8e^{-0.01t} + 0.2e^{-0.0002t}),$$

donde $f(t)$ es la proporción del grupo que fue dado de alta al final de t días de hospitalización. Determine la razón de altas (proporción de altas por día) al término de t días.

52. *Si* $f(x) = e^{9x^4+4x^3-36x}$, encuentre todos los ceros reales de $f'(x)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

53. Si $f(x) = \frac{x^5}{10} + \frac{x^4}{12} + \frac{2x^3}{3} + x^2 + 3$, encuentre todos los ceros de $f''(x)$. Redondee sus respuestas a dos decimales.

[9] Adaptado de W. W. Eaton y G. A. Whitmore, "Length of Stay as a Stochastic Process: A General Approach and Application to Hospitalization for Schizophrenia", *Journal of Mathematical Sociology*, 5 (1977), 273-292.

Aplicación práctica

Cambio de la población con respecto al tiempo



Ahora que sabemos cómo encontrar la derivada de una función, podríamos preguntarnos si hay una manera de efectuar el proceso en sentido inverso, es decir, encontrar una función, dada su derivada. Eso es lo que concierne a la integración (capítulos 14 y 15). Pero, mientras tanto podemos usar la derivada de una función para encontrar la función de manera *aproximada*, aun sin el conocimiento de cómo hacer la integración.

Para ilustrar, suponga que deseamos describir la población de un pequeño pueblo con respecto al tiempo, el cual se encuentra situado en un área fronteriza. Imagine que las cosas que sabemos acerca del pueblo son hechos de cómo su población, P, cambia a lo largo del tiempo, t, con la población medida en número de personas y el tiempo en años:

1. Los nacimientos exceden a las defunciones, de modo que en el transcurso de un año existe un 25% de incremento en la población antes que otros factores se tomen en cuenta. Así, el cambio anual debido a la diferencia entre nacimientos/defunciones es $0.25P$.
2. Cada año, de los viajeros que ingresan al pueblo, 10 deciden detenerse y establecerse. Esto contribuye con una constante de 10 al cambio anual.
3. La soledad provoca que algunas personas salgan del pueblo cuando éste es demasiado pequeño para ellas. En el caso extremo, el 99% de las personas saldrán en el transcurso de un año si ellas se siente solas (población = 1). Cuando la población es 100, 10% de los residentes emigran al año debido a la soledad.

   Suponiendo una relación exponencial, escribimos la probabilidad de que una persona dada abandone el pueblo en el transcurso de un año debido a la soledad, como Ae^{-kP}, donde A y k son constantes positivas. Los números nos indican que $Ae^{-k\cdot 1} = 0.99$ y $ae^{-k\cdot 100} = 0.10$. Resolviendo este par de ecuaciones para A y k se obtiene

   $$k = \frac{\ln 9.9}{99} \approx 0.02316$$

   y

   $$A = 0.99e^{(\ln 9.9)/99} \approx 1.01319.$$

Y si Ae^{-kP} es la probabilidad de que una sola persona emigre, el cambio de la población por año debida a soledad es $-P$ veces eso, es decir, $-1.01319Pe^{-0.02316P}$ (el signo negativo es debido a que el cambio es hacia abajo).

4. La aglomeración provoca que algunas personas emigren cuando el pueblo es demasiado grande para ellas. Nadie tiene problema de aglomeración cuando están solos (población = 1), pero cuando la población es 100, 10% de los residentes emigran al año debido a la aglomeración.

   Nuevamente, suponiendo una relación exponencial, escribimos la probabilidad de que una persona emigre en el transcurso de un año debido a la aglomeración como $1 - Ae^{-kP}$. Esta vez, los números nos dicen que $1 - Ae^{-k\cdot 1} = 0$ y $1 - Ae^{-k\cdot 100} = 0.10$. Resolviendo este par de ecuaciones para A y k se obtiene

   $$k = -\frac{\ln 0.9}{99} \approx 0.001064$$

   y

   $$A = e^{-(\ln 0.9)/99} \approx 1.001065.$$

   Si $1 - Ae^{-kP}$ es la probabilidad de la emigración de una sola persona, entonces el cambio de la población por año debido a la aglomeración es $-P$ veces eso, es decir, $-P(1 - 1.001065e^{-0.001064P})$.

Ahora, la tasa global de cambio en la población es el efecto neto de todos estos factores reunidos. En forma de ecuación,

$$\frac{dP}{dt} = 0.25P + 10 - 1.01319Pe^{-0.02316P}$$

$$-P(1 - 1.001065e^{-0.001064P}).$$

Antes de intentar reconstruir la función $P(t)$, hacemos la gráfica de la derivada. En una calculadora gráfica esto se ve como se muestra en la figura 11.4. Observe que $\frac{dP}{dt}$ está descrita como una función de P. Esta gráfica es diferente de la que hubiésemos obtenido si conociésemos a P como una función de t, determinado su derivada y graficado en la manera estándar, es decir, como función de t. No obstante, esta gráfica revela algunos hechos significativos. Primero, la deri-

vada es positiva desde $P = 0$ hasta $P = 311$; esto significa que la población tendrá un crecimiento positivo en todo ese rango y, por tanto, podemos esperar que crezca desde cero hasta una comunidad sustancial.

El crecimiento desciende a cerca de cero cuando $P = 30$. Aparentemente, cuando la población aún es pequeña, las emigraciones debido a la soledad hacen que el crecimiento casi se detenga. Pero, una vez que el pueblo ha pasado por esa fase, su tamaño se incre-

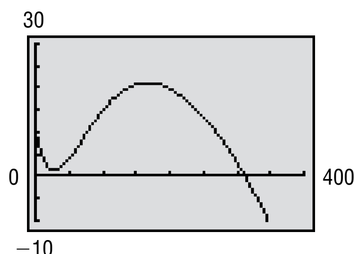


FIGURA 11.4 $\frac{dP}{dt}$ como una función de P.

menta de manera estable, en un punto (alrededor de $P = 170$) donde se agregan 21 personas por año.

Por último, las emigraciones debido a la aglomeración empiezan a infligir bajas. Por arriba de 312, la derivada es negativa. Esto significa que si la población fluctuase por encima de 312, entonces regresaría a ese nivel. En resumen, la población de este pueblo se estabiliza en 311 o 312, no es exactamente una ciudad, pero esto es después de todo, un ambiente fronterizo.

Si ahora deseamos graficar la población del pueblo como una función del tiempo, a continuación se explica cómo hacerlo: aproximamos la gráfica por medio de segmentos de recta, cada uno de los cuales tiene una pendiente dada por la expresión que obtuvimos para dP/dt. Iniciamos con un tiempo y población conocidos y calculamos la pendiente inicial. Empezaremos el crecimiento del pueblo desde cero, haciendo $t = 0$ en $P = 0$. Entonces $\frac{dP}{dt} = 10$. Ahora avanzamos el reloj un intervalo de tiempo adecuado, elegimos 1 año, y como la pendiente en $(0, 0)$ es igual a 10, aumentamos la población de 0 a 10. Los nuevos valores para t y P son 1 y 10 respectivamente, de modo que dibujamos un segmento de recta desde $(0, 0)$ a $(1, 10)$. Ahora, con $t = 1$ y $P = 10$, calculamos nuevamente la pendiente y seguimos los mismos pasos, repetimos este proceso hasta haber dibujado tanto de la curva como necesitemos ver.

Es obvio que esto sería en extremo tedioso para realizarlo a mano. Sin embargo, podemos utilizar las características de programación y de dibujo de líneas de una calculadora gráfica. Para una TI-83, el programa siguiente realiza bastante bien el trabajo, después de que la expresión para $\frac{dP}{dt}$ es introducida como Y_1 (manteniendo P como la variable):

```
PROGRAM:POPLTN
:Input "P? ",P
:Input "T?",T
:ClrDraw
:T→S
:For(I,S+1,S+55)
:Line(T,P,I,P+Y1)
:I→T:(P+Y1)→P
:End
```

Quite la selección de la función Y_1. Establezca la ventana de graficación para mostrar el plano de coordenadas desde 0 hasta 55 horizontalmente, y de 0 a 350 verticalmente. Después ejecute el programa y, ante las peticiones, proporciones los valores iniciales para P y t. El programa dibujará 55 segmentos de recta, suficientes para llevar la población a su tamaño final desde $P = 0$, $t = 0$. El resultado se muestra en la figura 11.5.

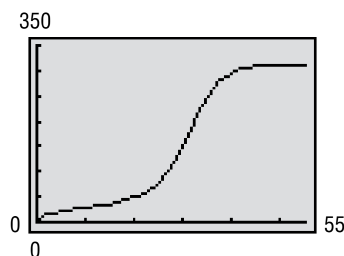


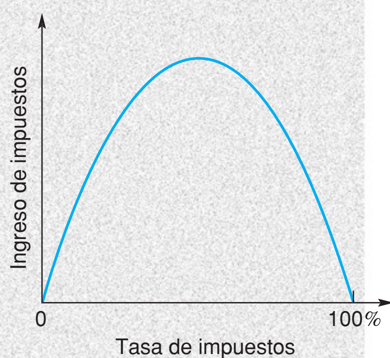
FIGURA 11.5 P como una función de t.

Ejercicios

1. ¿Qué información da la figura 11.5 que no sea evidente en la figura 11.4?
2. ¿Qué sucede cuando el valor inicial de 450 es seleccionado para P? (La pantalla debe ajustarse para ir de 0 a 500, de manera vertical.) ¿Esto parece correcto?
3. ¿Por qué este procedimiento para obtener una gráfica de $P(t)$ sólo es aproximado? ¿Cómo puede mejorarse la aproximación?

CAPÍTULO 12

Trazado de curvas



A mediados de la década de 1970, el economista Arthur Laffer explicaba su visión de los impuestos a un político —como cuenta la historia, era el aspirante a la presidencia Ronald Reagan, o Richard Cheney miembro del equipo de Ford (posteriormente vicepresidente bajo el régimen de George W. Bush). Para ilustrar su argumento, Laffer tomó una servilleta e hizo un bosquejo de la gráfica que ahora lleva su nombre: curva de Laffer.[1]

La curva de Laffer describe el ingreso total del gobierno debido a los impuestos como una función de la tasa de impuestos. Es obvio que si la tasa de impuestos es cero, el gobierno no obtiene ingresos. Pero si la tasa de impuestos es 100%, el ingreso sería también igual a cero, ya que no hay incentivo para generar dinero si todo éste se esfuma. Puesto que una tasa entre 0 y 100% debe generar ingresos, Laffer razonó, la curva que relaciona los ingresos con los impuestos debe verse, en forma cualitativa, más o menos como la que se muestra en la figura de más adelante.

El argumento de Laffer no era para mostrar que la tasa óptima de impuestos fuese 50%. Lo que quería mostrar era que bajo ciertas circunstancias, a saber, cuando la tasa de impuestos está a la derecha del máximo de la curva, es posible *aumentar el ingreso del gobierno bajando los impuestos*. Éste fue un argumento clave para la reducción de impuestos aprobados por el Congreso durante el primer periodo de la presidencia de Reagan.

A consecuencia de que la curva de Laffer sólo es un dibujo cualitativo, en realidad no proporciona una tasa de impuestos óptima. Los argumentos con base en los ingresos para reducir los impuestos incluyen la hipótesis que el punto del máximo de ingresos está a la izquierda, en el eje horizontal, del esquema de impuestos actual. De la misma manera, quienes argumentan por una elevación en los impuestos para aumentar los ingresos del gobierno, suponen que o bien existe una relación diferente entre impuestos e ingresos, o una localización diferente en el máximo de la curva.

Entonces, la curva de Laffer es por sí misma demasiado abstracta, pero es de mucha ayuda en la determinación de la tasa óptima de impuestos. Pero incluso un bosquejo muy simple de curvas, como las curvas de oferta y demanda y la curva de Laffer, pueden ayudar a los economistas a describir los factores causales que dirigen una economía. En este capítulo, estudiaremos técnicas para el trazado e interpretación de curvas.

[1]Para una versión de la historia, véase Jude Wanniski, *The Way the World Works,* tercera edición (Morristown, N. J. Polyconomics, 1989), 299.

OBJETIVO Encontrar cuándo una función es creciente o decreciente, determinar los valores críticos, localizar máximos y mínimos relativos y establecer la prueba de la primera derivada. También, hacer el bosquejo de la gráfica de una función por medio del uso de la información obtenida de la primera derivada.

12.1 Extremos relativos

Naturaleza creciente o decreciente de una función

Examinar el comportamiento gráfico de las ecuaciones es una parte básica de las matemáticas, lo cual tiene aplicaciones en muchas áreas de estudio. Cuando hacemos el bosquejo de una curva, si sólo colocamos puntos quizá no obtengamos información suficiente acerca de su forma. Por ejemplo, los puntos $(-1, 0)$, $(0, -1)$ y $(1, 0)$ satisfacen la ecuación $y = (x + 1)^3(x - 1)$. Con base en estos puntos, se podría concluir, a la ligera, que la gráfica debe tener la forma mostrada en la figura 12.1(a), pero de hecho, la forma verdadera es la mostrada en la figura 12.1(b). En este capítulo exploraremos la gran utilidad de la diferenciación en el análisis de una función, de manera que podamos determinar su forma verdadera y el comportamiento de su gráfica.

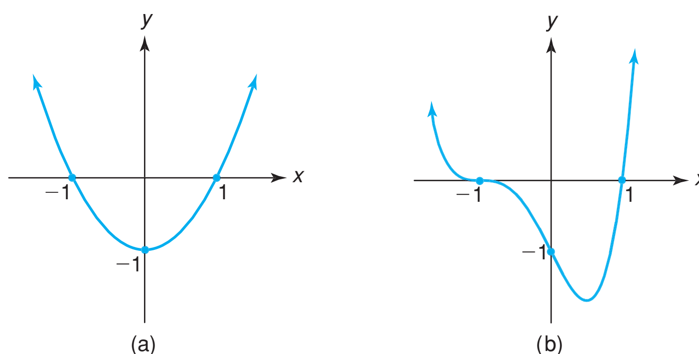


FIGURA 12.1 Curvas que pasan por los puntos $(-1, 0)$, $(0, -1)$ y $(1, 0)$.

Analizaremos primero la gráfica de la función $y = f(x)$ de la figura 12.2. Note que conforme x aumenta (de izquierda a derecha) en el intervalo I_1, entre a y b, los valores de $f(x)$ también aumentan y la curva asciende. En forma matemática, esta observación significa que si x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera en I_1, tales que $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Se dice que f es una *función creciente* en I_1. Por otra parte, conforme x aumenta en el intervalo I_2, entre c y d, la curva desciende. En este intervalo, $x_3 < x_4$ implica que $f(x_3) > f(x_4)$ y se dice que f es una *función decreciente* en I_2. Resumimos estas observaciones en la definición siguiente.

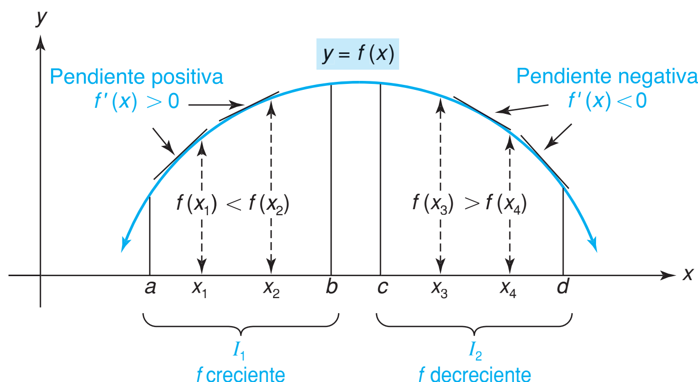


FIGURA 12.2 Formas creciente y decreciente de una función.

Definición

Se dice que una función f es ***creciente*** en el intervalo I, si para dos números cualesquiera x_1, x_2 en I, donde $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$. Una función f es ***decreciente*** en el intervalo I, si para dos números cualesquiera x_1, x_2 en I, donde $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Volviendo a la figura 12.2, notamos que en el intervalo I_1, las rectas tangentes a la curva tienen pendientes positivas, por lo que $f'(x)$ debe ser positiva para toda x en I_1. Básicamente, una derivada positiva implica que la curva está elevándose. En el intervalo I_2, las rectas tangentes tienen pendientes negativas, por lo que $f'(x) < 0$, para toda x en I_2. Fundamentalmente, la curva desciende donde la derivada es negativa. Tenemos así la siguiente regla que nos permite usar la derivada para determinar cuándo una función es creciente o decreciente:

Regla 1 Criterios para funciones crecientes o decrecientes

Sea f diferenciable en el intervalo (a, b). Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces f es creciente en (a, b). Si $f'(x) < 0$, para toda x en (a, b), entonces f es decreciente en (a, b).

Para ilustrar estas ideas, usaremos la regla 1 para determinar los intervalos en que $y = 18x - \frac{2}{3}x^3$ es creciente o decreciente. Sea $y = f(x)$, debemos determinar cuándo $f'(x)$ es positiva y cuándo es negativa. Tenemos

$$f'(x) = 18 - 2x^2 = 2(9 - x^2) = 2(3 + x)(3 - x).$$

Empleando la técnica de la sección 9.5, podemos encontrar el signo de $f'(x)$ probando los intervalos determinados por las raíces de $2(3 + x)(3 - x) = 0$, esto es, 3 y -3 (véase la fig. 12.3). En cada intervalo, el signo de $f'(x)$ está determinado por los signos de sus factores:



FIGURA 12.3 Intervalos determinados por las raíces de $f'(x) = 0$.

si $x < -3$, entonces $f'(x) = 2(-)(+) = -$, por lo que f es decreciente;

si $-3 < x < 3$, entonces $f'(x) = 2(+)(+) = +$, por lo que f es creciente;

si $x > 3$, entonces $f'(x) = 2(+)(-) = -$, por lo que f es decreciente.

Estos resultados se indican en la figura 12.4(a). Así, f es decreciente en $(-\infty, -3)$ y $(3, \infty)$ y es creciente en $(-3, 3)$. Esto corresponde a la elevación y caída de la gráfica de f mostrada en la figura 12.4(b). Estos resultados podrían afinarse notando que, por definición, f es decreciente en $(-\infty, -3]$ y $[3, \infty)$, y creciente en $[-3, 3]$. Sin embargo, para nuestros fines, los intervalos abiertos son suficientes. *Seguiremos la práctica de determinar intervalos* ***abiertos*** *en los que una función es creciente o decreciente.*

Extremos

Veamos ahora la gráfica de $y = f(x)$ en la figura 12.5. Podemos hacer algunas observaciones. Primero, hay algo especial con respecto a los puntos P_1, P_2 y P_3. Observe que P_1 está *más alto* que cualquier otro punto "cercano" sobre la curva; lo mismo puede decirse para P_3. El punto P_2 está *más bajo* que cualquier otro punto "cercano" sobre la curva. Como P_1, P_2 y P_3 pueden no ser necesariamente los puntos más altos o más bajos en *toda* la curva, decimos simplemente que la gráfica de f tiene un (*punto*) *máximo relativo* cuando $x = x_1$ (o en x_1) y cuando $x = x_3$, también decimos que tiene un (*punto*) *mínimo relativo* cuando $x = x_2$. La función tiene *valores máximos relativos de* $f(x_1)$ y $f(x_3)$ cuan-

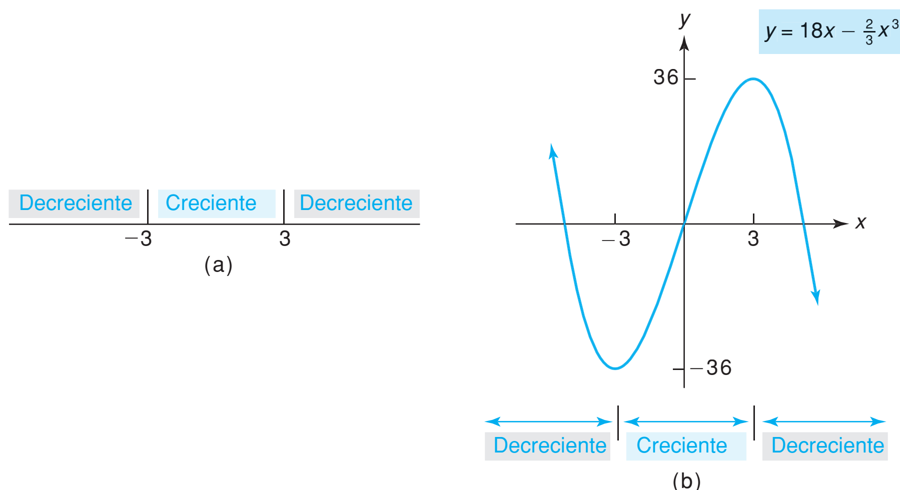


FIGURA 12.4 Creciente/decreciente para $y = 18x - \frac{2}{3}x^3$.

do $x = x_1$ y $x = x_3$, respectivamente. De manera similar, cuando $x = x_2$, f tiene un *valor mínimo relativo* de $f(x_2)$. Cuando aludamos a un máximo o un mínimo relativo, se entenderá que nos referimos a un punto o a un valor,

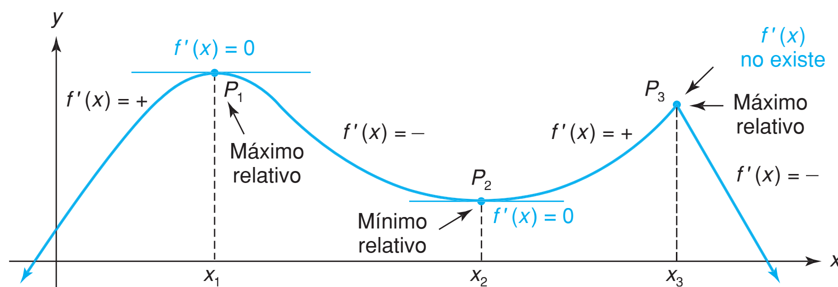


FIGURA 12.5 Máximos y mínimos relativos.

dependiendo del contexto. Volviendo a la gráfica, vemos que hay un *máximo absoluto* (punto más alto en toda la curva) en $x = x_1$, pero no hay un *mínimo absoluto* (punto más bajo en toda la curva) porque se supone que la curva se prolonga de manera indefinida hacia abajo. Definimos con mayor precisión estos nuevos términos como sigue:

Definición

Una función f tiene un ***máximo relativo*** en $x = x_0$, si existe un intervalo abierto que contenga a x_0 sobre el cual $f(x_0) \geq f(x)$ para toda x en el intervalo. El máximo relativo es $f(x_0)$. Una función tiene un ***mínimo relativo*** en $x = x_0$, si existe un intervalo abierto que contenga a x_0 sobre el cual $f(x_0) \leq f(x)$, para toda x en el intervalo. El mínimo relativo es $f(x_0)$.

Si existe, un máximo absoluto es único; sin embargo, puede ocurrir para más de un valor de x. Una proposición similar es cierta para un mínimo absoluto.

Definición

Una función f tiene un ***máximo absoluto*** en $x = x_0$, si $f(x_0) \geq f(x)$ para toda x en el dominio de f. El máximo absoluto es $f(x_0)$. Una función f tiene un ***mínimo absoluto*** en $x = x_0$, si $f(x_0) \leq f(x)$, para toda x en el dominio de f. El mínimo absoluto es $f(x_0)$.

Cuando aludamos a un máximo o un mínimo relativo lo llamaremos a cada uno **extremo relativo.** De manera análoga, nos referimos a **extremos absolutos.**

Al tratar con extremos relativos, comparamos el valor de la función en un punto, con el valor en puntos cercanos; sin embargo, al tratar con extremos absolutos, comparamos el valor de la función en un punto con todos los otros valores determinados por el dominio. Así, los extremos relativos son "locales" por naturaleza, mientras que los extremos absolutos son "globales".

Con referencia a la figura 12.5, notamos que en un extremo relativo la derivada puede no estar definida (por ejemplo, cuando $x = x_3$). Pero siempre que esté definida en un extremo relativo, es igual a cero (por ejemplo, en $x = x_1$ y en $x = x_2$), por lo que la recta tangente es horizontal. Podemos establecer la siguiente:

Regla 2 Una condición necesaria para extremos relativos

Si f tiene un extremo relativo cuando $x = x_0$, entonces $f'(x_0) = 0$ o bien $f'(x_0)$ no está definida.

La implicación de la regla 2 sólo es en una dirección:

$$\left.\begin{array}{r}\text{extremo relativo}\\ \text{en } x_0\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} f'(x_0) = 0 \\ \text{o} \\ f'(x_0) \text{ no está definida.}\end{array}\right.$$

La regla 2 *no* dice que si $f'(x_0)$ es 0 o no está definida, entonces debe existir un extremo relativo en x_0. De hecho, puede que no exista ninguno. Por ejemplo, en la figura 12.6, $f'(x_0)$ es cero porque la recta tangente es horizontal en x_0, pero no se tiene un extremo relativo ahí.

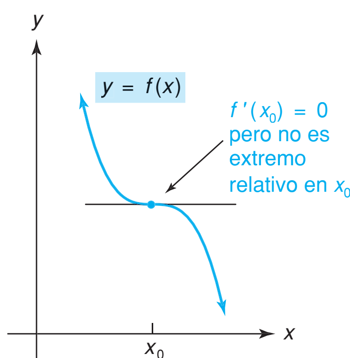


FIGURA 12.6 No hay extremo relativo en x_0.

En general, lo más que podemos decir es que *pueden* ocurrir extremos relativos en puntos sobre la gráfica de f en que $f'(x) = 0$, o donde $f'(x)$ no esté definida. Como esos puntos son muy importantes para localizar los extremos relativos, se denominan *puntos críticos,* y sus abscisas se denominan *valores críticos*. Así, en la figura 12.5, los números x_1, x_2 y x_3 son valores críticos y P_1, P_2 y P_3 son puntos críticos.

Definición

Si x_0 está en el dominio de f y $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no está definida, entonces x_0 se denomina ***valor crítico*** de f. Si x_0 es un valor crítico, entonces el punto $(x_0, f(x_0))$ se denomina ***punto crítico.***

En un punto crítico, puede haber un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de éstos. Además, de la figura 12.5 observamos que cada extremo relativo ocurre en un punto alrededor del cual el signo de $f'(x)$ está cambiando. Para el máximo relativo, cuando $x = x_1$, $f'(x)$ va de $+$, para $x < x_1$, a $-$, para $x > x_1$, *en tanto x esté cerca de* x_1. En el mínimo relativo, cuando $x = x_2$, $f'(x)$ va de $-$ a $+$, y en el máximo relativo cuando $x = x_3$, va nuevamente de $+$ a $-$. Entonces, *alrededor de máximos relativos*, *f es creciente y luego decreciente*, *y para los mínimos relativos la proposición inversa es cierta*. Con más precisión, tenemos la regla siguiente:

Regla 3 Criterios para extremos relativos

Supongamos que f es continua en un intervalo abierto I que contiene el valor crítico x_0 y f es diferenciable en I excepto posiblemente en x_0.

a. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa cuando x crece al pasar por x_0, entonces f tiene un máximo relativo cuando $x = x_0$.

b. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva cuando x crece al pasar por x_0, entonces f tiene un mínimo relativo cuando $x = x_0$.

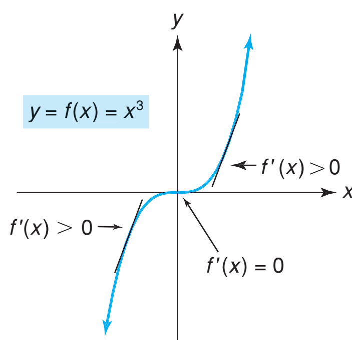


FIGURA 12.7 El cero es un valor crítico, pero no proporciona un extremo relativo.

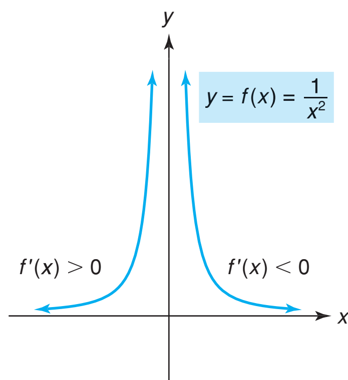


FIGURA 12.8 $f'(0)$ no está definida, pero 0 no es un valor crítico, ya que cero no está en el dominio de f.

Advertencia Recordamos de nuevo que no a todo valor crítico le corresponde un extremo relativo. Por ejemplo, si $y = f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$. Como $f'(0) = 0$ y $f(0)$ está definida, 0 es un valor crítico. Ahora, si $x < 0$, entonces $3x^2 > 0$. Si $x > 0$, entonces $3x^2 > 0$. Como $f'(x)$ no cambia de signo, no existe ni un máximo relativo ni un mínimo relativo. De hecho, como $f'(x) \geq 0$ para toda x, la gráfica de f no desciende nunca y se dice que f es no *decreciente* (véase la fig. 12.7).

De nuestro análisis y de la advertencia anterior, debe ser claro que un valor crítico es un "candidato" a ser extremo relativo. Puede corresponder a un máximo relativo, a un mínimo relativo o a ninguno de éstos.

Es importante entender que no todo valor de x donde $f'(x)$ no existe es un valor crítico. Por ejemplo, si

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \text{entonces} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3}.$$

Aunque $f'(x)$ no está definida en $x = 0$, cero no es un valor crítico porque no está en el dominio de f. Esto es, ningún valor de y corresponde a $x = 0$. Por lo que, un extremo relativo no puede ocurrir cuando $x = 0$. Sin embargo, la derivada puede cambiar de signo alrededor de cualquier valor de x, en que $f'(x)$ no esté definida, por lo que tales valores son importantes en la determinación de los intervalos sobre los que f es creciente o decreciente.

$$\text{Si } x < 0, \quad \text{entonces} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} > 0.$$

$$\text{Si } x > 0, \quad \text{entonces} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0.$$

Así, f es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, \infty)$. (Véase la fig. 12.8.)

En la regla 3, la hipótesis debe satisfacerse o la conclusión no necesariamente es válida. Por ejemplo, considere el caso de la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Como puede verse en la figura 12.9, cero está en el dominio y $f'(0)$ no existe, por lo que 0 es un valor crítico. Aunque $f'(x) = +$ para $x < 0$ y $f'(x) = -$ para $x > 0$, f no tiene un máximo relativo en cero. La regla 3 no es aplicable porque f no es continua en cero. En realidad, cero es un mínimo absoluto de acuerdo con la definición. Esto muestra que si $f'(x_0)$ no existe y f no es continua en x_0, será necesario examinar con cuidado qué sucede alrededor de x_0.

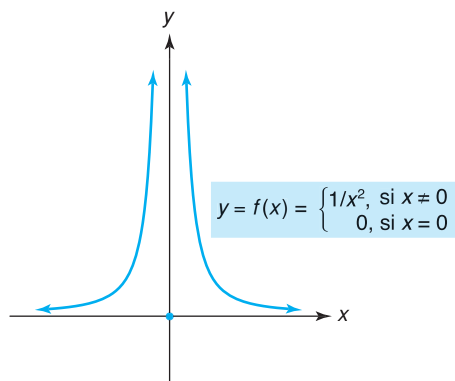


FIGURA 12.9 El cero es un valor crítico, y sí es un extremo relativo.

Resumiendo los resultados de esta sección, tenemos la *prueba de la primera derivada* para los extremos relativos de $y = f(x)$:

Prueba de la primera derivada para los extremos relativos

Paso 1. Encontrar $f'(x)$.

Paso 2. Determinar todos los valores de x en que $f'(x) = 0$ o no está definida (estos valores incluyen valores críticos y puntos de discontinuidad).

Paso 3. En los intervalos sugeridos por los valores del paso 2, determinar si f es creciente $[f'(x) > 0]$ o decreciente $[f'(x) < 0]$.

Paso 4. Para cada valor crítico x_0 en que f es continua, determinar si $f'(x)$ cambia de signo cuando x crece al pasar por x_0. Habrá un máximo relativo cuando $x = x_0$, si $f'(x)$ cambia de $+$ a $-$, al ir de izquierda a derecha, y habrá un mínimo relativo si $f'(x)$ cambia de $-$ a $+$ al ir de izquierda a derecha. Si $f'(x)$ no cambia de signo, no habrá un extremo relativo cuando $x = x_0$.

Principios en práctica 1

Prueba de la primera derivada

La ecuación de costo para un puesto de hot dogs está dada por medio de $c(q) = 2q^3 - 21q^2 + 60q + 500$, donde q es el número de *hot dogs* vendidos, y $c(q)$ es el costo en dólares. Utilice la prueba de la primera derivada para determinar cuándo ocurren extremos relativos.

EJEMPLO 1 Prueba de la primera derivada

Si $y = f(x) = x + \dfrac{4}{x+1}$, *utilizar la prueba de la primera derivada para encontrar dónde se presentan los extremos relativos.*

Solución:

Paso 1. $f(x) = x + 4(x+1)^{-1}$, por lo que

$$f'(x) = 1 + 4(-1)(x+1)^{-2} = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}.$$

Note que expresamos $f'(x)$ como un cociente con el numerador y el denominador factorizados. Esto nos permite determinar con facilidad en el paso 2 cuándo $f'(x)$ es cero o no está definida.

Paso 2. Haciendo $f'(x) = 0$, resulta $x = -3, 1$. El denominador de $f'(x)$ es cero cuando x es -1, por lo que $f'(-1)$ no existe. Los valores de -3 y 1 son valores críticos, pero -1 no lo es porque $f(-1)$ no está definido (f es discontinua en $x = -1$).

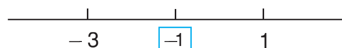


FIGURA 12.10 Cuatro intervalos a examinar como creciente/decreciente.

Paso 3. Los tres valores en el paso 2 nos conducen a probar cuatro intervalos (véase la fig. 12.10). (En cada uno de esos intervalos, f es diferenciable y no es cero.) Note que enmarcamos el valor -1, para indicar que no puede corresponder a un extremo relativo. Si embargo, es esencial que -1 se considere en nuestro análisis relativo a creciente/decreciente.

Si $x < -3$, entonces $f'(x) = \dfrac{(-)(-)}{(+)} = +$, por lo que f es creciente;

si $-3 < x < -1$, entonces $f'(x) = \dfrac{(+)(-)}{(+)} = -$, por lo que f es decreciente;

si $-1 < x < 1$, entonces $f'(x) = \dfrac{(+)(-)}{(+)} = -$, por lo que f es decreciente;

si $x > 1$, entonces $f'(x) = \dfrac{(+)(+)}{(+)} = +$, por lo que f es creciente

(véase la fig. 12.11).

f	f	f	f
Creciente	Decreciente	Decreciente	Creciente
-3	-1	1	
$f' = +$	$f' = -$	$f' = -$	$f' = +$

FIGURA 12.11 Diagrama de signos para $f'(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$.

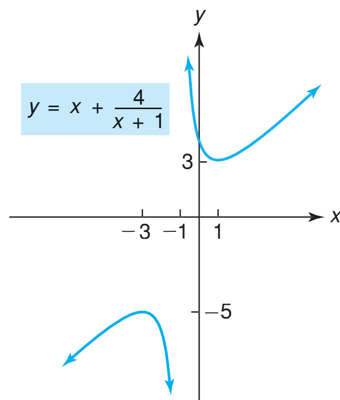


FIGURA 12.12 Gráfica de $y = x + \dfrac{4}{x+1}$.

Así, f es creciente en los intervalos $(-\infty,-3)$ y $(1,\infty)$ y es decreciente en $(-3,-1)$ y $(-1,1)$.

Paso 4. De la figura 12.11, concluimos que cuando $x = -3$, se tiene un máximo relativo, ya que $f'(x)$ cambia de $+$ a $-$. [Este valor máximo relativo es $f(-3) = -3 + (4/-2) = -5$.] Cuando $x = 1$, se tiene un mínimo relativo ya que $f'(x)$ cambia de $-$ a $+$. Ignoramos a $x = -1$, ya que -1 no es un valor crítico. La gráfica se muestra en la figura 12.12.

■

EJEMPLO 2 Un extremo relativo donde $f'(x)$ no existe

Probar $y = f(x) = x^{2/3}$ con respecto a extremos relativos.

Solución: tenemos

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Cuando $x = 0$, $f'(x)$ no está definida, pero $f(x)$ sí lo está. Así, 0 es un valor crítico y no hay ningún otro. Si $x < 0$, entonces $f'(x) < 0$. Si $x > 0$, entonces $f'(x) > 0$. Por tanto, se tiene un mínimo relativo (así como uno absoluto) cuando $x = 0$ (véase la fig. 12.13). Note que cuando $x = 0$, la recta tangente existe y es vertical.

■

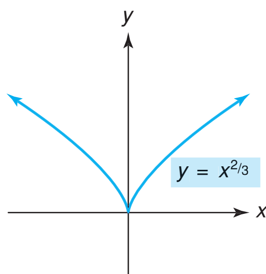


FIGURA 12.13 La derivada no existe en 0 y hay un mínimo en 0.

EJEMPLO 3 Determinación de extremos relativos

Probar $y = f(x) = x^2e^x$ con respecto a extremos relativos.

Solución: por la regla del producto,

$$f'(x) = x^2e^x + e^x(2x) = xe^x(x+2).$$

Observe que e^x siempre es positiva; obtenemos los valores críticos 0 y -2. De los signos de $f'(x)$ dados en la figura 12.14, concluimos que se tiene un máximo relativo cuando $x = -2$, y un mínimo relativo cuando $x = 0$.

■

Principios en práctica 2
Determinación de extremos relativos

Una droga es inyectada al torrente sanguíneo de un paciente. La concentración de la droga en el torrente t horas después de haberse inyectado es aproximada por $C(t) = \dfrac{0.14t}{t^2 + 4t + 4}$. Determine los extremos relativos para $t > 0$, y utilícelos para determinar cuándo la droga está en su máxima concentración.

Trazado de una curva

En el ejemplo siguiente mostramos cómo puede usarse la prueba de la primera derivada junto con los conceptos de intersección y simetría, como una ayuda para trazar la gráfica de una función.

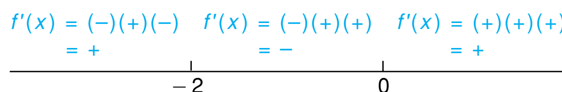


FIGURA 12.14 Diagrama de signos para $f'(x) = xe^x(x + 2)$.

EJEMPLO 4 Trazado de una curva

Trazar la gráfica de $y = f(x) = 2x^2 - x^4$ con la ayuda de intersecciones, simetría y prueba de la primera derivada.

Solución:

Intersecciones Si $x = 0$, entonces $y = 0$. Si $y = 0$, entonces

$$0 = 2x^2 - x^4 = x^2(2 - x^2) = x^2(\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} - x),$$

por lo que $x = 0, \pm\sqrt{2}$. Así, las intersecciones son (0, 0), $(\sqrt{2}, 0)$, y $(-\sqrt{2}, 0)$.

Simetría Al investigar la simetría con respecto del eje y, tenemos

$$y = 2(-x)^2 - (-x)^4, \quad \text{o} \quad y = 2x^2 - x^4.$$

Como ésta es la ecuación original, se tiene simetría con respecto al eje y. Como y es una función (y no es la función cero), no hay simetría con respecto al eje x, y en consecuencia no hay simetría con respecto al origen.

Prueba de la primera derivada

Paso 1. $y' = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 4x(1 + x)(1 - x)$.

Paso 2. Haciendo $y' = 0$, se obtienen los valores críticos $x = 0, \pm 1$. Como estamos interesados en una gráfica, los *puntos* críticos son de importancia para nosotros. Sustituyendo los valores críticos en la ecuación *original* $y = 2x^2 - x^4$, obtenemos las coordenadas y de esos puntos. Encontramos que los puntos críticos son $(-1, 1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

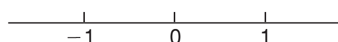


FIGURA 12.15 Intervalos para el diagrama de signos de $y' = 4x(1 + x)(1 - x)$.

Paso 3. Hay cuatro intervalos qué considerar en la figura 12.15:

si $x < -1$, entonces $y' = 4(-)(-)(+) = +$, por lo que f es creciente;

si $-1 < x < 0$, entonces $y' = 4(-)(+)(+) = -$, por lo que f es decreciente;

si $0 < x < 1$, entonces $y' = 4(+)(+)(+) = +$, por lo que f es creciente;

si $x > 1$, entonces $y' = 4(+)(+)(-) = -$, por lo que f es decreciente (véase la fig. 12.16).

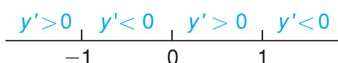


FIGURA 12.16 Diagrama de signos de $y' = 4x(1 + x)(1 - x)$.

Paso 4. De la figura 12.16, concluimos que ocurren máximos relativos en $(-1, 1)$ y $(1, 1)$; un mínimo relativo ocurre en $(0, 0)$.

Análisis En la figura 12.17(a), hemos indicado las tangentes horizontales en los puntos máximo y mínimo relativos. Sabemos que la curva asciende desde la izquierda, tiene un máximo relativo, luego desciende, tiene un mínimo relativo, se levanta a un máximo relativo y de ahí en adelante desciende. En la figura 12.17(b) se muestra un bosquejo de ella.

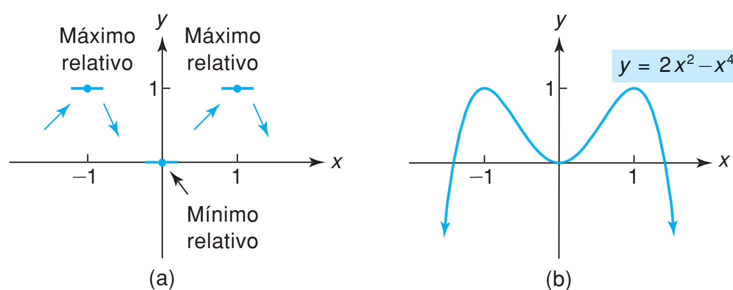


FIGURA 12.17 Reunión de la información para la gráfica de $y = 2x^2 - x^4$.

Observemos que en el ejemplo 4 ocurren máximos *absolutos* en $x = \pm 1$ [véase la fig. 12.17(b)]. No existe mínimo absoluto.

Tecnología

Una calculadora gráfica es una poderosa herramienta para investigar los extremos relativos. Por ejemplo, considere la función

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 4,$$

cuya gráfica se muestra en la figura 12.18. Parece que hay un mínimo relativo cerca de $x = 1$. Podemos localizar este mínimo usando la técnica "dibuje y amplifique" o (en la TI-83) la característica de "mínimo". La figura 12.19 muestra este último procedimiento. Se estima que el punto mínimo relativo es (1.00, 3).

Veamos ahora cómo la gráfica de f' indica cuándo ocurren los extremos. Tenemos

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2,$$

cuya gráfica se muestra en la figura 12.20. Parece que $f'(x)$ es cero en dos puntos. Usando "dibuje y amplifique" o el dispositivo para encontrar "ceros", estimamos que los ceros de f' (valores críticos de f) son 1 y 0. Alrededor de $x = 1$, vemos que $f'(x)$ pasa de valores negativos a valores positivos (esto es, la gráfica de f' pasa de abajo hacia arriba del eje x). Así, concluimos que f tiene un mínimo relativo en $x = 1$, lo que confirma nuestro resultado anterior. Alrededor del valor crítico $x = 0$, los valores de $f'(x)$ son negativos. Como $f'(x)$ no cambia de signo, concluimos que no existe un extremo relativo en $x = 0$. Esto es también evidente en la gráfica de la figura 12.18.

Vale la pena mencionar que la gráfica de f' se puede aproximar sin determinar $f'(x)$. Hacemos uso de la característica "nDeriv". Primero introducimos la función f como Y_1. Luego hacemos

$$Y_2 = \text{nDeriv}(Y_1,X,X).$$

La gráfica de Y_2 aproxima la gráfica de $f'(x)$.

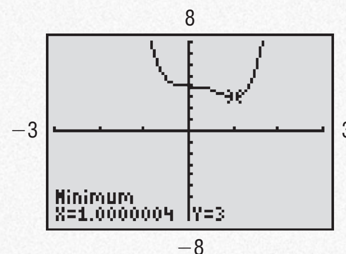


FIGURA 12.19 Mínimo relativo en (1.00, 3).

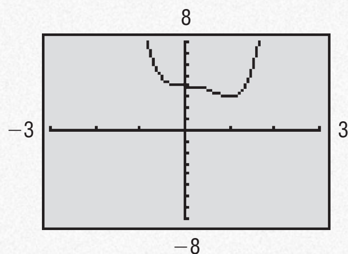


FIGURA 12.18 Gráfica de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 4$.

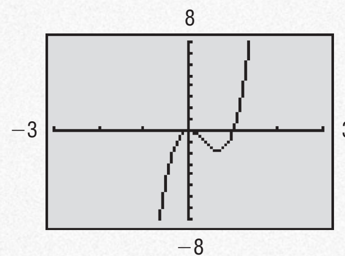


FIGURA 12.20 Gráfica de $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$.

Ejercicio 12.1

En los problemas del 1 al 4 se da la gráfica de una función. Encuentre los intervalos abiertos en que la función está creciendo o decreciendo, así como las coordenadas de todos los extremos relativos.

1.

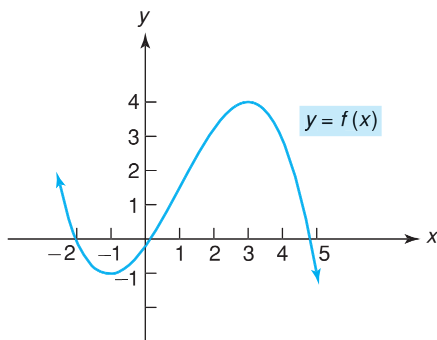


FIGURA 12.21 Gráfica para el problema 1.

2.

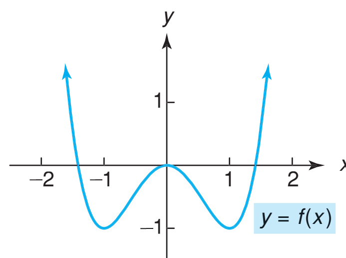


FIGURA 12.22 Gráfica para el problema 2.

3.

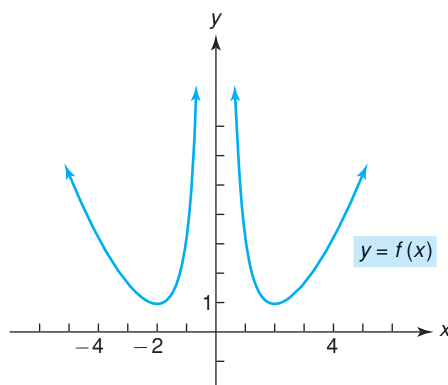


FIGURA 12.23 Gráfica para el problema 3.

4.

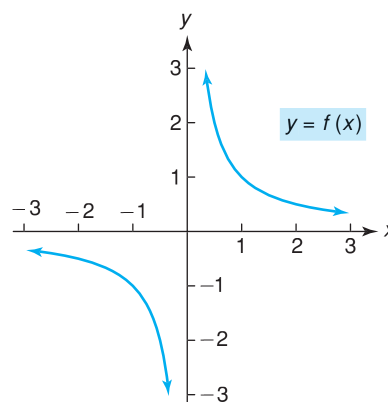


FIGURA 12.24 Gráfica para el problema 4.

En los problemas del 5 al 8 se da la derivada de la función continua f. Encuentre los intervalos abiertos en que f es creciente o decreciente, así como los valores de x de todos los extremos relativos.

5. $f'(x) = (x + 1)(x - 3)$.

6. $f'(x) = 2x(x - 1)^3$.

7. $f'(x) = (x + 1)(x - 3)^2$.

8. $f'(x) = \dfrac{x(x + 2)}{x^2 + 1}$.

En los problemas del 9 al 52 determine cuándo la función es creciente o decreciente, y determine la posición de los máximos y mínimos relativos. No trace la gráfica.

9. $y = x^3 + 3$.

10. $y = x^2 + 4x + 3$.

11. $y = x - x^2 + 2$.

12. $y = 4x - x^2$.

13. $y = -\dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x - 2$.

14. $y = 4x^3 - 3x^4$.

15. $y = x^4 - 2x^2$.

16. $y = -3 + 12x - x^3$.

17. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

18. $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$.

19. $y = 2x^3 - \dfrac{11}{2}x^2 - 10x + 2$.

20. $y = -5x^3 + x^2 + x - 7$.

21. $y = x^3 + 2x^2 - x - 1$.

22. $y = \dfrac{9}{5}x^5 - \dfrac{47}{3}x^3 + 10x$.

23. $y = 3x^5 - 5x^3$.

24. $y = 6x - x^6$.

25. $y = -x^5 - 5x^4 + 200$.

26. $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

27. $y = 8x^4 - x^8$.

28. $y = \frac{4}{5}x^5 - \frac{13}{3}x^3 + 3x + 4$.

29. $y = (x^3 + 1)^3$.

30. $y = \sqrt[3]{x}(x - 2)$.

31. $y = \frac{5}{x - 1}$.

32. $y = \frac{3}{x}$.

33. $y = \frac{10}{\sqrt{x}}$.

34. $y = \frac{x}{x + 1}$.

35. $y = \frac{x^2}{2 - x}$.

36. $y = x + \frac{4}{x}$.

37. $y = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$.

38. $y = \frac{x^2}{x^2 - 9}$.

39. $y = \frac{5x + 2}{x^2 + 1}$.

40. $y = \sqrt[3]{x^3 - 9x}$.

41. $y = (x + 2)^3(x - 5)^2$.

42. $y = x^2(x + 3)^4$.

43. $y = x^3(x - 6)^4$.

44. $y = x(1 - x)^{2/5}$.

45. $y = e^{-2x}$.

46. $y = x \ln x$.

47. $y = x^2 - 9 \ln x$.

48. $y = xe^x$.

49. $y = e^x + e^{-x}$.

50. $y = e^{-x^2}$.

51. $y = x \ln x - x$.

52. $y = (x^2 + 1)e^{-x}$.

En los problemas del 53 al 64, determine los intervalos en los que la función se incrementa o se decrementa, cuando es relativa máxima o mínima, la simetría y quellas intersecciones que se pueden obtener de manera conveniente. Después realice la gráfica.

53. $y = x^2 - 6x - 7$.

54. $y = 2x^2 - 5x - 12$.

55. $y = 3x - x^3$.

56. $y = x^4 - 16$.

57. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

58. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$.

59. $y = x^4 + 4x^3 + 4x^2$.

60. $y = x^5 - \frac{5}{4}x^4$.

61. $y = (x - 1)^2(x + 2)^2$.

62. $y = (3 - x)\sqrt{x}$.

63. $y = 2\sqrt{x} - x$.

64. $y = x^{5/3} + 5x^{2/3}$.

65. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua f, tal que $f(1) = 2, f(3) = 1, f'(1) = f'(3) = 0$, $f'(x) > 0$ para $x < 1$, $f'(x) < 0$ para $1 < x < 3$, y f tenga un mínimo relativo cuando $x = 3$.

66. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua f, tal que $f(1) = 2, f(4) = 5, f'(1) = 0, f'(x) \geq 0$ para $x < 4$, f tenga un máximo relativo cuando $x = 4$ y tenga una recta tangente vertical en $x = 4$.

67. Costo promedio Si $c_f = 25{,}000$ es una función de costo fijo, demuestre que la función de costo fijo promedio $\bar{c}f = c_f/q$ es una función decreciente para $q > 0$. Por lo que, cuando la producción q crece, se reduce la porción unitaria de costo fijo.

68. Costo marginal Si $c = 4q - q^2 + 2q^3$ es una función de costo, ¿cuándo es creciente el costo marginal?

69. Ingreso marginal Dada la función de demanda

$$p = 400 - 2q,$$

encuentre cuándo es creciente el costo marginal.

70. Función costo Para la función de costo $c = \sqrt{q}$, demuestre que los costos marginal y promedio son siempre decrecientes para $q > 0$.

71. Ingreso Para el producto de un fabricante, la función de ingreso está dada por $r = 240q + 57q^2 - q^3$. Determine la producción para obtener un ingreso máximo.

72. Mercados de trabajo Eswaran y Kotwall[2] estudian economías agrarias en las que hay dos tipos de trabajadores, permanentes y eventuales. Los trabajadores permanentes son empleados bajo contrato a largo plazo y pueden recibir prestaciones como vacaciones y atención médica. Los eventuales son empleados por día y efectúan tareas rutinarias como recolección y trillado. La diferencia z en el costo a valor actual de contratar a un trabajador permanente y a un eventual está dada por

$$z = (1 + b)w_p - bw_c,$$

donde w_p y w_c son los salarios de trabajo permanente y eventual, respectivamente, b es una constante positiva y w_p es una función de w_c

(a) Demuestre que

$$\frac{dz}{dw_c} = (1 + b)\left[\frac{dw_p}{dw_c} - \frac{b}{1 + b}\right].$$

(b) Si $dw_p/dw_c < b/(1 + b)$, demuestre que z es una función decreciente de w_c.

73. Contaminación térmica En el análisis de Shonle acerca de la contaminación térmica,[3] la eficacia de una planta de energía se mide por:

$$E = 0.71\left(1 - \frac{T_c}{T_h}\right),$$

donde T_h y T_c son las temperaturas absolutas correspondientes a las reservas de agua con temperaturas más elevadas y con temperaturas más frías, respectivamente. Considere que T_c es una constante positiva y que T_h es positiva. Por medio del cálculo, demuestre que la eficacia aumenta conforme se incrementa T_h.

[2] M. Eswaran y A. Kotwal, "A Theory of Two-Tier Labor Markets in Agrarian Economics", *The American Economic Review*, 75, núm. 1 (1985), 162-177.

[3] J. I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

74. Servicio telefónico En un análisis del precio del servicio telefónico local, Renshaw[4] determina que el ingreso total r está dado por

$$r = 2F + \left(1 - \frac{a}{b}\right)p - p^2 + \frac{a^2}{b},$$

donde p es un precio indexado por llamada, y a, b y F son constantes. Determine el valor de p que maximiza el ingreso.

75. Costos de almacenamiento y envío En su modelo para los costos de almacenamiento y envío de materiales para un proceso de manufactura, Lancaster[5] obtiene la siguiente función de costo

$$C(k) = 100\left(100 + 9k + \frac{144}{k}\right), \quad 1 \leq k \leq 100,$$

donde $C(k)$ es el costo total (en dólares) de almacenamiento y transporte para 100 días de operación, si una carga de k toneladas de material se mueve cada k días. (a) Encuentre $C(1)$. (b) ¿Para qué valor de k tiene $C(k)$ un mínimo? (c) ¿Cuál es el valor mínimo?

76. Fisiología–aeroembolismo Cuando un buzo sufre descompresión o un piloto vuela a gran altura, el nitrógeno empieza a burbujear en la sangre, ocasionando lo que se denomina *aeroembolismo*. Suponga que el porcentaje P de gente que sufre este efecto a una altura de h miles de pies está dado por[6]

$$P = \frac{100}{1 + 100{,}000e^{-0.36h}}.$$

¿Es P una función creciente de h?

En los problemas del 77 al 80, con base en la gráfica de la función, encuentre las coordenadas de todos los extremos relativos. Redondee sus respuestas a dos decimales.

77. $y = 0.5x^2 + 4.1x + 6.2.$ **78.** $y = 2x^4 - 3x^3 - 4x + 7.$ **79.** $y = \dfrac{8.2x}{0.4x^2 + 3}.$ **80.** $y = \dfrac{e^x(3 - x)}{7x^2 + 1}.$

---

81. Grafique la función

$$f(x) = [x(x - 2)(2x - 3)]^2$$

en la ventana $-1 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 3$. A primera vista podría parecer que esta función tiene dos puntos mínimos relativos y un máximo relativo. Sin embargo, en realidad tiene tres puntos mínimos relativos y dos máximos relativos. Determine los valores x de esos puntos. Redondee sus respuestas a dos decimales.

82. Si $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x + 2$, exhiba las gráficas de f y f' en la misma pantalla. Note que es en $f'(x) = 0$ donde ocurren los extremos relativos de f.

83. Sea $f(x) = 6 + 4x - 3x^2 - x^3$. (a) Determine $f'(x)$. (b) Grafique $f'(x)$. (c) Observe en dónde $f'(x)$ es positiva y donde es negativa. Proporcione los intervalos (redondeados a dos decimales) en que f es creciente y decreciente. (d) Grafique f y f' sobre la misma pantalla y verifique sus resultados de la parte (c).

84. Si $f(x) = x^4 - 3x^2 - (2x - 1)^2$, encuentre $f'(x)$. Determine los valores críticos de f. Redondee sus respuestas a dos decimales.

---

[4]E. Renshaw, "A Note of Equity and Efficiency in the Pricing of Local Telephone Service", *The American Economic Review*, 75, núm. 3 (1985), 515-518.

[5]P. Lancaster, *Mathematics: Models of the Real World* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1978).

[6]Adaptado de G. E. Folk, Jr., *Textbook of Environmental Physiology*, segunda edición (Filadelfia: Lea & Febiger, 1974).

OBJETIVO Determinar los valores extremos en un intervalo cerrado.

12.2 Extremos absolutos en un intervalo cerrado

Si una función f es *continua* en un intervalo *cerrado* $[a, b]$, puede demostrarse que entre *todos* los valores de $f(x)$ de la función de x en $[a, b]$, debe haber un valor máximo (absoluto) y un valor mínimo (absoluto). Esos dos valores se llaman **valores extremos** de f en ese intervalo. Esta importante propiedad de las funciones continuas se llama *teorema del valor extremo*.

Teorema del valor extremo

Si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces la función *tiene* un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo.

Por ejemplo, cada función en la figura 12.25 es continua en el intervalo cerrado $[1, 3]$. En forma geométrica, el teorema del valor extremo nos asegura que sobre este intervalo, cada gráfica tiene un punto de altura máxima y otro de altura mínima.

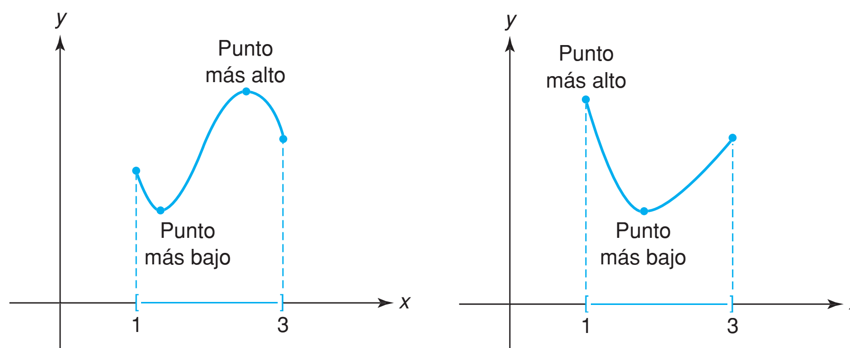


FIGURA 12.25 Ilustración del teorema de los valores extremos.

En el teorema del valor extremo se exige que haya

1. un intervalo cerrado

   y

2. una función continua en ese intervalo.

Si cualquiera de las dos condiciones anteriores no se cumple, entonces los valores extremos no están garantizados. Por ejemplo, la figura 12.26(a) muestra la gráfica de la función continua $f(x) = x^2$ en el intervalo *abierto* $(-1, 1)$. Puede ver que f no tiene un valor máximo en el intervalo (si bien tiene ahí un valor mínimo). Ahora considere la función $f(x) = 1/x^2$ sobre el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Aquí, *f no es continua* en 0. En la gráfica de f en la figura 12.26(b), puede ver que f no tiene un valor máximo (pero sí tiene un valor mínimo).

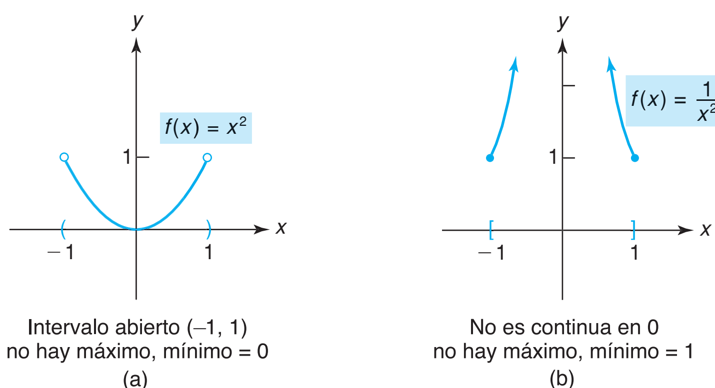


FIGURA 12.26 Aquí no se aplica el teorema de los valores extremos.

En la sección anterior, el énfasis se puso en los extremos relativos. Ahora centraremos nuestra atención en los extremos absolutos y haremos uso del teorema del valor extremo, donde sea posible. Si el dominio de una función es un intervalo cerrado, para determinar extremos *absolutos* debemos examinar la función no sólo en los valores críticos, sino también en los puntos extremos. Por ejemplo, la figura 12.27 muestra la gráfica de la función continua $y = f(x)$

en $[a, b]$. El teorema del valor extremo garantiza extremos absolutos en el intervalo. Es claro que los puntos importantes sobre la gráfica se presentan en $x = a, b, c$ y d, que corresponden a puntos extremos o a valores críticos. Note que el máximo absoluto ocurre en el valor crítico c, y que el mínimo absoluto ocurre en el punto extremo a. Estos resultados sugieren el procedimiento siguiente:

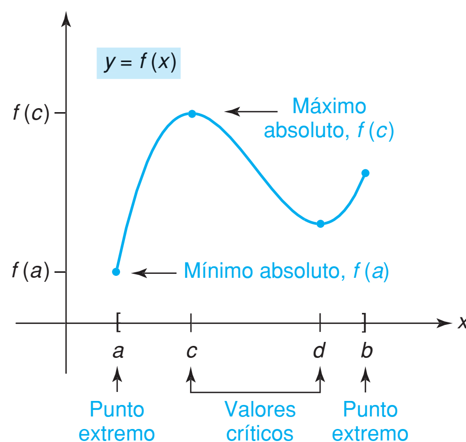


FIGURA 12.27 Extremos absolutos.

> **Procedimiento para encontrar los extremos absolutos de una función f continua en $[a, b]$**
>
> **Paso 1.** Encontrar los valores críticos de f.
>
> **Paso 2.** Evaluar $f(x)$ en los puntos extremos a y b, y en los valores críticos sobre (a, b).
>
> **Paso 3.** El valor máximo de f es el mayor de los valores encontrados en el paso 2. El valor mínimo de f es el menor de los valores encontrados en el paso 2.

EJEMPLO 1 Localización de los valores extremos en un intervalo cerrado

Encontrar los extremos absolutos para $f(x) = x^2 - 4x + 5$ *en el intervalo cerrado* $[1, 4]$.

Solución: como f es continua sobre $[1, 4]$, el procedimiento anterior es aplicable aquí.

Paso 1. Para encontrar los valores críticos de f, primero encontramos f':

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2).$$

Esto da el valor crítico $x = 2$.

Paso 2. Al evaluar $f(x)$ en los puntos extremos 1 y 4, y en el valor crítico 2, tenemos

$$\boxed{\begin{aligned} f(1) &= 2, \\ f(4) &= 5, \end{aligned}} \quad \text{valores de } f \text{ en los puntos extremos}$$

y

$$\boxed{f(2) = 1,} \quad \text{valor de } f \text{ en el valor crítico en } (1, 4).$$

Paso 3. De los valores de la función en el paso 2, concluimos que el máximo es $f(4) = 5$ y el mínimo es $f(2) = 1$ (véase la fig. 12.28).

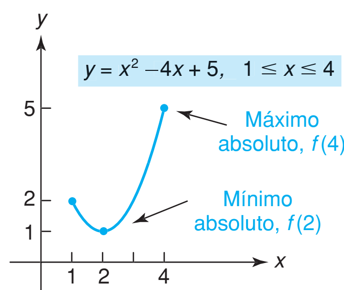


FIGURA 12.28 Valores extremos para el ejemplo 1.

Ejercicio 12.2

En los problemas del 1 al 14 encuentre los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado.

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad [0, 3].$

2. $f(x) = -2x^2 - 6x + 5, \quad [-3, 2].$

3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1, \quad [0, 2].$

4. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2, \quad [0, 1].$

5. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 18x + 3, \quad [\frac{1}{2}, 3].$

6. $f(x) = x^{4/3}, \quad [-8, 8].$

7. $f(x) = -3x^5 + 5x^3, \quad [-2, 0].$

8. $f(x) = \frac{7}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1, \quad [0, 3].$

9. $f(x) = 3x^4 - x^6, \quad [-1, 2].$

10. $f(x) = 2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4, \quad [-1, 1].$

11. $f(x) = x^4 - 9x^2 + 2, \quad [-1, 3].$

12. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad [0, 2].$

13. $f(x) = x^{2/3}, \quad [-2, 3].$

14. $f(x) = 0.3x^3 - 4.2x + 5, \quad [-1, 4].$

15. Considere la función

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 20x + 9$$

en el intervalo $[-4, 9]$.

a. Determine el o los valores (redondeados a dos decimales) de x en que f alcanza un valor mínimo.
b. ¿Cuál es el valor mínimo (redondeado a dos decimales) de f?
c. Determine el o los valores de x en que f alcanza un valor máximo.
d. ¿Cuál es el valor máximo de f?

OBJETIVO Probar una función por concavidad y puntos de inflexión. También hacer el bosquejo de curvas con ayuda de la información obtenida de la primera y segunda derivadas.

12.3 Concavidad

Hemos visto que la primera derivada proporciona mucha información útil para el trazado de gráficas. Se usa para determinar cuándo una función es creciente o decreciente, y para la localización de máximos y mínimos relativos. Sin embargo, para conocer la verdadera forma de una curva necesitamos más información. Por ejemplo, considere la curva $y = f(x) = x^2$. Como $f'(x) = 2x$, $x = 0$ es un valor crítico. Si $x < 0$, entonces $f'(x) < 0$ y f es decreciente; si $x > 0$, entonces $f'(x) > 0$ y f es creciente. Entonces tenemos un mínimo relativo cuando $x = 0$. En la figura 12.29 ambas curvas satisfacen las condiciones anteriores. Pero, ¿cuál gráfica describe verdaderamente la curva? Esta pregunta se contesta con facilidad usando la segunda derivada y la noción de *concavidad*.

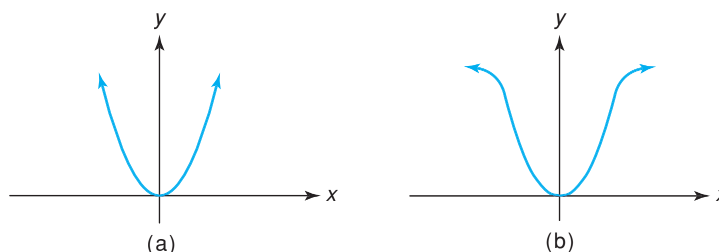


FIGURA 12.29 Dos funciones con $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $f'(x) > 0$ para $x > 0$.

En la figura 12.30 observe que cada curva $y = f(x)$ se "flexiona" (o abre) hacia arriba. Esto significa que si se trazan rectas tangentes a cada curva, las curvas quedarán por *arriba* de éstas. Además, las pendientes de las rectas tangentes *crecen* en valor al crecer x: en la parte (a), las pendientes van de valores positivos pequeños a valores mayores; en la parte (b) son negativas y se acercan

a cero (creciendo); en la parte (c) pasan de valores negativos a positivos. Ya que $f'(x)$ nos da la pendiente en un punto, una pendiente creciente significa que f' debe ser una función creciente. Para describir esta propiedad, se dice que cada curva (o función f) es *cóncava hacia arriba* (o convexa).

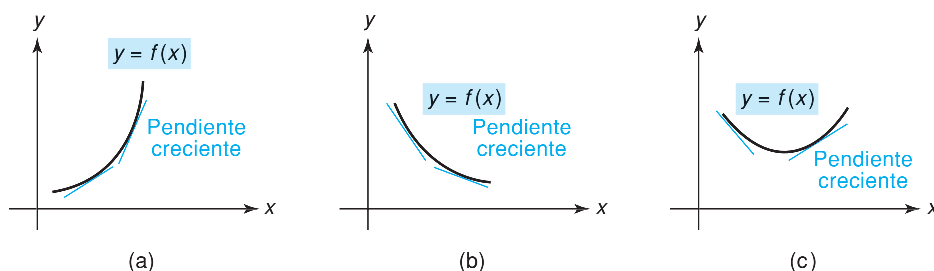


FIGURA 12.30 Cada curva es cóncava hacia arriba.

En la figura 12.31 puede observarse que cada curva se encuentra por *debajo* de las rectas tangentes y las curvas se flexionan hacia abajo. Cuando x crece, las pendientes de las rectas tangentes son *decrecientes*. Entonces, aquí f' es una función decreciente y decimos que es *cóncava hacia abajo* (o simplemente cóncava).

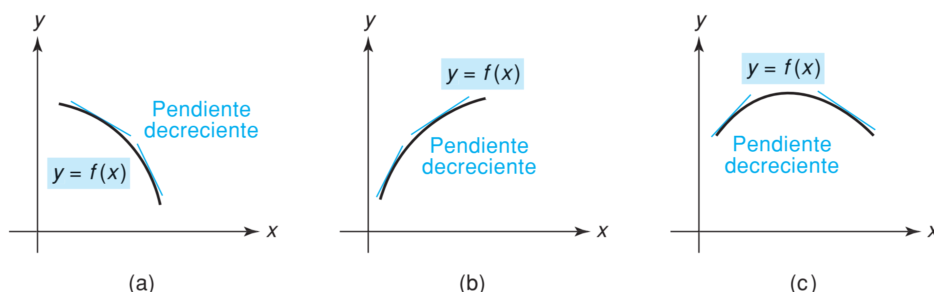


FIGURA 12.31 Cada curva es cóncava hacia abajo.

Definición

Sea f diferenciable en el intervalo (a, b). Entonces, se dice que f es ***cóncava hacia arriba* [*cóncava hacia abajo*]** en (a, b), si f' es creciente [decreciente] en (a, b).



Advertencia La concavidad se refiere a si f', no f, es creciente o decreciente. En la figura 12.30(b) note que f es cóncava hacia arriba y decreciente; sin embargo, en la figura 12.31(a) f es cóncava hacia abajo y decreciente.

Recuerde: si f es cóncava hacia arriba en un intervalo, entonces desde el punto de vista geométrico, su gráfica se flexiona ahí hacia arriba. Si f es cóncava hacia abajo, su gráfica se flexiona hacia abajo.

Como f' es creciente cuando su derivada $f''(x)$ es positiva, y f' es decreciente cuando $f''(x)$ es negativa, podemos establecer la regla siguiente:

Regla 4 Criterios de concavidad

Sea f' diferenciable en el intervalo (a, b). Si $f''(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces f es cóncava hacia arriba en (a, b). Si $f''(x) < 0$, para toda x en (a, b), entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b).

Se dice que una función f es cóncava hacia arriba en un punto x_0 si existe un intervalo abierto alrededor de x_0 en el cual f es cóncava hacia arriba. De hecho, para las funciones que consideraremos, si $f''(x_0) > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba en x_0. En forma similar, f es cóncava hacia abajo en x_0 si $f''(x_0) < 0$.

EJEMPLO 1 Investigación de la concavidad

Determinar dónde la función dada es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo.

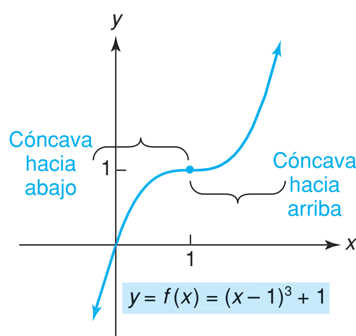


FIGURA 12.32 Concavidad para $f(x) = (x-1)^3 + 1$.

a. $y = f(x) = (x-1)^3 + 1$.

Solución: para aplicar la regla 4 debemos examinar los signos de y''. Tenemos $y' = 3(x-1)^2$, por lo que

$$y'' = 6(x-1).$$

Así, f es cóncava hacia arriba cuando $6(x-1) > 0$, esto es, cuando $x > 1$. Y f es cóncava hacia abajo cuando $6(x-1) < 0$, esto es, cuando $x < 1$. (Véase la fig. 12.32.)

b. $y = x^2$.

Solución: tenemos $y' = 2x$ y $y'' = 2$. Como y'' siempre es positiva, la gráfica de $y = x^2$ debe ser siempre cóncava hacia arriba, como se ve en la figura 12.29(a). La gráfica no puede ser como en la figura 12.29(b), porque esa curva a veces es cóncava hacia abajo.

Un punto sobre una gráfica cuya concavidad cambia de concavidad hacia abajo a concavidad hacia arriba, o viceversa, como el punto (1, 1) en la figura 12.32, se llama *punto de inflexión*. Alrededor de tal punto el signo de $f''(x)$ debe pasar de $-$ a $+$ o de $+$ a $-$. Con mayor precisión:

La definición de un punto de inflexión implica que x_0 está en el dominio de f.

Definición

Una función f tiene un ***punto de inflexión*** cuando $x = x_0$, si y sólo si f es continua en x_0 y f cambia de concavidad en x_0.

Para determinar la concavidad de una función y sus puntos de inflexión, encuentre primero los valores de x donde $f''(x)$ es 0 o no está definida. Esos valores de x determinan intervalos. En cada intervalo determine si $f''(x) > 0$ (f es cóncava hacia arriba) o $f''(x) < 0$ (f es cóncava hacia abajo). Si la concavidad cambia alrededor de uno de esos valores de x, y f es continua ahí, entonces f tiene un punto de inflexión en ese valor de x. El requisito de continuidad implica que el valor x debe estar en el dominio de la función. Brevemente, un *candidato* para punto de inflexión debe satisfacer dos condiciones:

1. f'' debe ser 0 o no estar definida en ese punto.
2. f debe ser continua en ese punto.

El candidato *será* un punto de inflexión si la concavidad cambia alrededor de él. Por ejemplo, si $f(x) = x^{1/3}$, entonces $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ y

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}}.$$

Como f'' no está definida en 0, pero es continua en 0, se tiene un candidato para un punto de inflexión cuando $x = 0$. Si $x > 0$, entonces $f''(x) < 0$, por lo que f es cóncava hacia abajo para $x > 0$; si $x < 0$, entonces $f''(x) > 0$, por lo que f es cóncava hacia arriba para $x < 0$. Como la concavidad cambia en $x = 0$, se tiene ahí un punto de inflexión (véase la fig. 12.33).

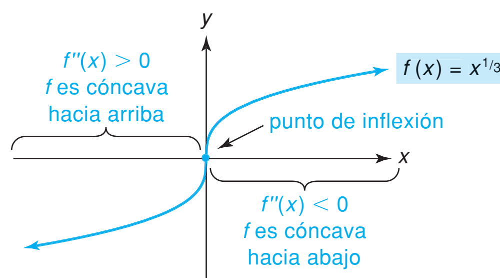


FIGURA 12.33 Puntos de inflexión para $f(x) = x^{1/3}$.

EJEMPLO 2 Concavidad y puntos de inflexión

Investigar la concavidad y los puntos de inflexión de $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

Solución: tenemos

$$y' = 24x^3 - 24x^2,$$

$$y'' = 72x^2 - 48x = 24x(3x - 2).$$

Para determinar cuándo $y'' = 0$, hacemos cada factor en y'' igual a cero. Esto nos da $x = 0, \frac{2}{3}$. Observamos también que y'' nunca deja de estar definida. Así, hay tres intervalos por considerar (véase la fig. 12.34). Como y es continua en 0 y en $\frac{2}{3}$, esos puntos son posibles puntos de inflexión.



FIGURA 12.34 Intervalos a considerar por concavidad de $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

Si $x < 0$, entonces $y'' = 24(-)(-) = +$, por lo que la curva es cóncava hacia arriba;

si $0 < x < \frac{2}{3}$, entonces $y'' = 24(+)(-) = -$, por lo que la curva es cóncava hacia abajo;

si $x > \frac{2}{3}$, entonces $y'' = 24(+)(+) = +$, por lo que la curva es cóncava hacia arriba (véase la fig. 12.35).

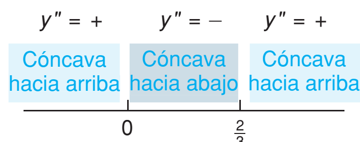


FIGURA 12.35 Diagrama de signos de $y'' = 24x(3x - 2)$.

Como la concavidad cambia en los puntos en que $x = 0$ y $\frac{2}{3}$, estos candidatos son puntos de inflexión (véase la fig. 12.36). En resumen, la curva es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y $(\frac{2}{3}, \infty)$, y es cóncava hacia abajo en $(0, \frac{2}{3})$. Los puntos de inflexión se presentan cuando $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$. Esos puntos son $(0, 1)$ y $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{27})$

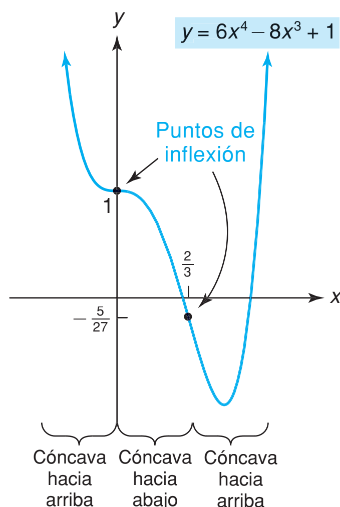


FIGURA 12.36 Gráfica de $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

EJEMPLO 3 Cambio en la concavidad sin punto de inflexión

Analizar la concavidad y encontrar todos los puntos de inflexión de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solución: como $f(x) = x^{-1}$,

$$f'(x) = -x^{-2},$$

$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}.$$

Vemos que $f''(x)$ nunca es cero, pero no está definida en $x = 0$. Como f no es continua en cero, concluimos que 0 no constituye un candidato para un punto de inflexión. Entonces la función dada no tiene puntos de inflexión. Sin embargo, 0 debe considerarse en el análisis de la concavidad (véase la recta numérica en la figura 12.37; observe que hemos encerrado en un cuadro el valor cero, para indicar que no puede corresponder a un punto de inflexión). Si $x > 0$, entonces $f''(x) > 0$; si $x < 0$, entonces $f''(x) < 0$. Por tanto, f es cóncava

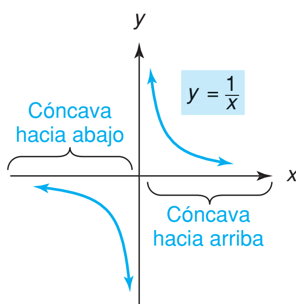


FIGURA 12.38 Gráfica de $y = \frac{1}{x}$.

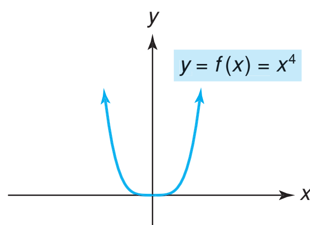


FIGURA 12.39 Gráfica de $f(x) = x^4$.

hacia arriba en $(0, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$. (Véase la fig. 12.38.) No obstante que la concavidad cambia alrededor de $x = 0$, no existe ahí punto de inflexión, porque f no es continua en 0 (ni está definida ahí).

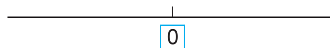


FIGURA 12.37 Intervalos a considerar para el análisis de concavidad.



Advertencia Un candidato a punto de inflexión no tiene que ser necesariamente un punto de inflexión. Por ejemplo, si $f(x) = x^4$, entonces $f''(x) = 12x^2$ y $f''(0) = 0$. Pero, $x < 0$ implica que $f''(x) > 0$ y $x > 0$ implica $f''(x) > 0$. Así, la concavidad no cambia y no se tienen puntos de inflexión (véase la fig. 12.39).

Trazado de curvas

EJEMPLO 4 Trazado de una curva

Trazar la gráfica de $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

Solución:

Intersecciones Si $x = 0$, entonces $y = 0$. Haciendo $y = 0$, resulta que $0 = x(2x^2 - 9x + 12)$. Es claro que $x = 0$, y al utilizar la fórmula cuadrática en $2x^2 - 9x + 12 = 0$, se encuentra que no tiene raíces reales. Por tanto, la única intersección es $(0, 0)$.

Simetría Ninguna.

Máximos y mínimos Si $y = f(x)$, tenemos

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2).$$

Los valores críticos son $x = 1, 2$ (véase la fig. 12.40).

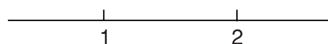


FIGURA 12.40 Valores críticos de $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.



FIGURA 12.41 Diagrama de signos de $f'(x)$.

Si $x < 1$, entonces $f'(x) = 6(-)(-) = +$, por lo que f es creciente;

si $1 < x < 2$, entonces $f'(x) = 6(+)(-) = -$, por lo que f es decreciente;

si $x > 2$, entonces $f'(x) = 6(+)(+) = +$, por lo que f es creciente (véase la fig. 12.41).

Existe un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

Concavidad

$$f''(x) = 12x - 18 = 6(2x - 3).$$

Haciendo $f''(x) = 0$ resulta un punto de inflexión posible en $x = \frac{3}{2}$.

Si $x < \frac{3}{2}$, entonces $f''(x) < 0$, por lo que f es cóncava hacia abajo;

si $x > \frac{3}{2}$, entonces $f''(x) > 0$, por lo que f es cóncava hacia arriba (véase la fig. 12.42).

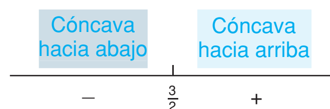


FIGURA 12.42 Diagrama de signos de $f''(x)$.

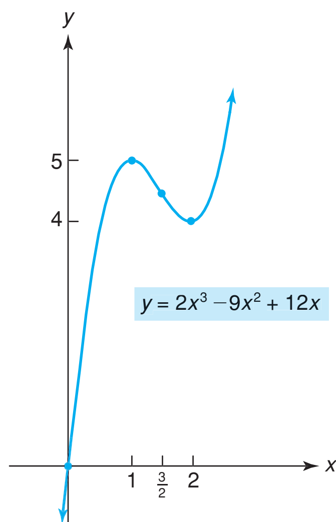


FIGURA 12.43 Gráfica de $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

Como la concavidad cambia alrededor de $x = \frac{3}{2}$ y f es continua ahí, f tiene un punto de inflexión en $x = \frac{3}{2}$.

Análisis Ahora encontramos las coordenadas de los puntos importantes sobre la gráfica (y de otros puntos cualesquiera si se tienen dudas sobre el comportamiento de la curva). Tenemos la tabla siguiente:

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2
y	0	5	$\frac{9}{2}$	4

Conforme x crece, la función primero es cóncava hacia abajo y crece a un máximo relativo en $(1, 5)$; luego decrece hasta $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$; después se vuelve cóncava hacia arriba pero continúa decreciendo hasta que alcanza un mínimo relativo en $(2, 4)$; de ahí en adelante crece y sigue con su concavidad hacia arriba (véase la fig. 12.43).

Tecnología

Suponga que se requiere encontrar los puntos de inflexión de

$$f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{17}{16}x^4 + \frac{273}{32}x^3 - \frac{4225}{128}x^2 + \frac{750}{4}.$$

La segunda derivada de f está dada por

$$f''(x) = x^3 - \frac{51}{4}x^2 + \frac{819}{16}x - \frac{4225}{64}.$$

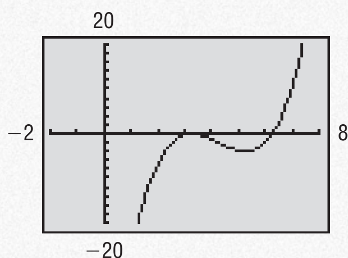


FIGURA 12.44 Gráfica de f''; los ceros de f'' son 3.25 y 6.25.

Aquí los ceros de f'' no son obvios. Por ello, graficaremos f'' utilizando una calculadora gráfica (véase la fig. 12.44). Encontramos que los ceros de f'' son aproximadamente 3.25 y 6.25. Alrededor de $x = 6.25$, $f''(x)$ pasa de valores negativos a positivos. Así, en $x = 6.25$ se tiene un punto de inflexión. Alrededor de $x = 3.25$, $f''(x)$ no cambia de signo, por lo que no existe punto de inflexión en $x = 3.25$. Al comparar nuestros resultados con la gráfica de f en la figura 12.45, se ve que concuerdan.

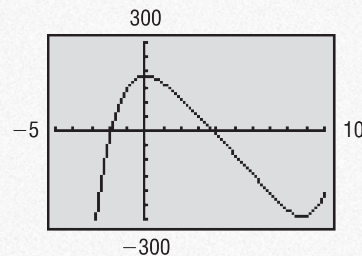


FIGURA 12.45 Gráfica de f; punto de inflexión en $x = 6.25$, pero no en $x = 3.25$.

Ejercicio 12.3

En los problemas del 1 al 6 se da una función y su segunda derivada. Determine la concavidad de f y los valores de x en los que se presentan los puntos de inflexión.

1. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 7x - 5;\quad f''(x) = 6x(2x - 3).$

2. $f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{4} - 2x^2;\quad f''(x) = (x - 1)(x + 2)^2.$

3. $f(x) = \frac{2 + x - x^2}{x^2 - 2x + 1};\quad f''(x) = \frac{2(7 - x)}{(x - 1)^4}.$

4. $f(x) = -\frac{x^2}{(2 - x)^2};\quad f''(x) = -\frac{8(x + 1)}{(2 - x)^4}.$

5. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2};\quad f''(x) = \frac{6(3x^2 + 2)}{(x^2 - 2)^3}.$

6. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2};\quad f''(x) = \frac{2x(x^2 - 6)}{(4 - x^2)^{3/2}}.$

En los problemas del 7 al 34 determine la concavidad y los valores de x en los que se presentan los puntos de inflexión. No trace las gráficas.

7. $y = -2x^2 + 4x.$

8. $y = 3x^2 - 6x + 5.$

9. $y = 4x^3 + 12x^2 - 12x.$

10. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$

11. $y = 4x^3 - 21x^2 + 5x.$

12. $y = x^4 - 8x^2 - 6.$

13. $y = x^4 - 6x^2 + 5x - 6.$

14. $y = -\frac{x^4}{4} + \frac{9x^2}{2} + 2x.$

15. $y = 2x^{1/5}.$

16. $y = \frac{3}{x^5}.$

17. $y = \frac{x^4}{2} + \frac{19x^3}{6} - \frac{7x^2}{2} + x + 5.$

18. $y = -\frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}.$

19. $y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}.$

20. $y = \frac{9}{5}x^5 - \frac{32}{3}x^3 + 10x - 2.$

21. $y = \frac{1}{30}x^6 - \frac{7}{12}x^4 + 5x^2 + 2x - 1.$

22. $y = x^6 - 3x^4.$

23. $y = \frac{x + 1}{x - 1}.$

24. $y = x + \frac{1}{x}.$

25. $y = \frac{4x^2}{x^2 + 1}.$

26. $y = \frac{4x^2}{x + 3}.$

27. $y = \frac{21x + 40}{6(x + 3)^2}.$

28. $y = 7(x^2 - 4)^2.$

29. $y = 5e^x.$

30. $y = e^x - e^{-x}.$

31. $y = 3xe^x.$

32. $y = 2xe^{-x}.$

33. $y = \frac{\ln x}{2x}.$

34. $y = \frac{x^2 + 1}{3e^x}.$

En los problemas del 35 al 62 esboce cada curva. Después, determine los intervalos en los que la función crece, decrece, es cóncava hacia arriba, es cóncava hacia abajo; máximos y mínimos relativos; puntos de inflexión; simetría y aquellas intersecciones que puedan obtenerse de manera conveniente.

35. $y = x^2 + 4x + 3.$

36. $y = x^2 + 2.$

37. $y = 4x - x^2.$

38. $y = x - x^2 + 2.$

39. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 19.$

40. $y = 3x - x^3.$

41. $y = \frac{x^3}{3} - 4x.$

42. $y = x^3 - 6x^2 + 9x.$

43. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 3.$

44. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x.$

45. $y = 4x^3 - 3x^4.$

46. $y = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x - 2.$

47. $y = -2 + 12x - x^3.$

48. $y = (3 + 2x)^3.$

49. $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 6.$

50. $y = \frac{x^5}{100} - \frac{x^4}{20}.$

51. $y = 5x - x^5.$

52. $y = x(1 - x)^3.$

53. $y = 3x^4 - 4x^3 + 1.$

54. $y = 3x^5 - 5x^3.$

55. $y = 4x^2 - x^4.$

56. $y = x^4 - 2x^2.$

57. $y = x^{1/3}(x - 8).$

58. $y = (x - 1)^2(x + 2)^2.$

59. $y = 4x^{1/3} + x^{4/3}.$

60. $y = 2x\sqrt{x + 3}.$

61. $y = 2x + 3x^{2/3}.$

62. $y = 5x^{2/3} - x^{5/3}.$

---

63. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua f tal que $f(2) = 4$, $f'(2) = 0$, $f'(x) < 0$ si $x < 2$ y $f''(x) > 0$ si $x > 2$.

64. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua f tal que $f(3) = 2$, $f'(3) = 0$, $f''(x) > 0$ para $x < 3$ y $f''(x) < 0$ para $x > 3$.

65. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua f tal que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x.

66. Haga el bosquejo de la gráfica de una función continua f tal que $f(3) = 4$, las dos $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ para $x < 3$, y ambas $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para $x > 3$.

67. Ecuación de demanda Demuestre que la gráfica de la ecuación de demanda $p = \frac{100}{q + 2}$ es decreciente y cóncava hacia arriba para $q > 0$.

68. Costo promedio Para la función costo

$$c = 3q^2 + 5q + 6,$$

demuestre que la gráfica de la función de costo promedio $\bar{c}$ siempre es cóncava hacia arriba para $q > 0$.

69. Especies de plantas El número de especies de plantas en un lote puede depender del tamaño del lote. Por ejemplo, en la figura 12.46 vemos que en lotes de 1 m² hay tres especies (A, B y C en el lote izquierdo; A, B y D en el lote derecho), y que en un lote de 2 m² hay cuatro especies (A, B C y D).

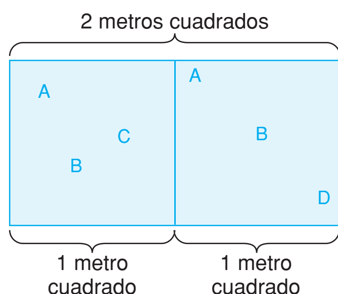


FIGURA 12.46 Especies de plantas.

En un estudio acerca de las plantas de cierta región geográfica,[7] se determinó que el número promedio de especies, S, que se presentan en lotes de tamaño A (en metros cuadrados) está dado por

$$S = f(A) = 12\sqrt[4]{A}, \qquad 0 \leq A \leq 625.$$

Haga el bosquejo de la gráfica de f (*nota:* su gráfica debe ser creciente y cóncava hacia abajo. Por ello el número de especies es creciente con respecto al área, pero a una razón decreciente).

70. Artículo de calidad inferior En un análisis de un artículo de calidad inferior, Persky[8] considera una función de la forma

$$g(x) = e^{(U_0/A)}e^{-x^2/(2A)},$$

donde x es una cantidad del bien, U_0 es una constante que representa la utilidad y A es una constante positiva. Persky afirma que la gráfica de g es cóncava hacia abajo para $x < \sqrt{A}$, y cóncava hacia arriba para $x > \sqrt{A}$. Verifique esto.

71. Psicología En un experimento psicológico que implicaba respuestas condicionadas,[9] varias personas escuchaban cuatro tonos, denotados como 0, 1, 2 y 3. Inicialmente, las personas se condicionaron al tono 0, esto al recibir un choque eléctrico siempre que lo oían. Luego, cuando cada uno de los cuatro tonos (estímulos) se escucharon sin choques eléctricos, la respuesta del sujeto se registró por medio de un dispositivo rastreador que medía la reacción galvánica de la piel. La respuesta media para cada estímulo (sin choque eléctrico) se determinó, y los resultados se graficaron en un plano coordenado, en donde los ejes x y y representan el estímulo (0, 1, 2 y 3) y la respuesta galvánica promedio, respectivamente. También se determinó que los puntos se ajustan a una curva dada aproximadamente por la gráfica de

$$y = 12.5 + 5.8(0.42)^x.$$

Demuestre que esta función es decreciente y cóncava hacia arriba.

72. Entomología En un estudio sobre los efectos de la privación de alimento en condiciones de hambre,[10] un insecto fue alimentado hasta que su apetito estuvo completamente satisfecho. Después fue privado de alimento durante t horas (periodo de privación). Al final de este periodo, el insecto de nuevo fue alimentado hasta que su apetito estuvo completamente satisfecho. Se encontró estadísticamente que el peso H (en gramos) del alimento que se consumió en este tiempo, era una función de t, donde

$$H = 1.00[1 - e^{-(0.0464t+0.0670)}].$$

Aquí H es una medida del hambre. Demuestre que H es creciente con respecto a t y cóncava hacia abajo.

73. Dispersión de insectos En un experimento sobre la dispersión de un insecto específico,[11] un gran número de insectos se colocan en un punto de liberación en un campo abierto. Alrededor de este punto hay trampas dispuestas según un arreglo circular concéntrico a distancias de 1 m, 2 m, 3 m, etc., del punto de liberación. Veinticuatro horas después de que se liberan, se cuenta el número de insectos en cada trampa. Se determinó que a una distancia de r metros del punto en que se ponen en libertad, el número promedio de insectos contenidos en una trampa es n, donde

$$n = f(r) = 0.1\ln(r) + \frac{7}{r} - 0.8, \quad 1 \leq r \leq 10.$$

(a) Demuestre que la gráfica de f es siempre decreciente y cóncava hacia arriba. (b) Haga el bosquejo de la gráfica de f. (c) Cuando $r = 5$, ¿a qué razón está decreciendo el número promedio de insectos en una trampa con respecto a la distancia?

74. Grafique $y = 0.25x^3 - 3.1x^2 + 9.9x - 6.1$, y de la gráfica determine el número de (a) puntos máximos relativos, (b) puntos mínimos relativos y (c) puntos de inflexión.

75. Grafique $y = x^5(x - 2.3)$ y de la gráfica determine el número de puntos de inflexión.

[7]Adaptado de R. W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

[8]A. L. Persky, "An Inferior Good and a Novel Indifference Map". *The American Economist* XXIX, núm. 1 (1985), 67-69.

[9]Adaptado de C. I. Hovland, "The Generalization of Conditioned Responses: I. The Sensory Generalization of Conditioned Responses with Varying Frequencies of Ton", *Journal of General Psychology*, 17 (1937), 125-148.

[10]C. S. Holling, "The Functional Response of Invertebrate Predators to Prey Density", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 48 (1966).

[11]Adaptado de Poole, *op. cit.*

76. Grafique $y = 1 - 2^{-x^2}$ y de la gráfica determine el número de puntos de inflexión.

77. Grafique la curva $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$, y también la recta tangente a la curva en $x = 2$. Alrededor de $x = 2$, ¿está la curva arriba o debajo de la recta tangente? Con base en su apreciación, determine la concavidad en $x = 2$.

78. Si $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$, encuentre $f'(x)$ y $f''(x)$. Observe que donde f' tiene un mínimo relativo, f cambia la dirección de su flexión. ¿Por qué?

79. Si $f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 1$, encuentre los valores x (redondeados a dos decimales) de los puntos de inflexión de f.

80. Si $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}$, determine los valores de x (redondeados a dos decimales) de los puntos de inflexión de f.

OBJETIVO Localizar extremos relativos por medio de la aplicación de la prueba de la segunda derivada.

12.4 Prueba de la segunda derivada

La segunda derivada puede usarse para probar si ciertos valores críticos corresponden a valores extremos relativos. Observe en la figura 12.47, que cuando $x = x_0$, se tiene una tangente horizontal; esto es, $f'(x_0) = 0$. Además, alrededor de x_0 la función es cóncava hacia arriba [esto es, $f''(x_0) > 0$]. Lo anterior nos lleva a concluir que habrá un mínimo relativo en x_0. Por otra parte, alrededor de x_1 la función es cóncava hacia abajo [esto es, $f''(x_1) < 0$]. Como la recta tangente es horizontal en x_1, concluimos que ahí existe un máximo relativo. Esta técnica de examinar la segunda derivada en puntos donde la primera derivada es cero, se llama *prueba de la segunda derivada* para extremos relativos.

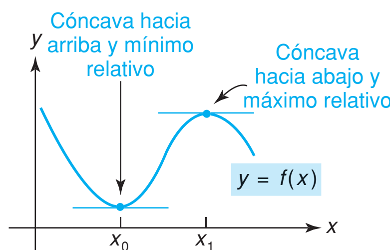


FIGURA 12.47 Relación de la concavidad con los extremos relativos.

> **Prueba de la segunda derivada para extremos relativos**
> Suponga que $f'(x_0) = 0$.
> Si $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0.
> Si $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

Queremos enfatizar que la **prueba de la segunda derivada *no es* aplicable cuando $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$.** Bajo estas condiciones, en x_0 puede existir un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de éstos. En esos casos debe usarse la prueba de la primera derivada para analizar qué está sucediendo en x_0. Además, la prueba de la segunda derivada no es aplicable cuando $f'(x_0)$ no está definida.

EJEMPLO 1 Prueba de la segunda derivada

Investigar los máximos y mínimos de la función siguiente. Utilizar, si es posible, la prueba de la segunda derivada.

a. $y = 18x - \frac{2}{3}x^3$.

Solución:

$$y' = 18 - 2x^2 = 2(9 - x^2) = 2(3 + x)(3 - x),$$

$$y'' = -4x \qquad \left(\text{tomando } \frac{d}{dx} \text{ de } 18 - 2x^2\right).$$

Resolviendo $y' = 0$ se obtienen los valores críticos $x = \pm 3$.

$$\text{Si } x = 3, \text{ entonces } y'' = -4(3) = -12 < 0,$$

por lo que existe un máximo relativo en $x = 3$.

$$\text{Si } x = -3, \text{ entonces } y'' = -4(-3) = 12 > 0,$$

por lo que existe un mínimo relativo en $x = -3$ (véase la fig. 12.4).

Aunque la prueba de la segunda derivada es muy útil, no dependa por completo de ella. La prueba no sólo puede no aplicarse, sino que en ocasiones podría ser muy complicado determinar la segunda derivada.

b. $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

Solución:

$$y' = 24x^3 - 24x^2 = 24x^2(x - 1),$$

$$y'' = 72x^2 - 48x.$$

Al resolver $y' = 0$, se obtienen los valores críticos $x = 0, 1$. Vemos que

$$\text{si } x = 0, \text{ entonces } y'' = 0,$$

y

$$\text{si } x = 1, \text{ entonces } y'' > 0.$$

De acuerdo con la prueba de la segunda derivada, se tiene un mínimo relativo en $x = 1$. No podemos aplicar la prueba cuando $x = 0$, porque ahí $y'' = 0$. Para ver qué pasa en cero, nos remitimos a la prueba de la primera derivada:

$$\text{Si } x < 0, \text{ entonces } y' < 0;$$

$$\text{si } 0 < x < 1, \text{ entonces } y' < 0.$$

Por tanto, no existe ni máximo ni mínimo en $x = 0$ (véase la fig. 12.36).

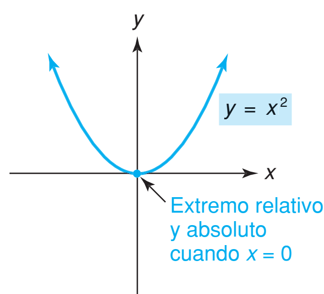


FIGURA 12.48 Exactamente un extremo relativo implica un extremo absoluto.

Si una función continua tiene *exactamente un* extremo relativo en un intervalo, puede demostrarse que el extremo relativo debe también ser un extremo *absoluto* en el intervalo. Para ilustrar esto, en la figura 12.48, la función $y = x^2$ tiene un mínimo relativo cuando $x = 0$, y no hay otros extremos relativos. Como $y = x^2$ es continua, este mínimo relativo es también un mínimo absoluto para la función.

EJEMPLO 2 Extremos absolutos

Si $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, *determinar dónde ocurren los extremos absolutos en el intervalo* $(0, \infty)$.

Solución: tenemos

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$$
$$= 3(x + 1)(x - 3).$$

El único valor crítico en el intervalo $(0, \infty)$ es 3. Al aplicar la prueba de la segunda derivada en este punto se obtiene

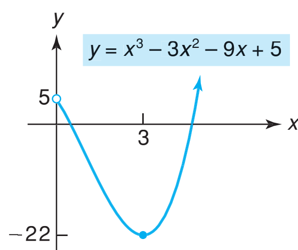


FIGURA 12.49 En $(0, \infty)$, existe un mínimo absoluto cuando $x = 3$.

$$f''(x) = 6x - 6,$$
$$f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0.$$

Así, existe un mínimo relativo en $x = 3$. Como éste es el único extremo relativo en $(0, \infty)$ y f es continua ahí, concluimos de nuestro análisis anterior que en realidad se trata de un valor mínimo *absoluto* cuando $x = 3$; este valor es $f(3) = -22$ (véase la fig. 12.49).

Ejercicio 12.4

En los problemas del 1 al 14 efectúe la prueba para máximos y mínimos. En caso de ser posible, utilice la prueba de la segunda derivada. En los problemas del 1 al 4 establezca si los extremos relativos son también extremos absolutos.

1. $y = x^2 - 5x + 6.$

2. $y = -2x^2 + 6x + 12.$

3. $y = -4x^2 + 2x - 8.$

4. $y = 3x^2 - 5x + 6.$

5. $y = x^3 - 27x + 1.$

6. $y = x^3 - 12x + 1.$

7. $y = -x^3 + 3x^2 + 1.$

8. $y = x^4 - 2x^2 + 4.$

9. $y = 3x^4 + 3.$

10. $y = -2x^7.$

11. $y = 81x^5 - 5x.$

12. $y = \frac{13}{3}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - 10x - 7.$

13. $y = (x^2 + 7x + 10)^2.$

14. $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + x - 5.$

OBJETIVO Determinar asíntotas horizontales y verticales para una curva y hacer el bosquejo de las gráficas de funciones que tienen asíntotas.

12.5 Asíntotas

Asíntotas verticales

En esta sección concluimos nuestro análisis sobre los procedimientos para el trazado de curvas, investigando funciones que tengan *asíntotas*. Básicamente, una asíntota es una recta a la que una curva se acerca cada vez más. Por ejemplo, en cada inciso de la figura 12.50, la línea punteada $x = a$ es una asíntota. Para ser precisos sobre esto, necesitamos hacer uso de los límites infinitos. En la figura 12.50(a), observe que cuando $x \to a^+$, $f(x)$ se vuelve positiva y tiende a infinito:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty.$$

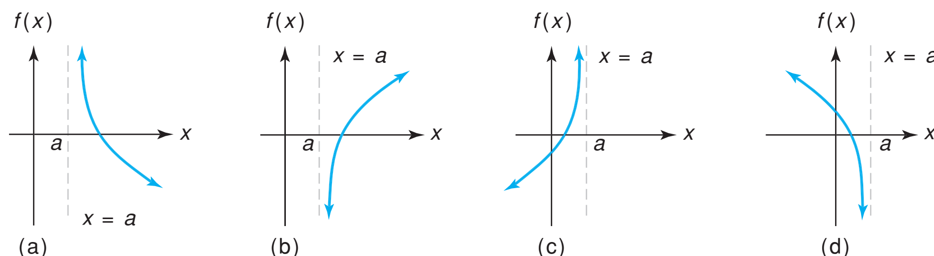


FIGURA 12.50 Asíntotas verticales $x = a$.

En la figura 12.50(b), cuando $x \to a^+$, $f(x)$ se vuelve negativa y tiende a menos infinito:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty.$$

En la figura 12.50(c) y (d) tenemos

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty,$$

respectivamente.

Hablando de manera informal, podemos decir que cada gráfica en la figura 12.50 tiene una "explosión" alrededor de la línea vertical punteada $x = a$, en el sentido de que el límite de $f(x)$ desde alguno de sus lados en a, es ∞ o bien $-\infty$. La recta $x = a$ se llama *asíntota vertical* de la gráfica. Una asíntota vertical no es parte de la gráfica, pero es útil en el trazado de ésta porque parte de la gráfica se acerca a la asíntota. Debido a la explosión alrededor de $x = a$, la función *no es* continua en a.

Definición

La recta $x = a$ es una ***asíntota vertical*** para la gráfica de la función $f(x)$ si y sólo si, por lo menos se cumple uno de los enunciados siguientes:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \text{ (o } -\infty)$$

o

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \text{ (o } -\infty).$$

Para determinar asíntotas verticales, debemos encontrar valores de x alrededor de los cuales $f(x)$ crezca o disminuya sin límite. Para una función racional (cociente de dos polinomios), esos valores de x son precisamente aquéllos para los que el denominador se hace cero, pero el numerador no. Por ejemplo, consideremos la función racional

$$f(x) = \frac{3x - 5}{x - 2}.$$

Cuando x es 2, el denominador es cero, pero el numerador no. Si x es ligeramente mayor que 2, entonces el valor de $x - 2$ resulta cercano a cero y positivo, y el valor de $3x - 5$ resulta cercano a 1. Así $(3x - 5)/(x - 2)$ resulta muy grande, por lo que

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3x - 5}{x - 2} = \infty.$$

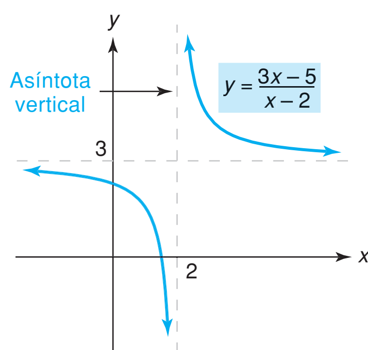


FIGURA 12.51 Gráfica de $y = \dfrac{3x - 5}{x - 2}$.

Este límite es suficiente para concluir que la recta $x = 2$, es una asíntota vertical. Como estamos interesados en el comportamiento de una función alrededor de una asíntota vertical, vale la pena examinar qué le pasa a esta función cuando x se acerca a 2 por la izquierda. Si x es ligeramente menor que 2, entonces el valor de $x - 2$ resulta muy cercano a cero pero negativo, y el valor de $3x - 5$ resulta cercano a 1. Así, $(3x - 5)/(x - 2)$ es "muy negativo", por lo que

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3x - 5}{x - 2} = -\infty.$$

Concluimos que la función crece sin límite cuando $x \to 2^+$ y decrece sin límite cuando $x \to 2^-$. La gráfica se muestra en la figura 12.51.

En resumen, tenemos una regla para las asíntotas verticales.

Regla de las asíntotas verticales para funciones racionales

Suponga que

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde P y Q son funciones polinomiales. La recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de f si y sólo si $Q(a) = 0$ y $P(a) \neq 0$.

EJEMPLO 1 Determinación de asíntotas verticales

Determinar las asíntotas verticales para la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}.$$

Solución: como f es una función racional, es aplicable aquí la regla de las asíntotas verticales. Si escribimos

$$f(x) = \frac{x(x - 4)}{(x - 3)(x - 1)} \qquad \text{(factorizando),}$$

resulta claro que el denominador es 0 cuando x es 3 o 1. Ninguno de esos valores anula al numerador 0. Las rectas $x = 3$ y $x = 1$ son entonces asíntotas verticales (véase la fig. 12.52).

Aunque la regla de la asíntota vertical garantiza que las rectas $x = 3$ y $x = 1$ son asíntotas verticales, no indica la naturaleza precisa de la "explosión" alrededor de estas rectas. Un análisis preciso requiere del uso de los límites laterales.

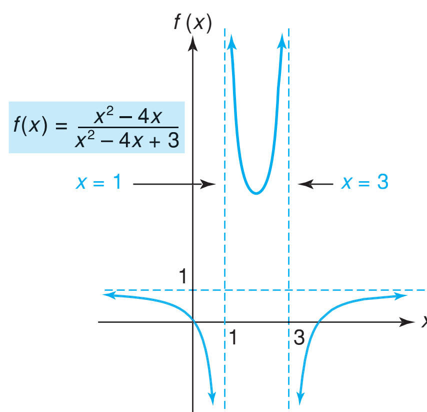


FIGURA 12.52 Gráfica de $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}$.

Asíntotas horizontales

Una curva $y = f(x)$ puede tener otro tipo de asíntota. En la figura 12.53(a), conforme x crece sin límite ($x \to \infty$), la gráfica se acerca a la recta horizontal $y = b$. Esto es,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

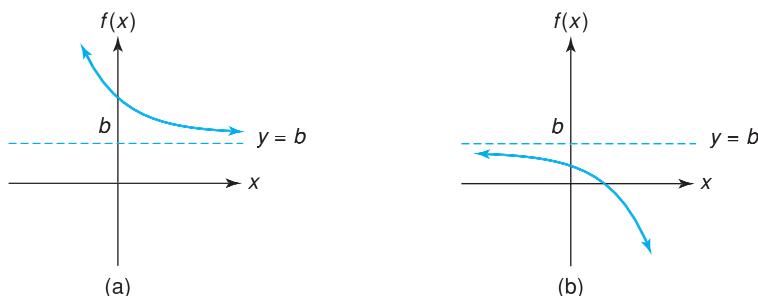


FIGURA 12.53 Asíntotas horizontales $y = b$.

En la figura 12.53(b), cuando x tiende a infinito negativamente, la gráfica se acerca a la recta horizontal $y = b$. Esto es,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

En cada caso, la línea punteada $y = b$ se llama *asíntota horizontal* de la gráfica, la que es una recta horizontal hacia la cual "tiende" la gráfica cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$.

Aunque la gráfica de una recta horizontal tiende hacia sí misma cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$, no se considera que una recta tenga asíntotas. En resumen, tenemos la definición siguiente:

Definición

Sea f una función no lineal. La recta $y = b$ es una ***asíntota horizontal*** de la gráfica de f si y sólo si, por lo menos es verdadero uno de los siguientes enunciados:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

Para determinar las asíntotas horizontales, primero debemos encontrar los límites de $f(x)$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Para ilustrar, de nuevo consideremos

$$f(x) = \frac{3x-5}{x-2}.$$

Como ésta es una función racional, podemos usar los procedimientos de la sección 9.2 para encontrar los límites. Como el término dominante del numerador es $3x$ y el término dominante en el denominador es x, tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-5}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x\to\infty} 3 = 3.$$

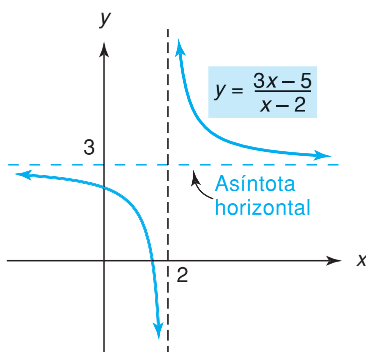


FIGURA 12.54 Gráfica de $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$.

Así, la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal (véase la fig. 12.54). Además,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x\to-\infty} 3 = 3.$$

Por tanto, la gráfica tiende a la recta horizontal $y = 3$ cuando $x \to \infty$ y también cuando $x \to -\infty$.

EJEMPLO 2 Determinación de asíntotas horizontales

Encontrar las asíntotas horizontales para la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}.$$

Solución: tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1.$$

Por tanto, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal. El mismo resultado se obtiene cuando $x \to -\infty$ (véase la fig. 12.52).

Es apropiado ahora hacer algunos comentarios sobre las asíntotas. Con las asíntotas verticales examinamos el comportamiento de una gráfica alrededor de valores específicos de x. Sin embargo, con las asíntotas horizontales

examinamos la gráfica cuando x crece sin límite. Aunque una gráfica puede tener numerosas asíntotas verticales, puede tener cuando más dos asíntotas horizontales.

En la sección 9.2 vimos que cuando el numerador de una función racional tiene un grado mayor que el denominador, no existe un límite cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. De esto concluimos que: *siempre que el grado del numerador de una función racional sea mayor que el del denominador, la gráfica de la función no puede tener una asíntota horizontal.*

EJEMPLO 3 Determinación de asíntotas verticales y horizontales

Encontrar las asíntotas verticales y horizontales para la gráfica de la función polinomial

$$y = f(x) = x^3 + 2x.$$

Solución: comenzamos con las asíntotas verticales. Ésta es una función racional con denominador igual a 1, el que nunca es cero. Por la regla de las asíntotas verticales, no se tienen asíntotas verticales. Como el grado del numerador (3) es mayor que el del denominador (0), no se tienen asíntotas horizontales. Sin embargo, examinemos el comportamiento de la gráfica cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Tenemos

$$\lim_{x\to\infty} (x^3 + 2x) = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

$$\text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} (x^3 + 2x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

Entonces, cuando $x \to \infty$ la gráfica se extiende indefinidamente hacia arriba, y cuando $x \to -\infty$ se extiende indefinidamente hacia abajo (véase la fig. 12.55).

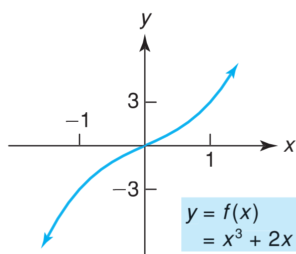


FIGURA 12.55 La gráfica de $y = x^3 + 2x$ no tiene asíntota horizontal ni asíntota vertical.

Los resultados del ejemplo 3 pueden generalizarse a cualquier función polinomial:

> Una función polinomial no tiene asíntotas, ni verticales ni horizontales.

EJEMPLO 4 Determinación de asíntotas horizontales y verticales

Encontrar las asíntotas horizontales y verticales para la gráfica de $y = e^x - 1$.

Solución: para investigar las asíntotas horizontales, hacemos que $x \to \infty$. Entonces e^x crece sin límite, por lo que

$$\lim_{x\to\infty} (e^x - 1) = \infty.$$

Así, la gráfica no tiende a valor alguno cuando $x \to \infty$. Sin embargo, cuando $x \to -\infty$, tenemos que $e^x \to 0$, por lo que

$$\lim_{x\to-\infty} (e^x - 1) = \lim_{x\to-\infty} e^x - \lim_{x\to-\infty} 1 = 0 - 1 = -1.$$

Por tanto, la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal. La gráfica no tiene asíntotas verticales porque $e^x - 1$ ni crece ni disminuye sin límite alrededor de algún punto fijo de x (véase la fig. 12.56).

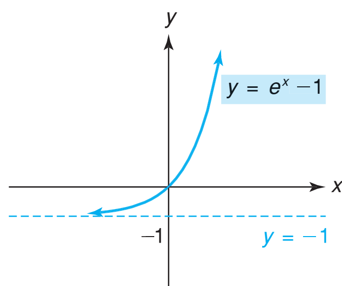


FIGURA 12.56 La gráfica de $y = e^x - 1$ tiene una asíntota horizontal.

Trazado de curvas

Concluimos este capítulo con dos ejemplos que muestran cómo graficar una función empleando todas las herramientas que hemos desarrollado para el trazado de curvas.

EJEMPLO 5 Trazado de una curva

Hacer el bosquejo de la gráfica de $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$.

Solución:

Intersecciones Cuando $x = 0$, $y = \frac{1}{4}$. Si $y = 0$, entonces $0 = 1/(4 - x^2)$, que no tiene solución. Así $(0, \frac{1}{4})$ es la única intersección.

Simetría Existe simetría con respecto al eje y: si reemplazamos x por $-x$ resulta

$$y = \frac{1}{4 - (-x)^2}, \quad \text{o} \quad y = \frac{1}{4 - x^2},$$

que es igual a la ecuación original. Puede demostrarse que no existe ninguna otra simetría.

Asíntotas Al probar por asíntotas horizontales, tenemos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{4 - x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{-x^2} = -\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

De manera similar,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4 - x^2} = 0.$$

Así, $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal. Como el denominador de $1/(4 - x^2)$ es cero cuando $x = \pm 2$, y el numerador no es cero para esos valores de x, las líneas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales.

Máximos y mínimos Como $y = (4 - x^2)^{-1}$,

$$y' = -1(4 - x^2)^{-2}(-2x) = \frac{2x}{(4 - x^2)^2}.$$

Vemos que y' es cero cuando $x = 0$ y que y' no está definida cuando $x = \pm 2$. Sin embargo, sólo 0 es un valor crítico, porque y no está definida en ± 2. Hay cuatro intervalos que considerar para determinar si la función es creciente o decreciente en ellos:

Si $x < -2$,	entonces	$y' < 0$;
si $-2 < x < 0$,	entonces	$y' < 0$;
si $0 < x < 2$,	entonces	$y' > 0$;
si $x > 2$,	entonces	$y' > 0$.

La función es decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(-2, 0)$ y creciente en $(0, 2)$ y $(2, \infty)$. (Véase la fig. 12.57.) Existe un mínimo relativo en $x = 0$.



FIGURA 12.57 Análisis creciente/decreciente.

Concavidad

$$y'' = \frac{(4 - x^2)^2(2) - (2x)2(4 - x^2)(-2x)}{(4 - x^2)^4}$$

$$= \frac{2(4 - x^2)[(4 - x^2) - (2x)(-2x)]}{(4 - x^2)^4} = \frac{2(4 + 3x^2)}{(4 - x^2)^3}.$$

Haciendo $y'' = 0$, no obtenemos raíces reales. Sin embargo, y'' no está definida cuando $x = \pm 2$. Aunque la concavidad puede cambiar alrededor de esos valores de x, éstos no corresponden a puntos de inflexión porque no están en el dominio de la función. Hay tres intervalos donde se debe investigar la concavidad:

Si $x < -2$, entonces $y'' < 0$;

si $-2 < x < 2$, entonces $y'' > 0$;

si $x > 2$, entonces $y'' < 0$.

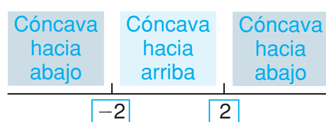


FIGURA 12.58 Análisis de concavidad.

La gráfica es cóncava hacia arriba en $(-2, 2)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$. (*Véase* fig. 12.58.) Aunque la concavidad cambia alrededor de $x = \pm 2$, como dijimos antes, estos valores no corresponden a puntos de inflexión.

Análisis Con base en los puntos de la tabla que aparece en la figura 12.59, algunos escogidos arbitrariamente, y en la información anterior, obtuvimos la gráfica indicada. Debido a la simetría con respecto al eje y, nuestra tabla sólo tiene valores de $x \geq 0$.

x	0	1	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{5}$

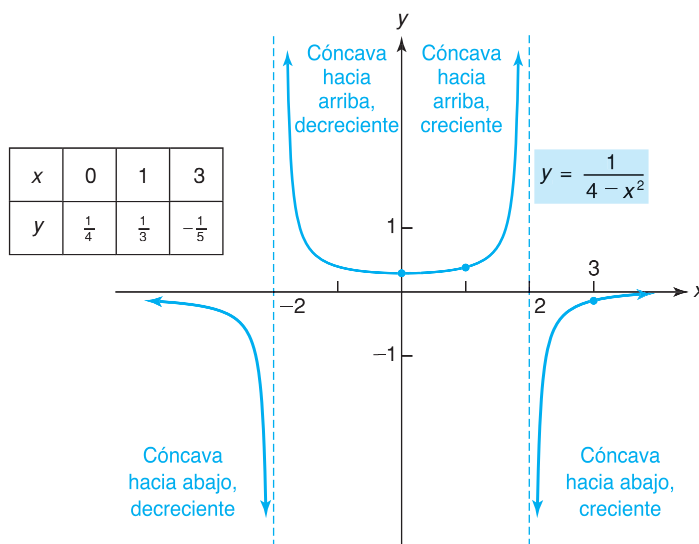


FIGURA 12.59 Gráfica de $y = \frac{1}{4 - x^2}$.

■ **EJEMPLO 6** **Trazado de una curva**

Trazar la gráfica de $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$.

Solución:

Intersecciones Cuando $x = 0, y = 0$; cuando $y = 0, x = 0$. Así $(0,0)$ es la única intersección.

Simetría Hay simetría con respecto al origen: reemplazando x por $-x$ y y por $-y$, resulta

$$-y = \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 1}, \quad \text{o} \quad y = \frac{4x}{x^2 + 1},$$

la cual es la misma que la ecuación original. No existe ninguna otra simetría.

Asíntotas Al investigar las asíntotas horizontales, tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 0,$$

y de manera similar,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = 0.$$

Así, $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal. Como el denominador de $4x/(x^2 + 1)$ nunca es 0, no hay asíntotas verticales.

Máximos y mínimos Haciendo $y = f(x)$, tenemos

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)(4) - 4x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4(1 + x)(1 - x)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Los valores críticos son $x = \pm 1$, por lo que hay tres intervalos que considerar:

Si $x < -1$, entonces $f'(x) = \frac{4(-)(+)}{(+)} = -$, por lo que f es decreciente;

si $-1 < x < 1$, entonces $f'(x) = \frac{4(+)(+)}{(+)} = +$, por lo que f es creciente;

si $x > 1$, entonces $f'(x) = \frac{4(+)(-)}{(+)} = -$, por lo que f es decreciente (véase la fig. 12.60).



FIGURA 12.60 Análisis creciente/decreciente.

Existe un mínimo relativo en $x = -1$ y un máximo relativo en $x = 1$.

Concavidad Como $f'(x) = \frac{4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2}$,

$$f''(x) = \frac{(x^2 + 1)^2(-8x) - (4 - 4x^2)(2)(x^2 + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{8x(x^2 + 1)(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{8x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^3}.$$

Haciendo $f''(x) = 0$, concluimos que los puntos de inflexión posibles se presentan cuando $x = \pm\sqrt{3}, 0$. Hay cuatro intervalos que considerar:

Si $x < -\sqrt{3}$, entonces $f''(x) = \frac{8(-)(-)(-)}{(+)} = -$, por lo que f es cóncava hacia abajo;

si $-\sqrt{3} < x < 0$, $f''(x) = \frac{8(-)(+)(-)}{(+)} = +$, por lo que f es cóncava hacia arriba;

si $0 < x < \sqrt{3}$, entonces $f''(x) = \dfrac{8(+)(+)(-)}{(+)} = -$, por lo que f es cóncava hacia abajo;

si $x > \sqrt{3}$, entonces $f''(x) = \dfrac{8(+)(+)(+)}{(+)} = +$, por lo que f es cóncava hacia arriba (véase la fig. 12.61).

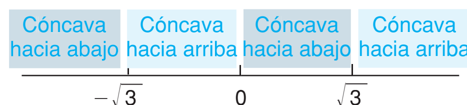


FIGURA 12.61 Análisis de concavidad.

Los puntos de inflexión ocurren cuando $x = 0, \pm\sqrt{3}$.

Análisis Después de considerar toda la información obtenida, se llega a la gráfica de $y = 4x/(x^2 + 1)$ que se muestra en la figura 12.62, junto con una tabla de puntos importantes.

x	0	1	$\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
y	0	2	$\sqrt{3}$	-2	$-\sqrt{3}$

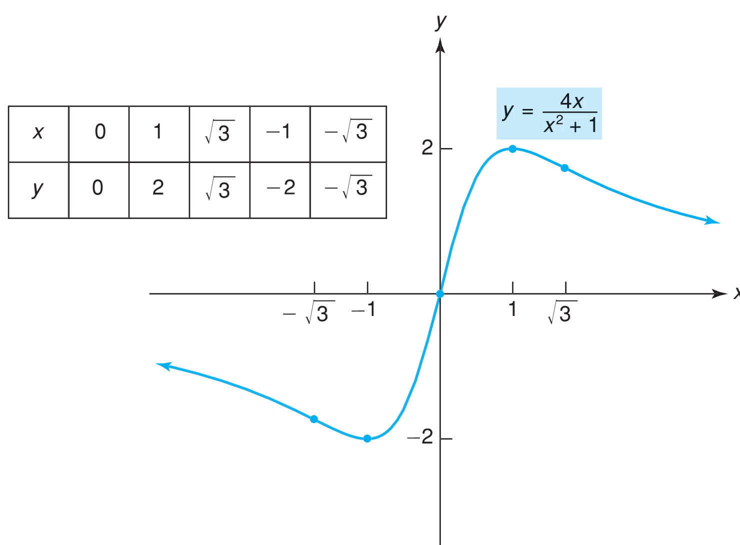


FIGURA 12.62 Gráfica de $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$.

Ejercicio 12.5

En los problemas del 1 al 24 encuentre las asíntotas horizontales y verticales para las gráficas de las funciones. No trace las gráficas.

1. $y = \dfrac{x}{x - 1}$.

2. $y = \dfrac{x + 1}{x}$.

3. $f(x) = \dfrac{x - 1}{2x + 3}$.

4. $y = \dfrac{2x + 1}{2x + 1}$.

5. $y = \dfrac{4}{x}$.

6. $y = -\dfrac{4}{x^2}$.

7. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

8. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

9. $y = x^2 - 5x + 5$.

10. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 9}$.

11. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + x - 6}$.

12. $f(x) = \dfrac{x^3}{5}$.

13. $y = \dfrac{4 + 2x - 7x^2}{x^2 - 8}$.

14. $y = \dfrac{2x^3 + 1}{3x(2x - 1)(4x - 3)}$.

15. $y = \dfrac{4}{x - 6} + 7$.

16. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 9x + 4}$.

17. $f(x) = \dfrac{3 - x^4}{x^3 + x^2}$.

18. $y = \dfrac{x^2 + x}{11x}$.

19. $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{1 + 4x + 4x^2}$.

20. $y = \dfrac{x^4 + 1}{1 - x^4}$.

21. $y = \dfrac{9x^2 - 16}{2(3x + 4)^2}$.

22. $y = \dfrac{2}{9} + \dfrac{3x}{14x^2 + x - 3}$.

23. $y = 2e^{x+2} + 4$.

24. $f(x) = 12e^{-x}$.

En los problemas del 25 al 46 haga el bosquejo de cada curva. Determine los intervalos en los que la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo; máximos y mínimos relativos; puntos de inflexión; simetría; asíntotas horizontales y verticales; aquellas intersecciones que puedan obtenerse de manera conveniente.

25. $y = \dfrac{3}{x}$.

26. $y = \dfrac{1}{x - 1}$.

27. $y = \dfrac{x}{x + 1}$.

28. $y = \dfrac{10}{\sqrt{x}}$.

29. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

30. $y = \dfrac{x^2}{1 - x}$.

31. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

32. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

33. $y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

34. $y = \dfrac{1 - x}{x^2}$.

35. $y = \dfrac{x^2}{7x + 4}$.

36. $y = \dfrac{x^3 + 1}{x}$.

37. $y = \dfrac{9}{9x^2 - 6x - 8}$.

38. $y = \dfrac{37x^2 + 36x + 9}{9x^2}$.

39. $y = \dfrac{2x - 3}{(2x - 9)^2}$.

40. $y = \dfrac{3x + 1}{(6x + 5)^2}$.

41. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$.

42. $y = \dfrac{x}{(x + 1)^2}$.

43. $y = x + \dfrac{1}{x + 1}$.

44. $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$.

45. $y = \dfrac{-3x^2 + 2x - 5}{3x^2 - 2x - 1}$.

46. $y = 2x + 1 + \dfrac{4}{2x + 1}$.

---

47. Trace la gráfica de una función f tal que $f(0) = 0$, tenga una asíntota horizontal $y = 1$ para $x \to \pm\infty$, tenga una asíntota vertical $x = 2$, para $x < 2$ tenga tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) < 0$, y para $x > 2$ tenga tanto $f'(x) < 0$ como $f''(x) > 0$.

48. Dibuje la gráfica de una función f tal que $f(0) = 0$, tenga una asíntota horizontal $y = 2$ para $x \to \pm\infty$, tenga una asíntota vertical $x = -1$, para $x < -1$tenga tanto $f'(x) > 0$ como $f''(x) > 0$, y para $x > -1$ tenga tanto $f'(x) > 0$ como $f''(x) < 0$.

49. Trace la gráfica de una función f tal que $f(0) = 0$, tenga una asíntota horizontal $y = 0$ para $x \to \pm\infty$, tenga asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 2$, $f'(x) < 0$ para $x < -1$ y para $-1 < x < 2$, y además $f''(x) < 0$ para $x > 2$.

50. Trace la gráfica de una función f tal que $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(3) = 0$, tenga una asíntota horizontal $y = 0$ para $x \to \pm\infty$, tenga asíntotas verticales $x = -2$ y $x = 1$, $f''(x) < 0$ para $x < -2$ y $f'(x) > 0$ para $-2 < x < 1$ y para $1 < x < 3$.

51. Poder de compra Al analizar el patrón temporal de compras, Mantell y Sing[12] utilizan la curva

$$y = \frac{x}{a + bx},$$

como un modelo matemático. Ellos afirman que $y = 1/b$ es una asíntota. Verifíquelo.

52. Esboce las gráficas de $y = 6 - 3e^{-x}$ y $y = 6 + 3e^{-x}$. Demuestre que son asintóticas a la misma línea. ¿Cuál es la ecuación de esta línea?

53. Mercado para un producto Para un producto nuevo, el número anual de miles de paquetes vendidos y, después de t años, contados a partir de su introducción al mercado, se estima que estará dado por

$$y = f(t) = 150 - 76e^{-t}.$$

Demuestre que $y = 150$ es una asíntota horizontal para la gráfica de esta ecuación. Esto deja ver que una vez que el producto se ha establecido entre los consumidores, el mercado tiende a ser constante.

54. Grafique $y = \dfrac{x^2 - 5}{x^3 + 4x^2 + 13x + 1}$. Con base en la gráfica, localice las asíntotas horizontales y verticales.

55. Grafique $y = \dfrac{6x^3 - 2x^2 + 6x - 1}{3x^3 - 2x^2 - 18x + 12}$. A partir de la gráfica, localice las asíntotas horizontales y verticales.

56. Grafique $y = \dfrac{\ln(x + 4)}{x^2 - 8x + 5}$ en la pantalla estándar. La gráfica sugiere que hay dos asíntotas verticales de la forma $x = k$, donde $k > 0$. También, parece que la gráfica "comienza" cerca de $x = -4$. Cuando $x \to -4^+$, se tiene

$$\ln(x + 4) \to -\infty \quad \text{y} \quad x^2 - 8x + 5 \to 53.$$

---

[12] L.H. Mantell y F. P. Sing, *Economics for Business Decisions* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1972), 107.

Así, $\lim_{x \to 4^+} y = -\infty$. Esto proporciona la asíntota vertical $x = -4$. De modo que en realidad, existen *tres* asíntotas verticales. Utilice la característica de acercamiento para hacer clara la asíntota $x = -4$ en la pantalla.

57. Grafique $y = \dfrac{0.34e^{0.7x}}{4.2 + 0.71e^{0.7x}}$, en donde $x > 0$.

Con ayuda de la gráfica, determine una ecuación de la asíntota horizontal examinando los valores de y cuando $x \to \infty$. Para confirmar esta ecuación de manera algebraica, encuentre $\lim_{x \to \infty} y$ dividiendo primero tanto el numerador como el denominador entre $e^{0.7x}$.

12.6 REPASO

Términos importantes

Sección 12.1 función creciente función decreciente máximo relativo mínimo relativo extremos relativos extremos absolutos valor crítico punto crítico prueba de la primera derivada

Sección 12.2 teorema del valor extremo

Sección 12.3 cóncava hacia arriba cóncava hacia abajo punto de inflexión

Sección 12.4 prueba de la segunda derivada

Sección 12.5 asíntota vertical asíntota horizontal regla de la asíntota vertical para funciones racionales

Resumen

El cálculo es de gran ayuda para hacer el bosquejo de gráficas de funciones. La primera derivada se usa para determinar cuándo una función es creciente o decreciente y para localizar los máximos y mínimos relativos. Si $f'(x)$ es positiva en todo un intervalo, entonces en ese intervalo f es creciente y su gráfica asciende (de izquierda a derecha). Si $f'(x)$ es negativa en todo un intervalo, entonces f es decreciente y su gráfica desciende.

Un punto (x_0, y_0) sobre la gráfica en el que $f'(x)$ es 0 o no está definida, es un candidato a extremo relativo; x_0 se llama valor crítico. Para que se presente en x_0 un extremo relativo, la primera derivada debe cambiar de signo alrededor de x_0. El procedimiento siguiente es la prueba de la primera derivada para los extremos relativos de $y = f(x)$:

Prueba de la primera derivada para extremos relativos

Paso 1. Encuentre $f'(x)$.

Paso 2. Determine todos los valores de x en que $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no está definida.

Paso 3. En los intervalos sugeridos por los valores del paso 2, determine si f es creciente $[f'(x) > 0]$ o decreciente $[f'(x) < 0]$.

Paso 4. Para cada valor crítico x_0 en que f es continua, determine si $f'(x)$ cambia de signo al aumentar x y pasar sobre x_0. Se tiene un máximo relativo cuando $x = x_0$, si $f'(x)$ cambia de $+$ a $-$, y un mínimo relativo si $f'(x)$ cambia de $-$ a $+$. Si $f'(x)$ no cambia de signo, entonces no se tiene un extremo relativo cuando $x = x_0$.

Bajo ciertas condiciones, se puede asegurar que una función tiene extremos absolutos. El teorema del valor extremo establece que si f es continua en un intervalo cerrado, entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el intervalo. Puede emplearse el siguiente procedimiento para localizar los extremos absolutos:

Procedimiento para encontrar los extremos absolutos de una función f continua en $[a, b]$

Paso 1. Encuentre los valores críticos de f.

Paso 2. Evalúe $f(x)$ en los puntos extremos a y b y en los valores críticos de (a, b).

Paso 3. El valor máximo de f es el más grande de los valores encontrados en el paso 2. El valor mínimo de f es el menor de los valores encontrados en el paso 2.

La segunda derivada se usa para determinar la concavidad y los puntos de inflexión. Si $f''(x) > 0$ en todo un intervalo, entonces f es cóncava hacia arriba en ese intervalo y su gráfica se dobla hacia arriba. Si $f''(x) < 0$ en un intervalo, entonces f es cóncava hacia abajo en ese intervalo y su gráfica se dobla hacia abajo. Un punto en la gráfica donde f es continua y su concavidad cambia, es un punto de inflexión. El punto (x_0, y_0) en la gráfica, es un posible punto de inflexión si $f''(x_0)$ es cero o no está definida, y f es continua en x_0.

La segunda derivada proporciona también un medio para probar si ciertos valores críticos son extremos relativos:

Prueba de la segunda derivada para extremos relativos

Suponga que $f'(x_0) = 0$. Entonces

Si $f''(x_0) < 0$, f entonces f tiene un máximo relativo en x_0;

si $f''(x_0) > 0$, f entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.

Las asíntotas también son útiles para el trazado de curvas. Las gráficas "explotan" cerca de las asíntotas verticales y "tienden" hacia las asíntotas horizontales. La línea $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de una función f si lím $f(x) = \infty$, o $-\infty$ cuando x tiende a a por la derecha $(x \to a^+)$ o por la izquierda $(x \to a^-)$. En el caso de una función racional, $f(x) = P(x)/Q(x)$, podemos encontrar las asíntotas verticales sin evaluar límites. Si $Q(\mathrm{a}) = 0$ pero $P(a) \neq 0$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical.

La recta $y = b$ es una asíntota horizontal para la gráfica de una función no lineal f, si al menos una de las proposiciones siguientes es verdadera:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

En particular, una función polinomial no tiene asíntotas horizontales ni verticales. Además, una función racional cuyo numerador tiene grado mayor que el del denominador no tiene una asíntota horizontal.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 4 encuentre las asíntotas horizontales y verticales.

1. $y = \dfrac{3x^2}{x^2 - 16}$.
2. $y = \dfrac{x+1}{4x - 2x^2}$.
3. $y = \dfrac{5x^2 - 3}{(3x+2)^2}$.
4. $y = \dfrac{4x+1}{3x-5} - \dfrac{3x+1}{2x-11}$.

En los problemas del 5 al 8 encuentre los valores críticos.

5. $f(x) = \dfrac{7x^2}{2 - x^2}$.
6. $f(x) = 8(x-1)^2(x+6)^4$.
7. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{3 - 4x}$.
8. $f(x) = \dfrac{13xe^{-5x/6}}{6x+5}$.

En los problemas del 9 al 12 encuentre los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.

9. $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$.
10. $f(x) = \dfrac{2x^2}{(x+1)^2}$.
11. $f(x) = \dfrac{6x^4}{x^2 - 3}$.
12. $f(x) = 9\sqrt[3]{3x^3 - 4x}$.

En los problemas del 13 al 18 encuentre los intervalos en los que la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

13. $f(x) = x^4 - x^3 - 14$.
14. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.
15. $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$.
16. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$.
17. $f(x) = (4x+1)^3(4x+9)$.
18. $f(x) = (x^2 - x - 1)^2$.

En los problemas del 19 al 24 pruebe por extremos relativos.

19. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$.
20. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2}$.
21. $f(x) = \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^3}{3}$.
22. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.
23. $f(x) = x^{2/3}(x+1)$.
24. $f(x) = x^3(2x-1)^4$.

En los problemas del 25 al 30 encuentre los valores de x en que se presentan los puntos de inflexión.

25. $y = x^5 - 5x^4 + 3x$.
26. $y = \dfrac{x^2+1}{3x}$.
27. $y = 4(3x-5)(x^4+2)$.
28. $y = x^2 + 2\ln(-x)$.
29. $y = \dfrac{x^2}{5e^x}$.
30. $y = 6(x^2-4)^3$.

En los problemas del 31 al 34 efectúe la prueba sobre extremos absolutos en el intervalo indicado.

31. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$, $[0, 2]$.
32. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$, $[0, 3]$.
33. $f(x) = \dfrac{x}{(5x-6)^2}$, $[-2, 0]$.
34. $f(x) = (x-2)^2(x+1)^{2/3}$, $[-1, 1]$.

35. Sea $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$.

a. Determine los valores de x en que se presentan los máximos y mínimos relativos, en caso de que existan.

b. Determine el o los intervalos en que la gráfica de f es cóncava hacia abajo y encuentre las coordenadas de todos los puntos de inflexión.

36. Sea $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Puede demostrarse que

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

a. Determine si la gráfica de f es simétrica con respecto al eje x, al eje y o al origen.

b. Encuentre el o los intervalos en que f es creciente.

c. Determine las coordenadas de todos los extremos relativos de f.

d. Determine $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

e. Haga el bosquejo de la gráfica de f.

f. Establezca los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x)$ (en caso de que existan).

En los problemas del 37 al 48 esboce las gráficas de las funciones. Indique los intervalos en que la función crece, decrece, es cóncava hacia arriba, es cóncava hacia abajo; indique los puntos máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión, las asíntotas horizontales, las asíntotas verticales, la simetría y aquellas intersecciones que puedan obtenerse de manera conveniente.

37. $y = x^2 - 2x - 24$.

38. $y = x^3 - 27x$.

39. $y = x^3 - 12x + 20$.

40. $y = x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 150$.

41. $y = x^3 + x$.

42. $y = \frac{x + 2}{x - 3}$.

43. $f(x) = \frac{100(x + 5)}{x^2}$.

44. $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$.

45. $y = \frac{x}{(2x - 1)^3}$.

46. $y = 6x^{1/3}(2x - 1)$.

47. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

48. $f(x) = 1 + \ln(x^2)$.

---

49. ¿Son ciertos o falsos los siguientes enunciados?

a. Si $f'(x_0) = 0$, entonces f debe tener un extremo relativo en x_0.

b. Como la función $f(x) = 1/x$ es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, es imposible encontrar x_1 y x_2 en el dominio de f de manera que $x_1 < x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$.

c. En el intervalo $(-1, 1]$, la función $f(x) = x^4$ tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto.

d. Si $f''(x_0) = 0$, entonces $(x_0, f(x_0))$ debe ser un punto de inflexión.

e. Una función f definida en el intervalo $(-2, 2)$ con exactamente un máximo relativo, debe tener un máximo absoluto.

50. Una función importante en la teoría de la probabilidad es la función de densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

a. Determine si la gráfica de f es simétrica con respecto al eje x, al eje y o al origen.

b. Encuentre los intervalos en que f es creciente y en los que es decreciente.

c. Encuentre las coordenadas de todos los extremos relativos de f.

d. Encuentre $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

e. Encuentre los intervalos en que la gráfica de f es cóncava hacia arriba y en donde es cóncava hacia abajo.

f. Encuentre las coordenadas de todos los puntos de inflexión.

g. Haga el bosquejo de la gráfica de f.

h. Encuentre todos los extremos absolutos.

51. Costo marginal Si $c = q^3 - 6q^2 + 12q + 18$ es una función de costo total, ¿para qué valores de q es creciente el costo marginal?

52. Ingreso marginal Si $r = 160q^{3/2} - 3q^2$ es la función de ingreso para el producto de un fabricante, determine los intervalos en que la función de ingreso marginal es creciente.

53. Función ingreso La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = 150 - \frac{\sqrt{q}}{10}, \quad \text{donde } q > 0.$$

Demuestre que la gráfica de la función de ingreso es cóncava hacia abajo, dondequiera que esté definida.

54. Anticoncepción En un modelo sobre el efecto de los anticonceptivos en la tasa de nacimientos,[13] la ecuación,

$$R = f(x) = \frac{x}{4.4 - 3.4x}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

da la reducción proporcional R en la tasa de nacimientos como función de la eficiencia x de un método anticonceptivo. Una eficiencia de 0.2 (o 20%) significa que la probabilidad de resultar embarazada es 80% de la probabilidad de resultar embarazada sin el anticonceptivo. Encuentre la reducción (en porcentaje) cuando la eficiencia es (a) 0, (b) 0.5 y (c) 1. Encuentre dR/dx y d^2R/dx^2, y dibuje la gráfica de la ecuación.

[13] R. K. Leik y B. F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs. N.J.: Prentice–Hall, Inc., 1975).

55. Aprendizaje y memoria Si usted fuese a citar los miembros de una categoría, por ejemplo la de los animales cuadrúpedos, las palabras que citaría se presentarían probablemente en "grupos" con distintas pausas entre tales grupos. Por ejemplo, usted podría citar las siguientes palabras para la categoría de los cuadrúpedos:

perro, gato, ratón, rata
(pausa)
caballo, burro, mula
(pausa)
vaca, cerdo, cabra, cordero
etcétera.

Las pausas pueden presentarse porque uno tiene que buscar mentalmente las subcategorías (animales domésticos, bestias de carga, animales de granja, etc.).

El tiempo transcurrido entre el enunciado de palabras sucesivas se llama *tiempo entre respuestas*. Se ha usado una función para analizar la duración del tiempo para pausas y tamaño de los grupos (número de palabras en un grupo).[14] Esta función f es tal que

$$f(t) = \begin{cases} \text{número de palabras promedio que} \\ \text{se presentan en sucesión con tiempo} \\ \text{entre respuestas menor que } t. \end{cases}$$

La gráfica de f tiene una forma similar a la mostrada en la figura 12.63 y se ajusta bastante bien por medio de un polinomio de tercer grado, tal como

$$f(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D.$$

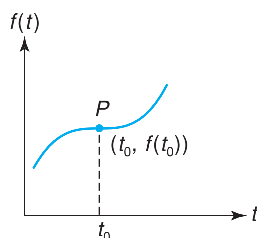


FIGURA 12.63 Diagrama para el problema 55.

El punto P tiene un significado especial. Es tal que el valor t_0 separa los tiempos entre respuestas *dentro* de los grupos, de aquellos tiempos que se registran *entre dos* grupos. Matemáticamente, P es un punto crítico que también es un punto de inflexión. Suponga estas dos condiciones y demuestre que (a)$t_0 = -B/(3A)$ y (b) $B^2 = 3AC$.

56. Penetración a un mercado En un modelo para introducir un producto nuevo a un mercado, las ventas S del producto en el tiempo t están dadas por[15]

$$S = g(t) = \frac{m(p+q)^2}{p}\left[\frac{e^{-(p+q)t}}{\left(\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}+1\right)^2}\right].$$

donde p, q y m son constantes no nulas.

a. Demuestre que

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\frac{m}{p}(p+q)^3 e^{-(p+q)t}\left[\frac{q}{p}e^{-(p+q)t} - 1\right]}{\left(\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}+1\right)^3}.$$

b. Determine el valor de t para el cual se tiene la venta máxima. Puede suponer que S alcanza un máximo cuando $dS/dt = 0$.

En los problemas del 57 al 60, cuando sea apropiado, redondee sus respuestas a dos decimales.

57. En la gráfica de $y = 4x^3 + 5.3x^2 - 7x + 3$, encuentre las coordenadas de todos los extremos relativos.

58. En la gráfica de $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 8x - 4$, determine los extremos absolutos de f en el intervalo $[-1, 1]$.

59. La gráfica de una función f tiene exactamente un punto de inflexión. Si

$$f''(x) = \frac{x^3 + 3x + 2}{5x^2 - 2x + 4},$$

use la gráfica de f'' para determinar el valor x del punto de inflexión de f.

60. Grafique $y = \dfrac{4x - 2x^2}{x^3 + 4x + 4}$. Con base en la gráfica, localice las asíntotas horizontales y verticales.

---

[14]A. Graesser y G. Mandler, "Limited Processing Capacity Constrains the Storage of Unrelated Sets of Words and Retrieval from Natural Categories", *Human Learning and Memory*, 4, núm. 1 (1978), 86-100.

[15]A. P. Hurter, Jr., A.H. Rubenstein, et. al., "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 11 (1978), 197-221.

Aplicación práctica
Bosquejo de la curva de Phillips



Antes de que la curva de Laffer saltase a la fama, los economistas debatían con respecto a otra curva, cuyo nombre también se le dio en honor de su creador: la curva de Phillips. Esta curva tiene la intención de describir la relación entre el desempleo y la inflación. El bosquejo de la curva de Phillips nos dará una idea de cómo en ocasiones el bosquejo de curvas es un proceso incierto, que incluye no sólo un ajuste a valores conocidos, sino también, necesariamente, alguna concepción del proceso que fundamenta a los datos.

El razonamiento atrás de la curva de Phillips es que cuando el desempleo es alto, el trabajador promedio gasta menos dinero, y al mismo tiempo los empleadores no tienen que dar aumentos generosos para retener a los trabajadores. El empleador ahorra y el trabajador limitado a gastar, evita que los precios y salarios se eleven con rapidez, lo que produce una baja tasa de inflación. Recíprocamente, cuando el país está cerca del empleo completo, los trabajadores generan más y gastan más, y los empleadores tienen que ofrecer mayores incentivos de trabajo para conservar a sus trabajadores. Estos factores conducen a salarios y precios más altos.

Entonces parece ser que existe una especie de relación inversa entre la tasa de desempleo y la tasa de inflación. La gráfica de esta relación es la curva de Phillips.

Para el razonamiento anterior, ahora presentamos algunos datos empíricos. Una fuente de información es el reporte económico anual del presidente (de Estados Unidos), el cual puede bajarse de `w3.acces.gpo.gov/eop`. La tabla 12.1 está basada en el reporte de 2001. La inflación puede medirse en varias formas; aquí la medida utilizada es el cambio porcentual anual en el índice de precios del producto interno bruto (PIB).

TABLA 12.1 Empleo e inflación, Estados Unidos, 1959-2000

Año	Tasa de desempleo (%)	Tasa de inflación (%)	Año	Tasa de desempleo (%)	Tasa de inflación (%)	Año	Tasa de desempleo (%)	Tasa de inflación (%)
1959	5.5	1.1	1973	4.9	5.6	1987	6.2	3
1960	5.5	1.4	1974	5.6	9	1988	5.5	3.4
1961	6.7	1.1	1975	8.5	9.4	1989	5.3	3.8
1962	5.5	1.4	1976	7.7	5.7	1990	5.6	3.9
1963	5.7	1.1	1977	7.1	6.4	1991	6.8	3.6
1964	5.2	1.5	1978	6.1	7.1	1992	7.5	2.4
1965	4.5	1.9	1979	5.8	8.3	1993	6.9	2.4
1966	3.8	2.8	1980	7.1	9.2	1994	6.1	2.1
1967	3.8	3.1	1981	7.6	9.3	1995	5.6	2.2
1968	3.6	4.3	1982	9.7	6.2	1996	5.4	1.9
1969	3.5	4.9	1983	9.6	3.9	1997	4.9	1.9
1970	4.9	5.3	1984	7.5	3.7	1998	4.5	1.3
1971	5.9	5	1985	7.2	3.2	1999	4.2	1.5
1972	5.6	4.2	1986	7	2.2	2000	4	2.1

Primero considere los valores de los datos para los años de 1959 a 1969, en donde la tasa de desempleo fue entre 3.5% y 6.7%. Si estos valores se grafican, sugieren cómo debe verse la curva en su parte media, pero no determinan el comportamiento en los extremos. Para precisar los extremos de la curva, podemos razonar que como es imposible tener un desempleo negativo, e incluso un desempleo cero es un escenario irreal, la curva no debe intersecar al eje vertical, pero debe tenerlo como una asíntota.

En contraste, en el extremo derecho de la curva, sabemos que en teoría existe inflación negativa, e históricamente, una ocurrencia real (aunque muy rara). De modo que es probable que haya una intersección con el eje horizontal. Con esta información a la mano, podemos graficar los valores de los datos con el bosquejo de una curva superpuesta, como en la figura 12.64.

Como esto se estableció en el inicio de la década de 1970, los economistas estaban confiados, en general, de que la curva de Phillips representaba una importante y útil ayuda en los trabajos de economía de Estados Unidos. Los datos de las décadas anteriores, aunque no se alineaban exactamente con los de 1959 a 1969, seguían el mismo patrón global.

Sin embargo, en 1970, esta gráfica empezó a separarse. La figura 12.65 muestra un diagrama de dispersión de la información de inflación y desempleo para los años 1970 a 2000. ¡Esta vez es difícil conocer el tipo de curva que se debe dibujar! Los puntos no sugieren algo como una curva de Phillips.

Viendo los datos de la década de 1970, algunos economistas sugirieron que quizá en realidad existen dos curvas de Phillips, una a corto plazo, que se ve más o menos como la que se muestra en la figura 12.64, y otra, "la verdadera" curva para largo plazo, simplemente una línea vertical, que corresponde al nivel natural de desempleo, en alrededor de 5 o 6%. Estos economistas suponían que aunque la tasa de desempleo pudiese fluctuar, esencialmente existe un punto estable de desempleo, por así llamarle. Y si la tasa de desempleo caía por debajo de él, se desencadenaba una serie de eventos que a la postre forzaban al desempleo a regresar. Esto no era un punto de vista aceptado de manera universal, pero era una posible interpretación de los datos.

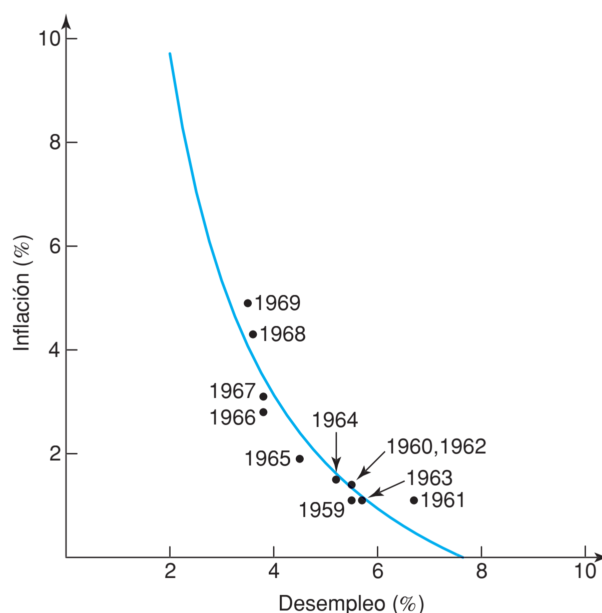


FIGURA 12.64 Los años 1959-1969.

Ejercicios

1. En la figura 12.65, examine los puntos de los datos para 1998−2000. ¿Qué tan bien esta parte de los datos se ajusta a la curva de Phillips de la que se hizo el bosquejo para 1959−1969?
2. En los datos de la tabla 12.1, existe un patrón que no corresponde al bosquejo de alguna curva mostrada. En el diagrama de dispersión aparece sólo cuando el tiempo se toma en cuenta, una tendencia hacia un tipo de espiral en el sentido de las manecillas del reloj. Para ver este patrón, siga la sucesión de puntos año tras año, de la figura 12.65. A la vista de este patrón y del supuesto de tendencia a la vertical, a largo plazo de la curva de Phillips, ¿qué podría esperar con respecto a la inflación y al desempleo en los años 2001 a 2005? ¿Qué tan fiables son estas esperanzas?

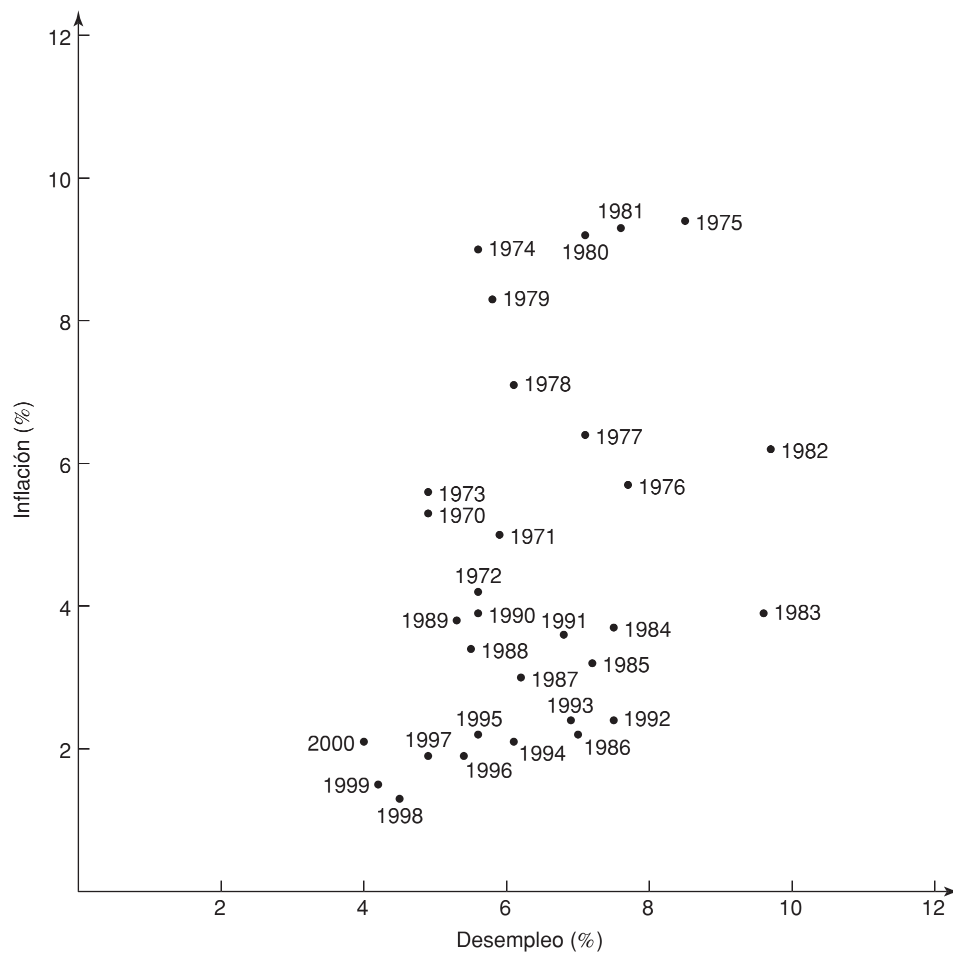


FIGURA 12.65 Los años 1970-2000.

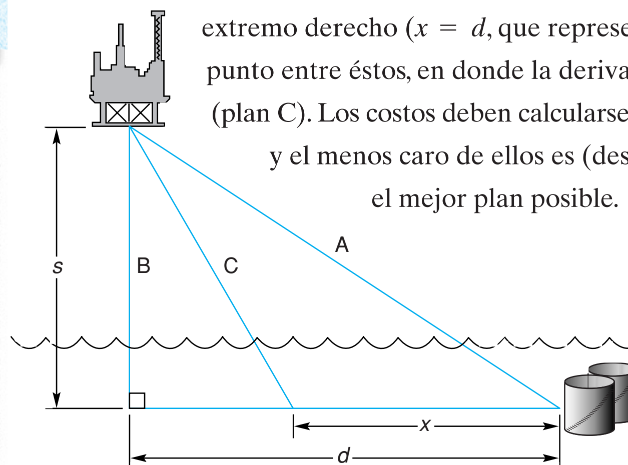
Aplicaciones de la diferenciación

Este capítulo describe algunas aplicaciones de la diferenciación. A continuación está un ejemplo de la clase de problemas que aprenderemos a resolver. Suponga que un cable de comunicaciones se tenderá desde una localidad en tierra a una estación petrolera mar adentro, como se muestra en la figura de abajo. ¿Cómo debe tenderse el cable?

Por supuesto, el enfoque más sencillo es una instalación en línea recta (trayectoria A). Pero, puesto que colocar cable bajo el mar es más caro que en tierra, podría ser más barato usar un plan que lo tienda en forma de L, en el que se llegue a la costa tan rápido como sea posible (trayectoria B). O quizá una combinación sea todavía mejor (trayectoria C).

El rango de posibilidades está determinado por la longitud x, la longitud del cable que va a la costa, que puede variar desde 0 hasta d. Si l es el costo por milla en tierra y w es el costo por milla bajo el mar, queremos minimizar la cantidad, $y = f(x) = lx + w\sqrt{s^2 + (d - x)^2}$, que representa el costo total.

La idea de un mínimo absoluto, que se introdujo en el capítulo anterior en conexión con el trazado de curvas, ahora toma un significado práctico. La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[0, d]$. Así, el costo es mínimo en el extremo izquierdo del intervalo ($x = 0$, que representa el plan A) o en el extremo derecho ($x = d$, que representa el plan B), o en algún punto entre éstos, en donde la derivada $f'(x)$ sea igual a cero (plan C). Los costos deben calcularse para estos planes diferentes y el menos caro de ellos es (desde la perspectiva de costos) el mejor plan posible.



OBJETIVO Modelar situaciones que incluyan maximizar o minimizar cantidades.

13.1 APLICACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Por medio de los procedimientos vistos en el capítulo anterior, podemos resolver problemas que impliquen maximizar o minimizar una cantidad. Por ejemplo, podríamos tener que maximizar una ganancia o minimizar un costo. La parte crucial consiste en expresar la cantidad que se debe maximizar o minimizar como función de alguna variable contenida en el problema. Luego diferenciamos y probamos los valores críticos resultantes. Para esto, pueden usarse las pruebas de la primera o de la segunda derivadas, aunque puede ser obvio por la naturaleza si un valor crítico representa o no una respuesta apropiada. Como nuestro interés estriba en los máximos y mínimos *absolutos*, a veces tendremos que examinar los puntos extremos del dominio de la función.

El objetivo de este ejemplo es establecer una función de costo a partir de la cual el costo sea minimizado.

EJEMPLO 1 Minimizar el costo de una cerca

Con el propósito de tener mayor seguridad, un fabricante planea cercar un área de almacenamiento rectangular de 10,800 *pies*^{2}*, que es adyacente a un edificio, el cual se utilizará como uno de los lados del área cercada. La cerca paralela al edificio da a una carretera y costará* \$3 *por pie instalado, mientras que la cerca de los otros dos lados costará* \$2 *por pie instalado. Encontrar la cantidad de cada tipo de cerca, de manera que el costo total sea mínimo. ¿Cuál es el costo mínimo?*

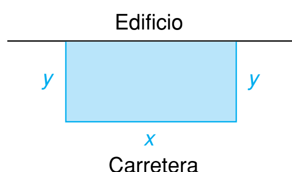


FIGURA 13.1 El problema de la cerca del ejemplo 1.

Solución: como primer paso en un problema como éste, es una buena idea dibujar un diagrama que refleje la situación. En la figura 13.1 llamamos x a la longitud del lado paralelo al edificio y y a las longitudes de los otros dos lados, en donde x y y están en pies.

Como queremos minimizar el costo, nuestro siguiente paso es determinar una función que nos dé el costo. Éste depende claramente de cuánta cerca se ponga a lo largo de la carretera y cuánta a lo largo de los otros dos lados. A lo largo de la carretera, el costo por pie es de \$3, por lo que el costo total de esa cerca es $3x$. De manera similar, a lo largo de *cada uno* de los otros lados, el costo es $2y$. Así, el costo total C de la cerca está dado por la función de costo

$$C = 3x + 2y + 2y,$$

o

$$C = 3x + 4y \tag{1}$$

Necesitamos encontrar el valor mínimo absoluto de C. Para hacer esto usamos las técnicas analizadas en el capítulo 12; esto es, examinamos a C en sus valores críticos (y cualquier punto extremo) en el dominio. Pero para diferenciar, necesitamos primero expresar C en función de sólo una variable [la ecuación (1) da a C como función de *dos* variables, x y y]. Podemos lograr esto encontrando primero una relación entre x y y. Del enunciado del problema vemos que el área de almacenamiento, que es xy, debe ser igual a 10,800:

$$xy = 10{,}800. \tag{2}$$

Con esta ecuación, podemos expresar una variable (digamos, y) en términos de la otra (x). Entonces, al sustituir en la ecuación (1) tendremos a C como función de sólo una variable. Despejando a y en la ecuación (2) resulta

$$y = \frac{10{,}800}{x}. \tag{3}$$

Al sustituir en la ecuación (1), obtenemos

$$C = 3x + 4\left(\frac{10{,}800}{x}\right),$$

$$C = 3x + \frac{43,200}{x}. \qquad (4)$$

Dada la naturaleza física del problema, el dominio de C es $x > 0$.

Ahora encontramos dC/dx, la igualamos a 0 y despejamos x. Tenemos

$$\frac{dC}{dx} = 3 - \frac{43,200}{x^2} \qquad \left[\frac{d}{dx}(43,200x^{-1}) = -43,200x^{-2}\right],$$

$$3 - \frac{43,200}{x^2} = 0,$$

$$3 = \frac{43,200}{x^2},$$

de lo cual se sigue que

$$x^2 = \frac{43,200}{3} = 14,400,$$

$$x = 120 \qquad \text{(ya que } x > 0\text{)}.$$

Así, 120 es el *único* valor crítico y no hay puntos extremos que considerar. Para probar este valor, usaremos la prueba de la segunda derivada.

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{86,400}{x^3}.$$

Cuando $x = 120$, $d^2C/dx^2 > 0$, entonces se puede concluir que $x = 120$ da un mínimo relativo. Sin embargo, como 120 es el único valor crítico en el intervalo abierto $(0, \infty)$ y C es continua en ese intervalo, dicho mínimo relativo debe también ser un mínimo absoluto.

¡Pero no hemos terminado aún! Todas las preguntas del problema deben contestarse. Para tener un costo mínimo el número de pies de cerca de lo largo de la carretera es de 120. Cuando $x = 120$, de la ecuación (3) tenemos $y = 10,800/120 = 90$. Por tanto, el número de pies de cerca para los otros dos lados es $2y = 180$. Entonces, se requieren 120 pies de cerca de \$3 y 180 pies de la cerca de \$2. El costo mínimo puede obtenerse a partir de la función de costo dada por la ecuación (4), el cual es

$$C = 3x + \frac{43,200}{x} = 3(120) + \frac{43,200}{120} = \$720.$$

Con base en el ejemplo 1, la siguiente guía puede ser útil en la resolución de problemas prácticos sobre máximos y mínimos:

Guía para la resolución de problemas de aplicación de máximos y mínimos

Paso 1. Cuando sea apropiado, dibuje un diagrama que muestre la información dada en el problema.

Paso 2. Formule una función para la cantidad que se quiera maximizar o minimizar.

Paso 3. Exprese la función del paso 2 como función de una sola variable y señale el dominio de esta función. El dominio puede determinarse por la naturaleza del problema.

Paso 4. Encuentre los valores críticos de la función. Después de probar cada valor crítico, determine cuál proporciona el valor extremo absoluto que se busca. Si el dominio de la función incluye puntos extremos, examine también los valores de la función en esos puntos.

Paso 5. Con base en los resultados del paso 4, responda las preguntas que se formularon en el enunciado del problema.

Este ejemplo incluye maximizar el ingreso cuando se conoce la ecuación de demanda.

EJEMPLO 2 Maximización del ingreso

La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = \frac{80 - q}{4}, \quad 0 \leq q \leq 80,$$

donde q es el número de unidades y p el precio por unidad. ¿Para qué valor de q se tendrá un ingreso máximo? ¿Cuál es el ingreso máximo?

Solución: sea r el ingreso total, el cual es la cantidad por maximizar. Como

$$\text{ingreso} = (\text{precio})\,(\text{cantidad}),$$

tenemos

$$r = pq = \frac{80 - q}{4} \cdot q = \frac{80q - q^2}{4},$$

donde $0 \leq q \leq 80$. Haciendo $dr/dq = 0$, obtenemos

$$\frac{dr}{dq} = \frac{80 - 2q}{4} = 0,$$

$$80 - 2q = 0,$$

$$q = 40.$$

Así, 40 es el único valor crítico. Ahora veamos si este valor da un máximo. Examinando la primera derivada para $0 \leq q < 40$, tenemos $dr/dq > 0$, por lo que r es creciente. Si $q > 40$, entonces $dr/dq < 0$, por lo que r es decreciente. A consecuencia de que a la izquierda de 40 tenemos que r es creciente y a la derecha de r es decreciente, concluimos que $q = 40$ da el ingreso máximo *absoluto*, esto es, $[80(40) - (40)^2]/4 = 400$.

Este ejemplo implica la minimización del costo promedio cuando se conoce la función de costo.

EJEMPLO 3 Minimización del costo promedio

La función de costo total de un fabricante está dada por

$$c = \frac{q^2}{4} + 3q + 400,$$

donde c es el costo total de producir q unidades. ¿Para qué nivel de producción será el costo promedio por unidad un mínimo? ¿Cuál es este mínimo?

Solución: la cantidad por minimizar es el costo promedio $\bar{c}$. La función de costo promedio es

$$\bar{c} = \frac{c}{q} = \frac{\frac{q^2}{4} + 3q + 400}{q} = \frac{q}{4} + 3 + \frac{400}{q}. \qquad \textbf{(5)}$$

Aquí q debe ser positiva. Para minimizar $\bar{c}$, diferenciamos:

$$\frac{d\bar{c}}{dq} = \frac{1}{4} - \frac{400}{q^2} = \frac{q^2 - 1600}{4q^2}.$$

Para obtener los valores críticos, resolvemos $d\bar{c}/dq = 0$:

$$q^2 - 1600 = 0,$$

$$(q - 40)(q + 40) = 0,$$

$$q = 40 \qquad (\textit{ya que } q > 0).$$

Para determinar si este nivel de producción da un mínimo relativo, usaremos la prueba de la segunda derivada. Tenemos

$$\frac{d^2\bar{c}}{dq^2} = \frac{800}{q^3},$$

que es positiva para $q = 40$. Así, $\bar{c}$ tiene un mínimo relativo cuando $q = 40$. Notamos que $\bar{c}$ es continua para $q > 0$. Como $q = 40$ es el único extremo relativo, concluimos que este mínimo relativo es también un mínimo absoluto. Sustituyendo $q = 40$ en la ecuación (5) obtenemos el costo promedio mínimo $\bar{c} = 23$.

■

EJEMPLO 4 Maximización aplicada a enzimas

Este ejemplo es una aplicación biológica que implica la maximización de la velocidad a la cual se forma una enzima. La ecuación que se incluye aquí es una ecuación literal.

Una enzima es una proteína que actúa como catalizador para incrementar la velocidad de una reacción química que ocurre en las células. En cierta reacción, una enzima se convierte en otra enzima llamada el producto. Éste actúa como catalizador para su propia formación. La velocidad R a la que el producto se forma (con respecto al tiempo) está dada por

$$R = kp(l - p),$$

donde l es la cantidad inicial total de ambas enzimas, p la cantidad de la enzima producto y k una constante positiva. ¿Para qué valor de p será R un máximo?

Solución: podemos escribir $R = k(pl - p^2)$. Haciendo $dR/dp = 0$ y despejando p obtenemos

$$\frac{dR}{dp} = k(l - 2p) = 0,$$

$$p = \frac{l}{2}.$$

Ahora, $d^2R/dp^2 = -2k$. *Como* $k > 0$, la segunda derivada es siempre negativa. De aquí que $p = 1/2$ da un máximo relativo. Además, como R es una

función continua de p, concluimos que tenemos un máximo absoluto cuando $p = 1/2$.

El cálculo puede aplicarse a decisiones relativas a inventarios, como se verá en el ejemplo siguiente.

Este ejemplo implica la determinación del número de unidades en una corrida de producción, con la finalidad de minimizar ciertos costos.

EJEMPLO 5 Tamaño de un lote económico

Una empresa produce y vende anualmente 10,000 unidades de un artículo. Las ventas están distribuidas uniformemente a lo largo del año. La empresa desea determinar el número de unidades que deben fabricarse en cada periodo de producción para minimizar los costos totales anuales de operación y los costos de inventario. Se producen el mismo número de unidades en cada periodo. Este número r se denomina ***tamaño económico del lote o cantidad económica de pedido.*** *El costo de producir cada unidad es de $20 y los costos de acarreo (seguro, interés, almacenamiento, etc.) se estiman iguales al 10% del valor promedio del inventario. Los costos de operación por periodo de producción son $40. Encontrar el tamaño económico del lote.*

Solución: sea q el número de unidades en un periodo de producción. Como las ventas están distribuidas a razón uniforme, supondremos que el inventario varía uniformemente de q a 0 entre periodos de producción. Así, tomamos el inventario promedio igual a $q/2$ unidades. Los costos de producción son de $20 por unidad, por lo que el valor promedio del inventario es de $20(q/2)$. Los costos del inventario son el 10% de este valor:

$$0.10\,(20)\left(\frac{q}{2}\right).$$

El número de periodos de producción por año es de $10{,}000/q$. Así, los costos totales de operación son

$$40\left(\frac{10{,}000}{q}\right).$$

Por tanto, el total C de los costos del inventario y operación está dado por

$$\begin{aligned} C &= 0.10\,(20)\left(\frac{q}{2}\right) + 40\left(\frac{10{,}000}{q}\right) \\ &= q + \frac{400{,}000}{q} \quad (q > 0); \\ \frac{dC}{dq} &= 1 - \frac{400{,}000}{q^2} = \frac{q^2 - 400{,}000}{q^2}. \end{aligned}$$

Haciendo $dC/dq = 0$, obtenemos

$$q^2 = 400{,}000.$$

Como $q > 0$, escogemos

$$q = \sqrt{400{,}000} = 200\sqrt{10} \approx 632.5.$$

Para determinar si este valor de q minimiza a C, examinaremos la primera derivada. Si $0 < q < \sqrt{400{,}000}$, entonces $dC/dq < 0$. Si $q > \sqrt{400{,}000}$, entonces $dC/dq > 0$. Concluimos que hay un mínimo *absoluto* en $q = 632.5$. El número de periodos de producción es de $10{,}000/632.5 \approx 15.8$. Para propósitos prácticos, serían 16 lotes, cada uno con tamaño económico de lote igual a 632 unidades.

El objetivo de este ejemplo es establecer una función de ingreso a partir de la cual se maximice el ingreso en un intervalo cerrado.

EJEMPLO 6 Maximización del ingreso de una empresa de televisión por cable

La empresa Vista TV Cable tiene actualmente 100,000 *suscriptores que pagan una cuota mensual de* \$40. *Una encuesta reveló que se tendrían* 1000 *suscriptores más por cada* \$0.25 *de disminución en la cuota. ¿Para qué cuota se obtendrá el ingreso máximo y cuántos suscriptores se tendrían entonces?*

Solución: sea x el número de disminuciones de \$0.25. La cuota mensual es entonces de $40 - 0.25x$, donde $0 \leq x \leq 160$ (la cuota no puede ser negativa) y el número de suscriptores *nuevos* es $1000x$. Por lo tanto, el número total de suscriptores es $100{,}000 + 1000x$. Queremos maximizar el ingreso, que está dado por

$$\begin{aligned} r &= (\text{número de suscriptores})(\text{cuota por suscriptor}) \\ &= (100{,}000 + 1000x)(40 - 0.25x) \\ &= 1000(100 + x)(40 - 0.25x) \\ &= 1000(4000 + 15x - 0.25x^2). \end{aligned}$$

Haciendo $r' = 0$ y despejando x, tenemos

$$\begin{aligned} r' = 1000(15 - 0.5x) &= 0, \\ x &= 30. \end{aligned}$$

Puesto que el dominio de r es el intervalo cerrado $[0,160]$, el valor máximo absoluto de r debe ocurrir en $x = 30$ o en uno de los puntos extremos del intervalo. Ahora calculamos r en esos tres puntos:

$$\begin{aligned} &\text{Si } x = 0, && \text{entonces } r = 4{,}000{,}000; \\ &\text{si } x = 30, && \text{entonces } r = 4{,}225{,}000; \\ &\text{si } x = 160, && \text{entonces } r = 0. \end{aligned}$$

De acuerdo con esto, el ingreso máximo ocurre cuando $x = 30$. Esto corresponde a 30 disminuciones de \$0.25, para una disminución total de \$7.5; esto es, la cuota mensual es \$32.50. El número de suscriptores con esa cuota son $100{,}000 + 30(1000) = 130{,}000$.

Aquí, aumentamos al máximo una función en un intervalo cerrado.

EJEMPLO 7 Maximización del número de beneficiarios de los servicios de salud

Un artículo en una revista de sociología afirma que si ahora se iniciase un programa específico de servicios de salud, entonces al cabo de t años, n miles de personas adultas recibiría beneficios directos, donde

$$n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t, \qquad 0 \leq t \leq 12.$$

¿Para qué valor de t es máximo el número de beneficiarios?

Solución: haciendo $dn/dt = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} = t^2 - 12t + 32 &= 0, \\ (t-4)(t-8) &= 0, \\ t = 4 \quad \text{o} \quad t &= 8. \end{aligned}$$

Como el dominio de n es el intervalo cerrado $[0, 12]$, el valor máximo absoluto de n debe ocurrir en $t = 0, 4, 8$ o 12:

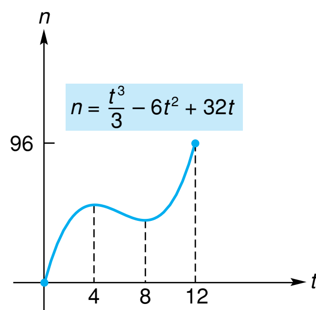


FIGURA 13.2 Gráfica de $n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t$ en $[0, 12]$.

$$\text{Si } t = 0, \text{ entonces } n = 0,$$
$$\text{si } t = 4, \text{ entonces } n = \frac{160}{3} = 53\frac{1}{3},$$
$$\text{si } t = 8, \text{ entonces } n = \frac{128}{3} = 42\frac{2}{3},$$
$$\text{si } t = 12, \text{ entonces } n = 96.$$

Así, se tiene un máximo absoluto en $t = 12$. Una gráfica de la función se da en la figura 13.2.



Advertencia El ejemplo anterior ilustra que no debe ignorar los extremos cuando se determinan extremos absolutos en un intervalo cerrado.

En el ejemplo siguiente usamos la palabra *monopolista*. En una situación de monopolio, sólo hay un vendedor de un producto para el cual no existen sustitutos similares, y el vendedor, o sea, el monopolista, controla el mercado. Considerando la ecuación de demanda para el producto, el monopolista puede fijar el precio (o volumen de producción) de manera que se obtenga una utilidad máxima.

Este ejemplo implica la maximización de la utilidad cuando se conocen las funciones de demanda y de costo promedio. En la parte (d), se impone un impuesto al monopolio, y se analiza una nueva función de utilidad.

EJEMPLO 8 Maximización de una utilidad

Suponga que la ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 400 - 2q$ y que la función de costo promedio es $\bar{c} = 0.2q + 4 + (400/q)$, donde q es el número de unidades, y p y $\bar{c}$ se expresan en dólares por unidad.

a. *Determinar el nivel de producción en el que se maximiza la utilidad.*

b. *Determinar el precio en que ocurre la utilidad máxima.*

c. *Determinar la utilidad máxima.*

d. *Si como medida reguladora, el gobierno impone un impuesto de \$22 por unidad al monopolista, ¿cuál es el nuevo precio que maximiza la utilidad?*

Solución: sabemos que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}.$$

Como el ingreso total r y el costo total c están dados por

$$r = pq = 400q - 2q^2$$

y

$$c = q\bar{c} = 0.2q^2 + 4q + 400,$$

la utilidad es

$$P = r - c = 400q - 2q^2 - (0.2q^2 + 4q + 400),$$

o

$$P = 396q - 2.2q^2 - 400, \qquad (6)$$

donde $q > 0$.

a. Para maximizar la utilidad, hacemos $dP/dq = 0$:

$$\frac{dp}{dq} = 396 - 4.4q = 0,$$
$$q = 90.$$

Ahora, $d^2P/dq^2 = -4.4$ siempre es negativa, por lo que es negativa en el valor crítico $q = 90$. De acuerdo con la prueba de la segunda derivada, se tiene ahí un máximo relativo. Como $q = 90$ es el único valor crítico en $(0, \infty)$, debemos tener ahí un máximo absoluto.

b. El precio en que ocurre la utilidad máxima se obtiene haciendo $q = 90$ en la ecuación de demanda:

$$p = 400 - 2(90) = \$220.$$

c. La utilidad máxima se obtiene reemplazando q por 90 en la ecuación (6), lo que da

$$P = \$17,420.$$

d. El impuesto de \$22 por unidad implica que para q unidades el costo total crece en $22q$. La nueva función de costo es $c_1 = 0.2q^2 + 4q + 400 + 22q$ y la nueva utilidad está dada por

$$\begin{aligned} P_1 &= 400q - 2q^2 - (0.2q^2 + 4q + 400 + 22q) \\ &= 374q - 2.2q^2 - 400. \end{aligned}$$

Haciendo $dP_1/dq = 0$, resulta

$$\frac{dP_1}{dq} = 374 - 4.4q = 0,$$

$$q = 85.$$

Como $d^2P1/dq^2 = -4.4 < 0$, concluimos que para maximizar la utilidad, el monopolista debe restringir la producción a 85 unidades a un precio mayor de $p_1 = 400 - 2(85) = \$230$. Como este precio es sólo \$10 mayor que antes, parte del impuesto se ha cargado al consumidor y el monopolista debe pagar la diferencia. La utilidad es ahora de \$15,495, la cual es menor que la ganancia anterior.

■

El estudio conduce al principio económico de que cuando la utilidad es máxima, el ingreso marginal es igual al costo marginal.

Concluimos esta sección usando el cálculo para desarrollar un principio muy importante en economía. Supongamos que $p = f(q)$ es la función de demanda para el producto de una empresa, donde p es el precio por unidad y q el número de unidades producidas y vendidas. Entonces, el ingreso total está dado por $r = qp = qf(q)$, que es una función de q. Sea $c = g(q)$ la función de costo total para producir q unidades. Así, la utilidad total, que es igual a ingreso total − costo total, es también una función de q, a saber,

$$P = r - c = qf(q) - g(q).$$

Consideremos la producción más favorable para la empresa. Ignorando casos especiales, sabemos que la utilidad es máxima cuando $dP/dq = 0$ y $d^2P/dq^2 < 0$. Tenemos,

$$\frac{dP}{dq} = \frac{d}{dq}(r - c) = \frac{dr}{dq} - \frac{dc}{dq}.$$

Entonces, $dP/dq = 0$ cuando

$$\frac{dr}{dq} = \frac{dc}{dq}.$$

Esto es, al nivel de la utilidad máxima, la pendiente de la tangente a la curva de ingreso total debe ser igual a la pendiente de la tangente a la curva de costo to-

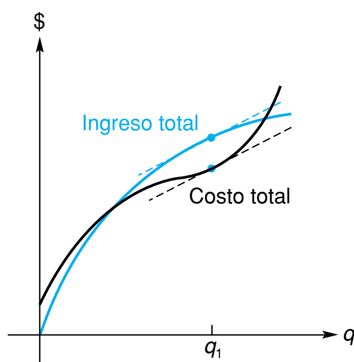


FIGURA 13.3 En la utilidad máxima, el ingreso marginal es igual al costo marginal.

tal (véase la fig. 13.3). Pero dr/dq es el ingreso marginal IM y dc/dq es el costo marginal CM. Así, bajo condiciones comunes,

> para maximizar la utilidad es necesario que
>
> IM = CM.

Para que esto corresponda a un máximo, es necesario que $d^2P/dq^2 < 0$.

$$\frac{d^2P}{dq^2} = \frac{d^2}{dq^2}(r - c) = \frac{d^2r}{dq^2} - \frac{d^2c}{dq^2} < 0 \quad \text{o} \quad \frac{d^2r}{dq^2} < \frac{d^2c}{dq^2}.$$

Esto es, cuando IM = CM, para tener una utilidad máxima, la pendiente de la curva del ingreso marginal deber ser menor que la pendiente de la curva del costo marginal.

La condición de que $d^2P/dq^2 < 0$ cuando $dP/dq = 0$ puede verse de otra manera. En forma equivalente, para que IM = CM corresponda a un máximo, dP/dq debe pasar de + a −; esto es, debe ir de $dr/dq - dc/dq > 0$ a $dr/dq - dc/dq < 0$. Por tanto, cuando la producción crece, debemos tener IM > CM y luego IM < CM. Esto significa que en el punto q_1 de utilidad máxima, *la curva de costo marginal debe cortar a la curva de ingreso marginal por debajo* (véase la fig. 13.4). Para una producción hasta q_1, el ingreso de una producción sería mayor que el costo de tal producción, y la utilidad total aumentaría. Para una producción mayor a q_1, CM > IM y cada unidad de producción agregaría más a los costos totales que al ingreso total. Por tanto, las utilidades se reducirán.

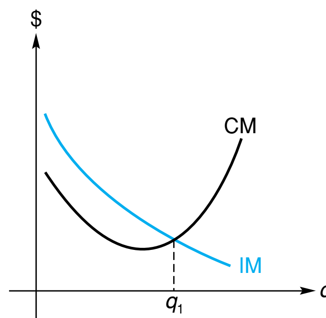


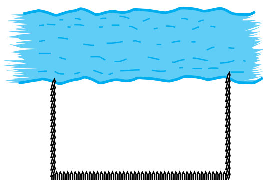
FIGURA 13.4 En la utilidad máxima, la curva de costo marginal corta a la curva de ingreso marginal desde abajo.

Ejercicio 13.1

En este conjunto de problemas, a menos que se especifique otra cosa, p es el precio por unidad y q la producción por unidad de tiempo. Los costos fijos se refieren a costos que permanecen constantes bajo todo nivel de producción en un periodo dado (un ejemplo es la renta).

1. Encuentre dos números cuya suma sea 26 y cuyo producto sea máximo.
2. Encuentre dos números no negativos cuya suma sea 20 y tales que el producto de 2 veces uno de los números por el cuadrado del otro sea un máximo.
3. **Cercado** Una empresa dispone de $9000 para cercar una porción rectangular del terreno adyacente a un río, y a éste lo usa como un lado del área cercada. El costo de la cerca paralela al río es de $15 por pie instalado y el de la cerca para los dos lados restantes es de $9 por

pie instalado. Encuentre las dimensiones del área máxima cercada.



4. **Cercado** El propietario del Vivero Laurel quiere cercar un terreno de forma rectangular de 1000 pies cuadrados de área, para usarlo para diferentes tipos de arbustos. El terreno será dividido en cuatro lotes iguales, con tres cercas paralelas a uno de los lados, como se muestra en la figura 13.5. ¿Cuál es el número mínimo de pies de cerca necesarios?



FIGURA 13.5 Diagrama para el problema 4.

5. **Costo promedio** Un fabricante determina que el costo total, c, de producir un producto está dado por la función de costo

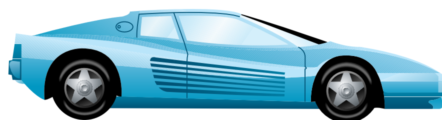
$$c = 0.05q^2 + 5q + 500.$$

¿Para qué nivel de producción será mínimo el costo promedio por unidad?

6. **Gastos de un automóvil** El costo por hora (en dólares) de operar un automóvil está dado por

$$C = 0.12s - 0.0012s^2 + 0.08, \quad 0 \leq s \leq 60,$$

donde s es la velocidad en millas por hora. ¿A qué velocidad es el costo por hora mínimo?



7. **Ingreso** La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = -5q + 30.$$

¿A qué precio se maximizará el ingreso?

8. **Ingreso** Para el producto de un monopolista, la función de demanda es

$$q = 10{,}000e^{-0.02p}.$$

Encuentre el valor de p para el cual se obtiene el ingreso máximo.

9. **Ganancia de peso** Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales en ratas a las que se les administró una dieta que contenía un 10% de proteína.[1] La proteína consistió en levadura y harina de semilla de algodón. Al variar el porcentaje p de levadura en la mezcla con proteína, el grupo encontró que el aumento de peso



(promedio en gramos) de una rata en un periodo fue de

$$f(p) = 160 - p - \frac{900}{p + 10}, \quad 0 \leq p \leq 100.$$

Encuentre (a) el aumento de peso máximo y (b) el aumento de peso mínimo.

10. **Dosis de un medicamento** La severidad R de la reacción del cuerpo humano a una dosis inicial D de un medicamento está dada por[2]

$$R = f(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right),$$

donde la constante C denota la cantidad máxima de medicamento que puede administrarse. Demuestre que R tiene una *razón de cambio* máxima cuando $D = C/2$.

11. **Utilidad** Para el producto de un monopolista, la función de demanda es

$$p = 72 - 0.04q$$

y la función de costo es

$$c = 500 + 30q.$$

¿A qué nivel de producción se maximiza la utilidad? ¿A qué precio ocurre esto y cuál es la utilidad?

12. **Utilidad** Para un monopolista, el costo por unidad de producir un artículo es de $3 y la ecuación de demanda es

$$p = \frac{10}{\sqrt{q}}.$$

¿Cuál precio dará la utilidad máxima?

13. **Utilidad** Para el producto de un monopolista la ecuación de demanda es

$$p = 42 - 4q,$$

y la función de costo promedio es

$$\bar{c} = 2 + \frac{80}{q}.$$

Encuentre el precio que maximiza la utilidad.

---

[1] Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods," en *Single–Cell Protein*, ed. R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

[2] R. M. Thrall, J. A. Mortimer, K. R. Rebman y R.F. Baum, editores, *Some Mathematical Models in Biology*, edición revisada, reporte núm. 40241-R-7, preparado en la Universidad de Michigan, 1967.

14. Utilidad Para el producto de un monopolista, la función de demanda es

$$p = \frac{50}{\sqrt{q}},$$

y la función de costo promedio es

$$\bar{c} = 0.50 + \frac{1000}{q}.$$

Encuentre el precio y la producción que aumentan al máximo la utilidad. A este nivel, demuestre que el ingreso marginal es igual al costo marginal.

15. Utilidad Un fabricante puede producir cuando mucho 120 unidades de cierto artículo cada año. La ecuación de demanda para ese producto es

$$p = q^2 - 100q + 3200,$$

y la función de costo promedio del fabricante es

$$\bar{c} = \frac{2}{3}q^2 - 40q + \frac{10{,}000}{q}.$$

Determine la producción q que maximiza la utilidad y la correspondiente utilidad máxima.

16. Costo Un fabricante ha determinado que para cierto producto, el costo promedio (en dólares por unidad) está dado por

$$\bar{c} = 2q^2 - 36q + 210 - \frac{200}{q},$$

donde $2 \leq q \leq 10$.

a. ¿A qué nivel dentro del intervalo [2, 10] debe fijarse la producción para minimizar el costo total? ¿Cuál es el costo total mínimo?

b. Si la producción tuviese que encontrarse dentro del intervalo [5, 10], ¿qué valor de q minimizaría el costo total?

17. Utilidad Los costos totales fijos de la empresa XYZ son de \$1200, los costos combinados de material y mano de obra son de \$2 por unidad y la ecuación de demanda es

$$p = \frac{100}{\sqrt{q}}.$$

¿Qué nivel de producción maximizará la utilidad? Demuestre que esto ocurrirá cuando el ingreso marginal sea igual al costo marginal. ¿Cuál es el precio cuando la utilidad es máxima?

18. Ingreso Una empresa de bienes raíces posee 100 departamentos tipo jardín. Cada departamento puede rentarse a \$400 por mes. Sin embargo, por cada \$10 mensuales de incremento, habrá dos departamentos vacíos, sin posibilidad de rentarlos. ¿Qué renta por departamento maximizará el ingreso mensual?

19. Ingreso Una empresa de televisión por cable tiene 4800 suscriptores que pagan cada uno \$18 mensuales, y puede conseguir 150 suscriptores más por cada reducción de \$0.50 en la renta mensual. ¿Cuál será la renta que maximice el ingreso y cuál será este ingreso?

20. Utilidad Un fabricante de un producto encuentra que para las primeras 500 unidades que produce y vende, la utilidad es de \$50 por unidad. La utilidad por cada unidad producida más allá de 500 disminuye en \$0.10 por cada unidad adicional producida. Por ejemplo, la utilidad total cuando produce y vende 502 unidades es 500(50) + 2(49.80). ¿Qué nivel de producción maximizará la utilidad?

21. Diseño de un recipiente Un fabricante de recipientes está diseñando una caja sin tapa y con base cuadrada, que debe tener un volumen de 32 pies^3. ¿Qué dimensiones debe tener la caja, si se requiere que se utilice la menor cantidad de material? (Véase la fig. 13.6.)

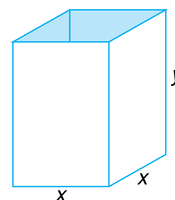


FIGURA 13.6 Caja sin tapa para los problemas 21 y 22.

22. Diseño de un recipiente Una caja sin tapa de base cuadrada va a construirse con 192 pies^2 de material. ¿Qué dimensiones debe tener para que su volumen sea máximo? ¿Cuál es el volumen máximo? (Véase la fig. 13.6.)

23. Diseño de un recipiente Una caja sin tapa va a fabricarse cortando cuadrados iguales de cada esquina de una lámina cuadrada de 12 pulgadas de lado, doblando luego hacia arriba los lados. Encuentre la longitud del lado del cuadrado que debe recortarse para que el volumen de la caja sea máximo. ¿Cuál es el volumen máximo? (Véase la fig. 13.7.)

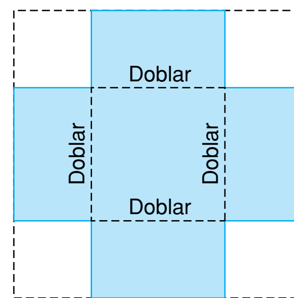


FIGURA 13.7 Caja para el problema 23.

24. Diseño de un cartel Un cartel rectangular de cartón debe tener 150 pulgadas^2 para material impreso, márgenes de 3 pulgadas arriba y abajo y de 2 pulgadas a cada lado. Encuentre las dimensiones del cartel de manera que la cantidad de cartón que se use sea mínima (véase la fig. 13.8). [*Sugerencia:* encuentre primero los valores

de x y y en la figura 13.8 que minimizan la cantidad de cartón.]

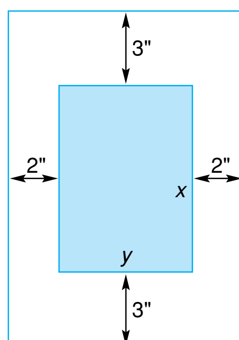


FIGURA 13.8 Cartel para el problema 24.

25. **Diseño de un recipiente** Una lata cilíndrica sin tapa debe tener un volumen K. Demuestre que si se usa la cantidad mínima de material, entonces el radio y la altura serán iguales a $\sqrt[3]{K/\pi}$. (Véase la fig. 13.9.)

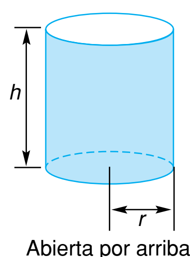


FIGURA 13.9 Lata para los problemas 25 y 26.

26. **Diseño de un recipiente** Una lata cilíndrica sin tapa va a fabricarse con una cantidad fija de material, K. Para que el volumen sea máximo, demuestre que el radio y la altura deben ser iguales a $\sqrt{K/(3\pi)}$ (Véase la fig. 13.9).

27. **Utilidad** La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = 600 - 2q,$$

y la función de costo total es

$$c = 0.2q^2 + 28q + 200.$$

Encuentre la producción y el precio que aumentarán al máximo la utilidad y determine la utilidad correspondiente. Si el gobierno impone un impuesto de $22 por unidad al fabricante, ¿cuáles serían entonces la producción y el precio que aumentarían al máximo la utilidad? Ahora, ¿cuál es la utilidad?

28. **Utilidad** Utilice los datos *originales* del problema 27 y suponga que el gobierno impone una cuota por licencia de $100 al fabricante. Ésta es una cantidad global independiente de la producción. Demuestre que el precio y la producción que aumentan al máximo la utilidad permanecen iguales. Sin embargo, demuestre que se tendrá una menor utilidad.

29. **Tamaño económico del lote** Un fabricante tiene que producir anualmente 1000 unidades de un producto que se vende a una razón uniforme durante el año. El costo de producción de cada unidad es de $10 y los costos de acarreo (seguro, interés, almacenamiento, etc.) se estiman iguales al 12.8% del valor promedio del inventario. Los gastos de operación por periodo de producción son de $40. Encuentre el tamaño económico del lote.

30. **Utilidad** Para el producto de un monopolista, la función de costo es

$$c = 0.004q^3 + 20q + 5000,$$

y la función de demanda es

$$p = 450 - 4q.$$

Encuentre la producción que maximiza la utilidad.

31. **Asistencia a un seminario** La empresa Investigación y Estudios Superiores (IES) está considerando ofrecer un seminario sobre asignación de recursos a directivos de la Compañía Acme. Para hacer el ofrecimiento económicamente factible, IES considera que por lo menos 30 personas deben inscribirse y cubrir un costo de $50 cada una. Además IES acepta reducir la cuota en $1.25 por cada *persona* adicional de las primeras 30. ¿Cuánta gente debe inscribirse para que el ingreso de IES sea máximo? Suponga que el número máximo de asistentes se limita a 40 personas.

32. **Costo de alquilar un motor** La empresa Juguetes Infantiles planea alquilar un motor eléctrico para utilizarlo 90,000 caballos-hora por año, en su proceso de manufactura. Un caballo-hora es el trabajo hecho en 1 hora por un motor de un caballo de potencia. El costo anual de alquilar el motor es de $150 más $0.60 por caballo de fuerza. El costo por caballo-hora de operar el motor es de $0.006/$N$, donde N es el número de caballos de fuerza. ¿Qué tamaño de motor, en caballos de fuerza, debe alquilarse para minimizar el costo?

33. **Costo de transporte** EL costo de operar un camión sobre una autopista (excluyendo el salario del chofer) es

$$0.165 + \frac{s}{200}$$

dólares por milla, donde s es la velocidad (uniforme) del camión en millas por hora. El salario del chofer es de $18 por hora. ¿A qué velocidad debe manejar el chofer para que un viaje de 700 millas resulte lo más económico posible?

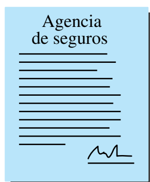


34. Costo Para un productor, el costo de fabricar un artículo es de \$30 por mano de obra y de \$10 por material; los gastos indirectos son de \$20,000 por semana. Si se fabrican más de 5000 artículos por semana, la mano de obra se eleva a \$45 por artículo, para aquellas unidades que excedan de 5000. ¿Para qué nivel de producción el costo promedio por artículo será mínimo?

35. Utilidad La señora Jones tiene una agencia de seguros pequeña que vende pólizas para una gran compañía de seguros. Por cada póliza vendida, la señora Jones, que no vende por si misma las pólizas, recibe una comisión de \$50 de la compañía de seguros. De experiencias pasadas, la señora Jones ha determinado que cuando emplea m vendedores se venden,

$$q = m^3 - 12m^2 + 60m$$

pólizas por semana. Ella paga a cada uno de los vendedores \$750 por semana y sus gastos fijos semanales son de \$2500. Su oficina actual sólo puede tener cabida para siete vendedores. Determine el número de vendedores que la señora Jones debe contratar para maximizar su utilidad semanal. ¿Cuál es la utilidad máxima correspondiente?



36. Utilidad Un fabricante vende sacos de alta calidad a una cadena de tiendas. La ecuación de la demanda para esos sacos es

$$p = 400 - 50q.$$

donde p es el precio de venta (en dólares por saco) y q la demanda (en miles de sacos). Si la función de costo marginal del fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = \frac{800}{q + 5}$$

demuestre que existe una utilidad máxima y determine el número de sacos que deben venderse para obtener esta utilidad máxima.

37. Producción química Una empresa fabrica diariamente x toneladas del producto químico A ($x \geq 4$) y

$$y = \frac{24 - 6x}{5 - x}$$

toneladas del producto químico B. La utilidad con A es de \$2000 por tonelada y con B es de \$1000 por tonelada. ¿Cuántas toneladas de A deben producirse por día para maximizar la utilidad? Responda la misma pregunta si la utilidad con A es de P por tonelada y con B es de $P/2$ por tonelada.



38. Tasa de rendimiento Para construir un edificio de oficinas, los costos fijos son de \$2.5 millones e incluyen el precio del terreno, los honorarios del arquitecto, la cimentación, la estructura, etc. Si se construyen x pisos, el costo (excluyendo los costos fijos) es

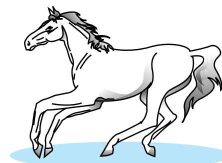
$$c = 5x[100{,}000 + 5000(x - 1)].$$

El ingreso por mes es de \$50,000 por piso. ¿Cuántos pisos darán una tasa máxima de rendimiento sobre la inversión? (Tasa de rendimiento = ingreso total/costo total.)

39. Marcha y potencia desarrollada por un animal En un modelo planteado por Smith,[3] la potencia P desarrollada por un animal a una velocidad dada en función de su movimiento o *marcha* j, se obtiene de la siguiente relación:

$$P(j) = Aj\frac{L^4}{V} + B\frac{V^3L^2}{1 + j},$$

donde A y B son constantes, j es una medida de "inconstancia" de la marcha, L es una constante que representa una dimensión lineal y V una velocidad constante hacia delante.



Suponga que P es mínima cuando $dP/dj = 0$. Demuestre que cuando esto ocurre,

$$(1 + j)^2 = \frac{BV^4}{AL^2}.$$

Como comentario al margen, Smith señala que "a velocidad máxima, j es cero para un elefante, 0.3 para un caballo y 1 para un galgo de carreras, aproximadamente".

40. Flujo de vehículos En un modelo de flujo de vehículos sobre un carril de una autopista, el número de automóviles que pueden circular por el carril por unidad de tiempo está dado por[4]

$$N = \frac{-2a}{-2at_r + v - \dfrac{2al}{v}},$$

donde a es la aceleración de un automóvil al detenerse ($a < 0$), t_r el tiempo de reacción para comenzar a frenar, v la velocidad promedio de los automóviles y l la longitud de un automóvil. Suponga que a, t y l son cons-

[3] J. M. Smith *Mathematical Ideas in Biology* (Londres: Cambridge University Press, 1968).

[4] J. I. Shonle, *Environmental Aplications of General Physics* (Reading, MA: Adison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

tantes. Para encontrar el mayor número de automóviles que pueden circular por el carril, necesitamos calcular la velocidad v que maximiza a N. Para maximizar N, es suficiente minimizar el denominador

$$-2at_r + v - \frac{2al}{v}.$$

a. Encuentre el valor de v que minimiza al denominador.
b. Evalúe su respuesta en (a) cuando $a = -19.6$ (pies/s^2), $l = 20$ (pies) y $t_r = 0.5$ (s). Dé su respuesta en pies/s.
c. Encuentre el valor correspondiente de N con un decimal. Su respuesta estará en automóviles por segundo. Conviértala a automóviles por hora.

41. Costo promedio Durante la temporada navideña, una empresa compra calcetines baratos de fieltro rojo, les pega imitación de piel blanca y lentejuelas, y los empaca para su distribución. El costo total de producir q cajas de estos calcetines está dado por

$$c = 3q^2 + 50q - 18q \ln q + 120.$$

Encuentre el número de cajas que deben prepararse para minimizar el costo promedio por caja. Determine (con dos decimales) este costo promedio mínimo.

 **42. Utilidad** La ecuación de demanda de un monopolista es

$$p = q^2 - 21q + 164,$$

donde p es el precio de venta (en miles de dólares) por tonelada cuando se venden q toneladas del producto. Suponga que el costo fijo es de \$100 mil y que cada tonelada cuesta \$20 mil producirla. Si la maquinaria actual tiene una capacidad máxima para producir 10 toneladas, use la gráfica de la función de utilidad para determinar a qué nivel de producción se tiene la utilidad máxima. Encuentre la utilidad máxima correspondiente y el precio de venta por tonelada.

OBJETIVO Definir la diferencial, interpretarla de manera geométrica y usarla en aproximaciones. También es necesario establecer las relaciones de reciprocidad entre dx/dy y dy/dx.

13.2 Diferenciales

Pronto daremos una razón para usar el símbolo dy/dx para denotar la derivada de y con respecto a x. Para hacer esto, introduciremos la noción de la *diferencial* de una función.

Definición

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable de x y sea Δx un cambio en x, donde Δx puede ser cualquier número real. Entonces, la **diferencial** de y, denotada por dy o $d[f(x)]$, está dada por

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Note que dy es una función de dos variables, a saber, de x y de Δx.

EJEMPLO 1 Cálculo de una diferencial

Encontrar la diferencial de $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ *y evaluarla cuando* $x = 1$ *y* $\Delta x = 0.04$.

Solución: la diferencial es

$$dy = \frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + 3x - 4)\Delta x$$
$$= (3x^2 - 4x + 3)\Delta x.$$

Cuando $x = 1$ y $\Delta x = 0.04$,

$$dy = [3(1)^2 - 4(1) + 3](0.04) = 0.08.$$

Si $y = x$, entonces $dy = d(x) = 1\Delta x = \Delta x$. Por tanto, la diferencial de x es Δx. Abreviamos $d(x)$ con dx. Así, $dx = \Delta x$. De ahora en adelante escribiremos siempre dx en vez de Δx cuando busquemos una diferencial. Por ejemplo,

$$d(x^2 + 5) = \frac{d}{dx}(x^2 + 5)dx = 2x\, dx.$$

En resumen, decimos que si $y = f(x)$ define una función diferenciable de x, entonces

$$dy = f'(x)\,dx,$$

donde dx es cualquier número real. Siempre que $dx \neq 0$, podemos dividir ambos miembros entre dx:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Esto es, dy/dx puede interpretarse como el cociente de dos diferenciales, o sea, dy dividido entre dx, o como un símbolo para la derivada de f en x. Es por esto que introdujimos el símbolo dy/dx para denotar la derivada.

EJEMPLO 2 Determinación de una diferencial en términos de *dx*

a. Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces

$$d(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x})\,dx = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

b. Si $u = (x^2 + 3)^5$, entonces $du = 5(x^2 + 3)^4(2x)\,dx = 10x(x^2 + 3)^4dx$.

La diferencia puede interpretarse de manera geométrica. En la figura 13.10, el punto $P(x, f(x))$ está sobre la curva $y = f(x)$. Supongamos que x cambia en dx, un número real, al nuevo valor $x + dx$. Entonces, el valor de la nueva función es $f(x + dx)$, y el punto correspondiente sobre la curva es

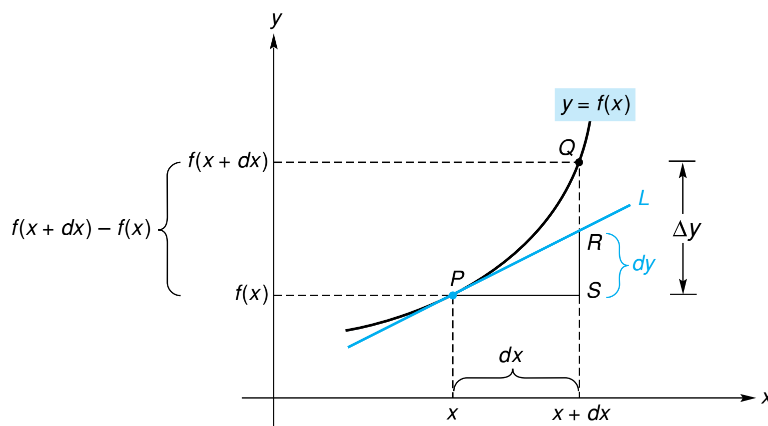


FIGURA 13.10 Interpretación geométrica de dy y Δx.

$Q(x + dx, f(x + dx))$. Por P y Q pasan líneas horizontales y verticales, respectivamente, que se intersecan en S. Una línea L tangente a la curva de P interseca el segmento QS en R, formando el triángulo rectángulo PRS. Observe que la gráfica de f cerca de P es aproximada por la línea tangente en P. La pendiente de L es $f'(x)$ o en forma equivalente, es $\overline{SR}/\overline{PS}$:

$$f'(x) = \frac{\overline{SR}}{\overline{PS}}.$$

Como $dy = f'(x)\,dx$ y $dx = \overline{PS}$,

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{\overline{SR}}{\overline{PS}} \cdot \overline{PS} = \overline{SR}.$$

Así, si dx es un cambio de x en P, entonces dy es el correspondiente cambio vertical a lo largo de la **línea tangente** en P. Observe que para la misma dx, el cambio vertical a lo largo de la **curva** es $\Delta y = \overline{SQ} = f(x + dx) - f(x)$. No confunda Δy con dy. Sin embargo, de la figura 13.10 es claro que:

Cuando dx es cercana a 0, dy es una aproximación a Δy. Por tanto,

$$\Delta y \approx dy.$$

Esta relación es útil al estimar Δy, un cambio en y, como se verá en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Uso de la diferencial para estimar un cambio en una cantidad

Un centro de salud del gobierno examinó las historias clínicas de un grupo de individuos que fueron hospitalizados por una enfermedad particular. Se encontró que la proporción total P que fue dada de alta al final de t días está dada por

$$P = P(t) = 1 - \left(\frac{300}{300 + t}\right)^3.$$

Usar diferenciales para estimar el cambio en la proporción dada de alta si t cambia de 300 *a* 305.

Solución: el cambio en t de 300 a 305 es $\Delta t = dt = 305 - 300 = 5$. El cambio en P es $\Delta P = P(305) - P(300)$. Aproximamos ΔP con dP:

$$\Delta P \approx dP = P'dt = -3\left(\frac{300}{300 + t}\right)^2\left[-\frac{300}{(300 + t)^2}\right]dt.$$

Cuando $t = 300$ y $dt = 5$,

$$dP = -3\left(\frac{300}{600}\right)^2\left[-\frac{300}{(600)^2}\right]5$$

$$= -3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[-\frac{1}{2(600)}\right]5 = \frac{1}{320} \approx 0.0031.$$

Como comparación, el valor verdadero de ΔP es $P(305) - P(300) = 0.87807 - 0.87500 = 0.00307$ (con cinco decimales).

Dijimos que si $y = f(x)$, entonces $\Delta y \approx dy$ si dx es cercana a cero. Así

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) \approx dy$$

o

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy. \quad \textbf{(1)}$$

La fórmula (1) se usa para aproximar un valor funcional, mientras que la fórmula $\Delta y \approx dy$ se usa para aproximar un cambio en los valores funcionales.

Esta fórmula nos da una manera de estimar el valor de una función, $f(x + dx)$. Por ejemplo, supongamos que queremos estimar $\ln(1.06)$. Haciendo $y = f(x) = \ln x$, necesitamos estimar $f(1.06)$. Como $d(\ln x) = (1/x)\,dx$, de la fórmula (1), tenemos,

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy,$$

$$\ln(x + dx) \approx \ln x + \frac{1}{x}dx.$$

Conocemos el valor exacto de ln 1, por lo que haremos $x = 1$ y $dx = 0.06$. Entonces, $x + dx = 1.06$ y dx es cercana a cero. Por tanto,

$$\ln(1 + 0.06) \approx \ln(1) + \frac{1}{1}(0.06),$$

$$\ln(1.06) \approx 0 + 0.06 = 0.06.$$

El valor verdadero de ln(1.06) con cinco decimales es 0.05827.

EJEMPLO 4 Uso de la diferencial para estimar el valor de una función

La función de demanda para un producto está determinada por

$$p = f(q) = 20 - \sqrt{q},$$

donde p es el precio por unidad en dólares para q unidades. Por medio de diferenciales, estimar el precio cuando se demandan 99 unidades.

Solución: queremos estimar $f(99)$. Por medio de la fórmula (1),

$$f(q + dq) \approx f(q) + dp,$$

donde

$$dp = -\frac{1}{2\sqrt{q}}\,dq \qquad \left(\frac{dp}{dq} = -\frac{1}{2}q^{-1/2}\right).$$

Escogemos $q = 100$ y $dq = -1$ porque $q + dq = 99$, dq es pequeña y es fácil de calcular $f(100) = 20 - \sqrt{100} = 10$. Así tenemos

$$f(99) = f[100 + (-1)] \approx f(100) - \frac{1}{2\sqrt{100}}(-1),$$

$$f(99) \approx 10 + 0.05 = 10.05.$$

De aquí que el precio por unidad cuando se demandan 99 unidades sea de aproximadamente \$10.05.

La ecuación $y = x^3 + 4x + 5$ define a y como una función de x. Sin embargo, también define a x implícitamente como una función de y. De acuerdo con esto, podemos examinar también la derivada de x con respecto a y, dx/dy. Como dx/dy puede considerarse un cociente de diferenciales, estamos justificados a escribir (y es cierto en realidad)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \qquad \text{siempre que } dy/dx \neq 0.$$

Pero dx/dy es la derivada de y con respecto a x e igual a $3x^2 + 4$. Así,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 + 4}.$$

Esto es el *recíproco* de dy/dx.

EJEMPLO 5 Determinación de dp/dq a partir de dq/dp

Encontrar $\dfrac{dp}{dq}$ *si* $q = \sqrt{2500 - p^2}$.

Solución:

Estrategia: hay varias maneras de encontrar dp/dq. Una es despejar p de la ecuación dada en términos de q y luego diferenciar en forma directa. Otra manera de encontrar dp/dq es usar la diferenciación implícita. Sin embargo, como q está dada explícitamente como función de p, podemos encontrar fácilmente dq/dp y luego usar la relación recíproca anterior para encontrar dp/dq. Usaremos este procedimiento.

Tenemos

$$\frac{dq}{dp} = \frac{1}{2}(2500 - p^2)^{-1/2}(-2p) = -\frac{p}{\sqrt{2500 - p^2}}.$$

Por tanto,

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{\frac{dq}{dp}} = -\frac{\sqrt{2500 - p^2}}{p}.$$

Ejercicio 13.2

En los problemas del 1 al 10 encuentre la diferencial de la función en términos de x y dx.

1. $y = 3x - 4$.

2. $y = 2$.

3. $f(x) = \sqrt{x^4 + 6}$.

4. $f(x) = (4x^2 - 5x + 2)^3$.

5. $u = \frac{1}{x^2}$.

6. $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

7. $p = \ln(x^2 + 7)$.

8. $p = e^{x^3+5}$.

9. $y = (9x + 3)e^{2x^2+3}$.

10. $y = \ln\sqrt{x^4 + 1}$.

En los problemas del 11 al 16 encuentre Δy y dy para los valores dados de x y dx.

11. $y = 4 - 7x$; $x = 3, dx = 0.02$.

12. $y = 5x^2$; $x = -1, dx = -0.02$.

13. $y = 4x^2 - 3x + 10$; $x = -1, dx = 0.25$.

14. $y = (3x + 2)^2$; $x = -1, dx = -0.03$.

15. $y = \sqrt{25 - x^2}$; $x = 3, dx = -0.1$. Redondee su respuesta a tres decimales.

16. $y = \ln(-x)$; $x = -5, dx = 0.1$.

17. Sea $f(x) = \frac{x + 5}{x + 1}$.

a. Evalúe $f'(1)$.
b. Use diferenciales para estimar el valor de $f(1.1)$.

18. Sea $f(x) = x^{3x}$.

a. Evalúe $f'(1)$.
b. Use diferenciales para estimar el valor de $f(0.98)$.

En los problemas del 19 al 26 aproxime cada expresión por medio de diferenciales.

19. $\sqrt{99}$.

20. $\sqrt{122}$.

21. $\sqrt[3]{65.5}$.

22. $\sqrt[4]{15.5}$.

23. $\ln 0.97$.

24. $\ln 1.01$.

25. $e^{0.01}$.

26. $e^{-0.01}$.

En los problemas del 27 al 32 encuentre dx/dy o dp/dq.

27. $y = 2x - 1$.

28. $y = 5x^2 + 3x + 2$.

29. $q = (p^2 + 5)^3$.

30. $q = \sqrt{p + 5}$.

31. $q = \dfrac{1}{p}$.

32. $q = e^{5-p}$.

33. Si $y = 5x^2 + 3x + 2$, encuentre el valor de dx/dy cuando $x = 3$.

34. Si $y = \ln x$, encuentre el valor de dx/dy cuando $x = 2$.

En los problemas del 35 y 36 encuentre la razón de cambio de q con respecto a p para el valor indicado de q.

35. $p = \dfrac{500}{q + 2}$; $q = 18$.

36. $p = 50 - \sqrt{q}$; $q = 100$.

37. Utilidad Suponga que la utilidad P al producir q unidades de un producto es

$$P = 396q - 2.2q^2 - 400.$$

Por medio de diferenciales, encuentre el cambio aproximado en la utilidad, si el nivel de producción cambia de $q = 80$ a $q = 81$. Encuentre el cambio verdadero.

38. Ingreso Dada la función de ingreso

$$r = 250q + 45q^2 - q^3,$$

use diferenciales para encontrar el cambio aproximado en el ingreso, si el número de unidades se incrementa de $q = 40$ a $q = 41$. Encuentre el cambio verdadero.

39. Demanda La ecuación de demanda para un producto es

$$p = \frac{10}{\sqrt{q}}.$$

Por medio de diferenciales estime el precio cuando se demandan 24 unidades.

40. Demanda Dada la función de demanda

$$p = \frac{100}{\sqrt{q + 4}},$$

use diferenciales para estimar el precio por unidad cuando se demandan 12.5 unidades.

41. Si $y = f(x)$, entonces el *cambio proporcional en y* se define como $\Delta y/y$, que puede aproximarse por medio de diferenciales por medio de dy/y. Use esta última forma para estimar el cambio proporcional en la función de costo

$$c = f(q) = \frac{q^4}{2} + 3q + 400$$

cuando $q = 10$ y $dq = 2$. Redondee su respuesta a un decimal.

42. Condición social/ingreso Suponga que S es un valor numérico de la condición social basado en el ingreso anual, I (en miles de dólares), de una persona. Para cierta población, suponga que $S = 20\sqrt{I}$. Use diferenciales para estimar el cambio en S, si el ingreso anual decrece de \$45,000 a \$44,500.

43. Biología El volumen V de una célula esférica está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio. Estime el cambio en el volumen cuando el radio cambia de 6.5×10^{-4} cm a 6.6×10^{-4} cm.

44. Contracción muscular La ecuación

$$(P + a)(v + b) = k$$

se llama "ecuación fundamental de la contracción muscular."[5] Aquí, P es la carga impuesta al músculo, v la velocidad de contracción de las fibras del músculo y a, b y k son constantes positivas. Encuentre v en términos de P y luego use diferenciales para estimar el cambio en v debido a un pequeño cambio en P.

45. Demanda La demanda, q, para el producto de un monopolista está relacionada con el precio por unidad, p, según la ecuación

$$2 + \frac{q^2}{200} = \frac{4000}{p^2}.$$

a. Verifique que se demandará por 40 unidades cuando el precio por unidad sea de \$20.

b. Demuestre que $\dfrac{dq}{dp} = -2.5$ cuando el precio por unidad es de \$20.

c. Use diferenciales y los resultados de las partes (a) y (b) para estimar el número de unidades que se demandarán si el precio por unidad se reduce a \$19.20.

46. Utilidad La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = \frac{1}{3}q^2 - 76q + 6000,$$

y la función de costo promedio es

$$\bar{c} = 600 - q + \frac{100{,}000}{3q}.$$

a. Verifique que la utilidad es de \$90,000 cuando se demandan 100 unidades.

b. Use diferenciales y el resultado de la parte (a) para estimar la utilidad cuando se demandan 97 unidades.

[5] R. W. Stacy et. al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

OBJETIVO Proporcionar un análisis matemático del concepto económico de elasticidad.

13.3 Elasticidad de la demanda

La *elasticidad de la demanda* es un medio por el cual los economistas miden cómo un cambio en el precio de un producto afecta la cantidad demandada. Esto es, se refiere a la respuesta del consumidor frente al cambio de precio. En términos informales, la elasticidad de la demanda es la razón del cambio porcentual en la cantidad demandada que resulta en un cambio porcentual dado en el precio:

$$\frac{\text{cambio porcentual en la cantidad}}{\text{cambio porcentual en el precio}}.$$

Por ejemplo, si para un incremento de 5% en el precio, la cantidad demandada decrece en 2%, podríamos decir que la elasticidad de la demanda es $-2/5$.

Para ser más específicos, suponga que $p = f(q)$ es la función de demanda para un producto. Los consumidores demandarán q unidades a un precio de $f(q)$ por unidad y demandarán $q + h$ unidades a un precio de $f(q + h)$ unidades a un precio de $f(q + h)$ por unidad (véase la fig. 13.11). El cambio *porcentual* en la cantidad demandada de q a $q + h$ es

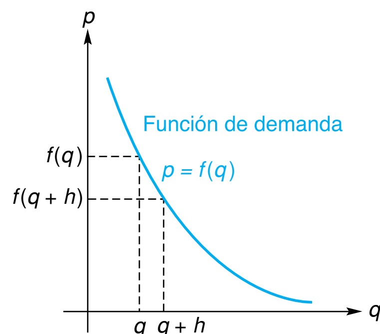


FIGURA 13.11 Cambio en la demanda.

$$\frac{(q + h) - q}{q} \cdot 100 = \frac{h}{q} \cdot 100.$$

El cambio porcentual correspondiente en precio por unidad es

$$\frac{f(q + h) - f(q)}{f(q)} \cdot 100.$$

La razón de esos cambios porcentuales es

$$\frac{\frac{h}{q} \cdot 100}{\frac{f(q + h) - f(q)}{f(q)} \cdot 100} = \frac{h}{q} \cdot \frac{f(q)}{f(q + h) - f(q)}$$

$$= \frac{f(q)}{q} \cdot \frac{h}{f(q + h) - f(q)}$$

$$= \frac{\frac{f(q)}{q}}{\frac{f(q + h) - f(q)}{h}} \qquad (1)$$

Si f es diferenciable, entonces cuando $h \to 0$, el límite de $[f(q + h) - f(q)]/h$ es $f'(q) = dp/dq$. Así, el límite de (1) es

$$\frac{\frac{f(q)}{q}}{\frac{dp}{dq}} \quad \text{o} \quad \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}},$$

que se llama *elasticidad puntual de la demanda*.

Definición

Si $p = f(q)$ es una función de demanda diferenciable, la ***elasticidad puntual de la demanda,*** denotada por la letra griega η (eta), en (q, p) está dada por

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}}.$$

Para ilustrar, encontremos la elasticidad puntual de la demanda para la función de demanda $p = 1200 - q^2$. Tenemos

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{\frac{1200 - q^2}{q}}{-2q} = -\frac{1200 - q^2}{2q^2} = -\left[\frac{600}{q^2} - \frac{1}{2}\right]. \quad \textbf{(2)}$$

Por ejemplo, si $q = 10$, entonces $\eta = -[(600/10^2) - \frac{1}{2}] = -5\frac{1}{2}$. Como

$$\eta \approx \frac{\text{cambio porcentual en la demanda}}{\text{cambio porcentual en el precio}},$$

tenemos

$$(\text{cambio porcentual en precio})(\eta) \approx \text{cambio porcentual en la demanda.}$$

Por tanto, si el precio se incrementa en 1% cuando $q = 10$, la cantidad demandada cambiaría aproximadamente en

$$(1\%)\left(-5\frac{1}{2}\right) = -5\frac{1}{2}\%.$$

Esto es, la demanda disminuiría en $5\frac{1}{2}\%$. De manera análoga, una disminución en el precio de $\frac{1}{2}\%$ cuando $q = 10$, resulta en un cambio aproximado en la demanda de

$$\left(-\frac{1}{2}\%\right)\left(-5\frac{1}{2}\right) = 2\frac{3}{4}\%.$$

De aquí que la demanda se incremente en $2\frac{3}{4}\%$.

Note que cuando se evalúa la elasticidad, no interviene unidad alguna, ya que tan sólo es un número real. Para un comportamiento normal de la demanda, un incremento (disminución) en el precio, corresponde a una disminución (incremento) en la cantidad. Así, dp/dq siempre será negativa o cero, y η (donde esté definida) siempre será negativa o cero. Algunos economistas ignoran el signo menos; en la situación anterior ellos considerarían la elasticidad igual a $5\frac{1}{2}$. Aquí no adoptaremos esta práctica.

Hay tres categorías de elasticidad:

1. Cuando $|\eta| > 1$, la demanda es *elástica*.
2. Cuando $|\eta| = 1$, la demanda tiene *elasticidad unitaria*.
3. Cuando $|\eta| < 1$, la demanda es *inélastica*.

Por ejemplo, en la ecuación (2) como $|\eta| = 5\frac{1}{2}$, cuando $q = 10$, la demanda es elástica. Si $q = 20$, entonces $|\eta| = |-[(600/20^2) - \frac{1}{2}]| = 1$, por lo que la demanda tiene elasticidad unitaria. Si $q = 25$, entonces $|\eta| = |-\frac{23}{50}|$ y la demanda es inélastica.

En términos informales, para un cambio porcentual dado en el precio, hay un cambio porcentual mayor en la cantidad demandada si la demanda es elás-

tica, un cambio porcentual menor si la demanda es inélastica y un cambio porcentual igual si la demanda tiene elasticidad unitaria.

EJEMPLO 1 Determinación de la elasticidad puntual de la demanda

Determinar la elasticidad puntual de la ecuación de demanda

$$p = \frac{k}{q}, \qquad \text{donde } k > 0 \text{ y } q > 0.$$

Solución: de la definición tenemos

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{\frac{k}{q^2}}{\frac{-k}{q^2}} = -1.$$

Así, la demanda tiene elasticidad unitaria para toda $q > 0$. La gráfica de $p = k/q$ se llama *hipérbola equilátera* y suele encontrarse en textos de economía en los análisis de elasticidad (véase la fig. 3.14 para la gráfica de tal curva).

EJEMPLO 2 Determinación de la elasticidad puntual de la demanda

Determinar la elasticidad puntual de la ecuación de demanda

$$q = p^2 - 40p + 400, \qquad \text{donde } q > 0.$$

Solución: para calcular η necesitamos encontrar dp/dq. En la ecuación de demanda dada, p no es una función explícita de q, por lo que no podemos encontrar dp/dq de manera directa. Sin embargo, de la sección 13.2,

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{\frac{dq}{dp}}.$$

Por tanto,

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{\frac{dp}{dq}} = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} \qquad \text{(Definición de } \eta\text{)}.$$

Como $dq/dp = 2p - 40$, tenemos

$$\eta = \frac{p}{q}(2p - 40).$$

Por ejemplo, si $p = 15$, $q = 25$; por tanto, $\eta = [15(-10)]/25 = -6$, por lo que la demanda es elástica.

Aquí, analizamos la elasticidad para una demanda lineal.

La elasticidad puntual para una ecuación de demanda *lineal* es muy interesante. Supongamos que la ecuación tiene la forma

$$p = mq + b, \quad \text{donde } m < 0 \text{ y } b > 0.$$

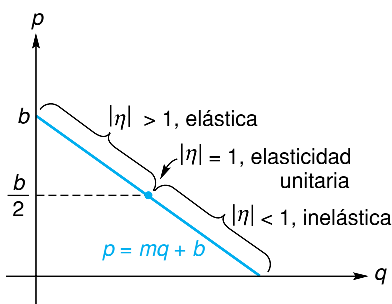


FIGURA 13.12 Elasticidad para demanda lineal.

(Véase la fig. 13.12.) Suponemos que $q > 0$; así, $p < b$. La elasticidad puntual de la demanda es

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{dp}{dq}} = \frac{\frac{p}{q}}{m} = \frac{p}{mq} = \frac{p}{p-b}.$$

Considerando $d\eta/dp$, demostraremos que η es una función decreciente de p. Por la regla del cociente,

$$\frac{d\eta}{dp} = \frac{(p-b)-p}{(p-b)^2} = -\frac{b}{(p-b)^2}.$$

Como $b > 0$ y $(p - b)^2 > 0$, entonces $d\eta/dp < 0$, por lo que η es una función decreciente de p; cuando p crece, η debe disminuir. Sin embargo, p varía entre 0 y b y en el punto medio del intervalo, $b/2$:

$$\eta = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{b}{2}-b} = \frac{\frac{b}{2}}{-\frac{b}{2}} = -1.$$

Por tanto, si $p < b/2$, entonces $\eta > -1$; si $p > b/2$, $\eta < -1$. Como debemos tener $\eta \leq 0$, podemos establecer esto de otra manera: cuando $p < b/2$, $|\eta| < 1$ y la demanda es inélastica; cuando $p = b/2$, $|\eta| = 1$ y la demanda tiene elasticidad unitaria; cuando $p > b/2$, $|\eta| > 1$ y la demanda es elástica. Esto muestra que la pendiente de una curva de demanda no es una medida de la elasticidad. La pendiente de la línea en la figura 13.12 es m en todas partes, pero la elasticidad varía con el punto de la recta.

Elasticidad e ingreso

Aquí, analizamos la relación entre la elasticidad y la tasa de cambio del ingreso.

Pasando a una situación diferente, podemos establecer cómo la elasticidad de la demanda afecta el cambio en el ingreso (ingreso marginal). Si $p = f(q)$ es una función de demanda de un fabricante, el ingreso total está dado por

$$r = pq.$$

Para encontrar el ingreso marginal, dr/dq, diferenciamos r usando la regla del producto:

$$\frac{dr}{dq} = p + q\frac{dp}{dq}. \tag{3}$$

Al factorizar el miembro derecho de la ecuación (3), tenemos

$$\frac{dr}{dq} = p\left(1 + \frac{q}{p}\frac{dp}{dq}\right).$$

Pero,

$$\frac{q}{p}\frac{dp}{dq} = \frac{\frac{dp}{dq}}{\frac{p}{q}} = \frac{1}{\eta}.$$

Por lo que,

$$\frac{dr}{dq} = p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right). \qquad (4)$$

Si la demanda es elástica, entonces $\eta < -1$, por lo que $1 + \frac{1}{\eta} > 0$. Si la demanda es inélastica, entonces $\eta > -1$, por lo que $1 + \frac{1}{\eta} < 0$. Supongamos que $p > 0$. De la ecuación (4) podemos concluir que $dr/dq > 0$ en los intervalos donde la demanda es elástica; por tanto, el ingreso total r es creciente ahí. Por otra parte, el ingreso marginal es negativo en el intervalo donde la demanda es inélastica; por tanto, el ingreso total es decreciente ahí.

Así, del análisis anterior concluimos que entre más unidades se vendan, el ingreso total de un fabricante crece si la demanda es elástica, pero disminuye si la demanda es inélastica. Esto es, si la demanda es elástica, un precio menor aumentará el ingreso, lo cual significa que un precio menor ocasionará un incremento suficientemente grande en la demanda como para hacer crecer el ingreso. Si la demanda es inélastica, un precio menor hará disminuir el ingreso. Para una elasticidad unitaria, un precio menor deja sin cambio al ingreso total.

Ejercicio 13.3

En los problemas del 1 al 14 encuentre la elasticidad puntual de las ecuaciones de demanda para los valores indicados de q o p y determine si la demanda es elástica, inelástica o si tiene elasticidad unitaria.

1. $p = 40 - 2q; \quad q = 5.$

2. $p = 12 - 0.03q; \quad q = 200.$

3. $p = \frac{3500}{q}; \quad q = 288.$

4. $p = \frac{1000}{q^2}; \quad q = 156.$

5. $p = \frac{500}{q + 2}; \quad q = 104.$

6. $p = \frac{800}{2q + 1}; \quad q = 24.$

7. $p = 150 - e^{q/100}; \quad q = 100.$

8. $p = 100e^{-q/200}; \quad q = 200.$

9. $q = 600 - 100p; \quad p = 3.$

10. $q = 100 - p; \quad p = 50.$

11. $q = \sqrt{2500 - p}; \quad p = 900.$

12. $q = \sqrt{2500 - p^2}; \quad p = 20.$

13. $q = \frac{(p - 100)^2}{2}; \quad p = 20.$

14. $q = p^2 - 60p + 898; \quad p = 10.$

15. Para la ecuación de demanda lineal $p = 13 - 0.05q$, verifique que la demanda es elástica cuando $p = 10$, inelástica cuando $p = 3$ y que tiene elasticidad unitaria cuando $p = 6.50$.

16. ¿Para qué valor (o valores) de q las siguientes ecuaciones de demanda tienen elasticidad unitaria?

a. $p = 26 - 0.10q$.
b. $p = 1200 - q^2$.

17. La ecuación de demanda para un producto es

$$q = 500 - 40p + p^2,$$

donde p es el precio por unidad (en dólares) y q la cantidad de unidades demandadas (en miles). Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 15$. Si este precio de 15 se incrementa en $\frac{1}{2}\%$, ¿cuál es el cambio aproximado en la demanda?

18. La ecuación de la demanda para un cierto producto es

$$q = \sqrt{2500 - p^2},$$

donde p está en dólares. Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 30$ y use este valor para calcular el cambio porcentual aproximado de la demanda, si el precio de \$30 se baja a \$28.50.

19. Para la ecuación de demanda $p = 500 - 2q$, verifique que la demanda es elástica y el ingreso total es creciente para $0 < q < 125$. Verifique que la deman-

da sea inelástica y el ingreso total sea decreciente para $125 < q < 250$.

20. Verifique que $\frac{dr}{dq} = p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right)$ si $p = 40 - 2q$.

21. Repita el problema 20 para $p = \frac{1000}{q^2}$.

22. Suponga que $p = mq + b$ es una ecuación de demanda lineal donde $m \neq 0$ y $b > 0$.

a. Demuestre que $\lim_{p \to b^-} \eta = -\infty$.

b. Demuestre que $\eta = 0$ cuando $q = 0$.

23. La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = \frac{200}{\sqrt{6000 + 10q^2}}.$$

a. Verifique que $q = 20$ cuando $p = 2$.

b. Determine la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 2$. ¿Es la demanda elástica, inelástica o tiene elasticidad unitaria en este punto?

c. Si el precio cuando $p = 2$ está disminuyendo en 2%, ¿cuál es el número aproximado de unidades en las que la demanda cambia?

d. Si el precio cuando $p = 2$ está disminuyendo en 2%, ¿el ingreso total crecerá, disminuirá o permanecerá constante? Justifique su respuesta.

24. Dada la ecuación de demanda $q^2(1 + p)^2 = p$, determine la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 9$.

25. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = \frac{60}{p} + \ln(65 - p^3).$$

a. Determine la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 4$, y clasifique la demanda como elástica, inelástica o de elasticidad unitaria a este nivel de precio.

b. Si el precio disminuye el 2% (de \$4.00 a \$3.92), use la respuesta a la parte (a) para estimar el cambio porcentual correspondiente en la cantidad vendida.

c. ¿Resultarán los cambios de la parte (b) en un incremento o en una disminución en el ingreso? Explique su respuesta.

26. La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = 50(201 - q)^{0.001\sqrt{q+25}}.$$

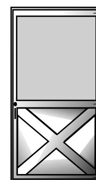
a. Demuestre que $dp/dq = -0.75$ cuando se demandan 200 unidades. Use diferenciación logarítmica.

b. Con el resultado de la parte (a), determine la elasticidad puntual de la demanda cuando se demandan 200 unidades. A este nivel, ¿es la demanda elástica, inelástica o de elasticidad unitaria?

c. Use el resultado de la (b) para estimar el precio por unidad si la demanda disminuye de 200 a 188 unidades.

d. Si la demanda actual es de 200 unidades, ¿debe el fabricante aumentar o disminuir el precio para incrementar su ingreso? (Justifique su respuesta.)

27. Un fabricante de puertas de aluminio puede vender actualmente 500 puertas por semana a un precio de \$80 cada una. Si el precio se baja a \$75 cada una, podrían venderse 50 puertas adicionales por semana. Estime la elasticidad actual de la demanda para las puertas y también el valor actual de la función de ingreso marginal del fabricante.



28. Dada la ecuación de demanda

$$p = 1000 - q^2,$$

donde $5 \leq q \leq 30$, ¿para qué valor de q es $|\eta|$ un máximo? ¿Para qué valor es un mínimo?

29. Repita el problema 28 para

$$p = \frac{200}{q + 5}$$

tal que $5 \leq q \leq 95$,

OBJETIVO Aproximar las raíces reales de una ecuación por medio del uso del cálculo. El método mostrado es adecuado para calculadoras.

13.4 Método de Newton

Es muy fácil resolver ecuaciones de la forma $f(x) = 0$, cuando f es una función lineal o cuadrática. Por ejemplo, podemos resolver $x^2 + 3x - 2 = 0$, por medio de la fórmula cuadrática. Sin embargo, si $f(x)$ tiene un grado mayor que 2 (o si no es un polinomio), puede resultar difícil o incluso imposible encontrar soluciones (o raíces) de $f(x) = 0$, por los métodos usuales. Es por ello que recurrimos a soluciones aproximadas que pueden obtenerse de varias maneras en forma eficiente. Por ejemplo, puede utilizarse una calculadora gráfica para estimar las raíces reales de $f(x) = 0$. En esta sección aprenderemos cómo usar con tal fin la derivada (siempre que f sea diferenciable). El procedimiento que desarrollaremos, llamado *método de Newton*, es muy apropiado para usarse con una calculadora o computadora.

El método de Newton requiere que se haga una estimación inicial para una raíz de $f(x) = 0$. Una manera de obtener este valor inicial aproximado es haciendo un bosquejo de la gráfica de $y = f(x)$ y estimando la raíz en la gráfica. Un punto en la gráfica donde $y = 0$, es una intersección x y el valor x de este punto es una raíz de $f(x) = 0$. Otra manera de localizar una raíz se basa en el hecho siguiente:

> Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz entre a y b.

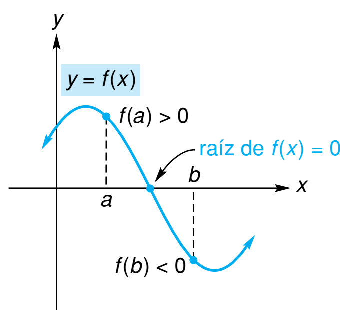


FIGURA 13.13 Raíz de $f(x) = 0$ entre a y b, en donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos.

La figura 13.13 muestra esta situación. La intersección x entre a y b corresponde a una raíz de $f(x) = 0$, y podemos usar a a o a b para aproximar esta raíz.

Supongamos que tenemos un valor estimado (pero incorrecto) para una raíz, veremos cómo obtener una mejor aproximación de este valor. En la figura 13.14 vemos que $f(r) = 0$, por lo que r es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Supongamos que x_1 es una aproximación inicial a r (una que sea cercana a r). Observe que la recta tangente a la curva en $(x_1, f(x_1))$ interseca al eje x en el punto $(x_2, 0)$, y que x_2 es una mejor aproximación a r que x_1.

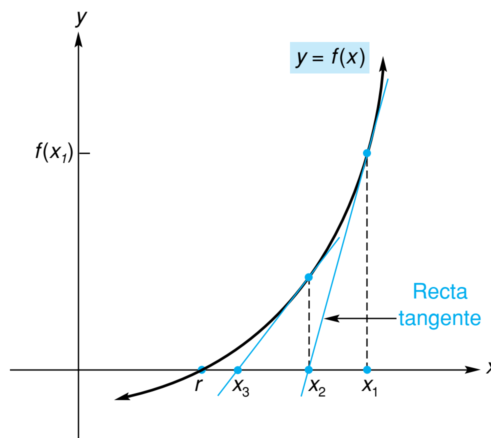


FIGURA 13.14 Mejora en la aproximación de la raíz por medio de la recta tangente.

Podemos encontrar x_2 a partir de la ecuación de la recta tangente. La pendiente de la recta tangente es $f'(x_1)$, por lo que su ecuación es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1). \tag{1}$$

Como $(x_2, 0)$ está en la recta tangente, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (1). Esto da

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2 - x_1 \qquad \text{(si } f'(x_1) \neq 0\text{)}.$$

Por lo que,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{2}$$

Para obtener una mejor aproximación a r, efectuamos de nuevo el procedimiento ya descrito, pero esta vez usamos x_2 como punto de partida. Esto da la aproximación

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \quad (3)$$

Repitiendo (o *iterando*) este proceso varias veces, esperamos obtener mejores aproximaciones en el sentido de que la sucesión de valores

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

se aproxime a r. En la práctica, terminamos el proceso cuando alcanzamos un grado de exactitud deseado.

Si analiza las ecuaciones (2) y (3), puede usted ver cómo x_2 se obtiene de x_1 y cómo x_3 se obtiene de x_2. En general, x_{n+1} se obtiene de x_n por medio de la siguiente fórmula general, llamada **método de Newton:**

Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad (4)$$

Una fórmula, como la ecuación (4), que indica cómo en una sucesión se obtiene un número de aquél precedente, se llama **fórmula recursiva** o *ecuación iterativa*.

En el caso de que una raíz caiga entre a y b, y $f(a)$ y $f(b)$ estén igualmente cercanas a cero, elegimos a cualquiera de a o b como la primera aproximación.

Principios en práctica 1

Determinación de una raíz por medio del método de Newton

Si la utilidad total (en dólares) de la venta de x televisores es $P(x) = 20x - 0.01x^2 - 850 + 3\text{In}(x)$, utilice el método de Newton para aproximar las cantidades de equilibrio. (*Nota*: existen dos cantidades de equilibrio: una está entre 10 y 50, y la otra está entre 1900 y 2000.) Proporcione el valor de x al en-

EJEMPLO 1 Determinación de una raíz por el método de Newton

Estimar la raíz de $x^4 - 4x + 1 = 0$, *que se encuentra entre* 0 *y* 1. *Continuar el proceso de aproximación hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de* 0.0001.

Solución: haciendo $f(x) = x^4 - 4x + 1$, tenemos

$$f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$$

y

$$f(1) = 1 - 4 + 1 = -2.$$

(Note el cambio de signo). Como $f(0)$ está más cercana a 0 que $f(1)$, escogemos a 0 como primera aproximación, x_1. Ahora,

$$f'(x) = 4x^3 - 4,$$

de modo que

$$f(x_n) = x_n^4 - 4x_n + 1 \qquad \text{y} \qquad f'(x_n) = 4x_n^3 - 4.$$

Sustituyendo en la ecuación (4) se obtiene la fórmula recursiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 4x_n + 1}{4x_n^3 - 4}$$

$$= \frac{4x_n^4 - 4x_n - x_n^4 + 4x_n - 1}{4x_n^3 - 4},$$

así

$$x_{n+1} = \frac{3x_n^4 - 1}{4x_n^3 - 4}. \quad (5)$$

Como $x_1 = 0$, al hacer $n = 1$ en la ecuación (5) resulta

$$x_2 = \frac{3x_1^4 - 1}{4x_1^3 - 4} = \frac{3(0)^4 - 1}{4(0)^3 - 4} = 0.25.$$

Al hacer $n = 2$, en la ecuación (5) resulta

$$x_3 = \frac{3x_2^4 - 1}{4x_2^3 - 4} = \frac{3(0.25)^4 - 1}{4(0.25)^3 - 4} \approx 0.25099.$$

Al hacer $n = 3$, en la ecuación (5) resulta

$$x_4 = \frac{3x_3^4 - 1}{4x_3^3 - 4} = \frac{3(0.25099)^4 - 1}{4(0.25099)^3 - 4} \approx 0.25099.$$

TABLA 13.1

n	x_n	x_{n+1}
1	0.00000	0.25000
2	0.25000	0.25099
3	0.25099	0.25099

Los datos obtenidos hasta ahora, se muestran en la tabla 13.1. Como los valores de x_3 y x_4 difieren en menos de 0.0001, consideramos que la raíz es igual a 0.25099 (esto es, x_4).

■ **EJEMPLO 2 Determinación de una raíz por el método de Newton**

Estimar la raíz de $x^3 = 3x - 1$, *que se encuentra entre* -1 *y* -2. *Continuar el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de* 0.0001.

Solución: haciendo $f(x) = x^3 - 3x + 1$ [necesitamos tener la forma $f(x) = 0$], encontramos que

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$$

y

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -1.$$

(Note el cambio en el signo). Como $f(-2)$ está más cercana a cero que $f(-1)$, escogemos a -2 como nuestra primera aproximación, x_1. Ahora,

$$f'(x) = 3x^2 - 3,$$

de modo que

$$f(x_n) = x_n^3 - 3x_n + 1 \quad \text{y} \quad f'(x_n) = 3x_n^2 - 3.$$

Sustituyendo en la ecuación 4, obtenemos la fórmula recursiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 1}{3x_n^2 - 3},$$

de modo que

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 - 3}. \qquad (6)$$

Como $x_1 = -2$, al hacer $n = 1$ en la ecuación (6) resulta

$$x_2 = \frac{2x_1^3 - 1}{3x_1^2 - 3} = \frac{2(-2)^3 - 1}{3(-2)^2 - 3} \approx -1.88889.$$

TABLA 13.2

n	x_n	x_{n+1}
1	−2.00000	−1.88889
2	−1.88889	−1.87945
3	−1.87945	−1.87939

Continuando de esta manera obtenemos la tabla 13.2. Como los valores de x_3 y x_4 difieren en 0.00006, que es menor a 0.0001, entonces consideramos que la raíz es -1.87939 (esto es, x_4).

La situación en la que x_1 da a la derivada de 0 se presenta en los problemas 2 y 8 del ejercicio 13.4.

Si su elección para la aproximación inicial x_1 da a la derivada un valor de 0, escoja un número diferente que sea cercano a la raíz deseada. Una gráfica de f puede ser útil en esta situación. Por último, debemos mencionar que hay casos en que la sucesión de las aproximaciones no tienden hacia la raíz. Un análisis de tales casos está más allá del alcance de este libro.

Tecnología

La figura 13.15 da un programa corto del método de Newton para la calculadora TI-83. Antes de ejecutar el programa, la primera aproximación a la raíz de $f(x) = 0$ se almacena como X y $f(x)$ y $f'(x)$ se almacenan como Y_1 y Y_2, respectivamente.

Al ser ejecutado, el programa calcula la primera iteración y se detiene. Las iteraciones sucesivas se obtienen oprimiendo la tecla ENTER. La figura 13.16 muestra las iteraciones para el problema en el ejemplo 2.

```
PROGRAM:NEWTON
:Lbl A
:X-Y1(X)/Y2(X)
:Ans→X
:Disp X
:Pause
:Goto A
```

FIGURA 13.15 Programa de calculadora para el método de Newton.

```
-2→X
                 -2
prgmNEWTON
       -1.888888889
       -1.879451567
       -1.879385245
```

FIGURA 13.16 Iteraciones para el problema del ejemplo 2.

Ejercicio 13.4

En los problemas del 1 al 10 utilice el método de Newton para estimar la raíz indicada de la ecuación dada. Continúe el procedimiento hasta que la diferencia de dos aproximaciones sucesivas sea menor que 0.0001.

1. $x^3 - 4x + 1 = 0$; raíz entre 0 y 1.

2. $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$; raíz entre 0 y 1.

3. $x^3 - x - 1 = 0$; raíz entre 1 y 2.

4. $x^3 - 9x + 6 = 0$; raíz entre 2 y 3.

5. $x^3 + x + 16 = 0$; raíz entre -3 y -2.

6. $x^3 = 2x + 5$; raíz entre 2 y 3.

7. $x^4 = 3x - 1$; raíz entre 0 y 1.

8. $x^4 + 4x - 1 = 0$; raíz entre -2 y -1.

9. $x^4 - 2x^3 + x^2 - 3 = 0$; raíz entre 1 y 2.

10. $x^4 - x^3 + x - 2 = 0$; raíz entre 1 y 2.

11. Calcule con tres decimales la raíz cúbica de 71. [*Sugerencia:* muestre que el problema es equivalente a encontrar una raíz de $f(x) = x^3 - 71 = 0$. Escoja 4 como aproximación inicial. Continúe el proceso hasta que dos aproximaciones sucesivas, redondeadas a tres decimales, sean iguales.]

12. Estime $\sqrt[5]{49}$ con dos decimales. Use 2 como aproximación inicial.

13. Encuentre todas las raíces reales de la ecuación $e^x = x + 5$, con dos decimales. [*Sugerencia:* con un esbozo de las gráficas de $y = e^x$ y $y = x + 5$, debe ser claro cuántas soluciones existen. Use valores enteros cercanos para sus estimaciones iniciales.]

14. Encuentre, con tres decimales, todas las soluciones reales de la ecuación $\ln x = 5 - x$.

15. Cantidad del punto de equilibrio El costo c de fabricar q toneladas de un producto está dado por

$$c = 250 + 2q - 0.1q^3,$$

y el ingreso obtenido al vender las q toneladas está dado por

$$r = 3q.$$

Aproxime, con dos decimales de precisión, la cantidad del punto de equilibrio. [*Sugerencia:* determine una raíz de $r - c = 0$ escogiendo al 13 como su aproximación inicial.]

16. Cantidad del punto de equilibrio El costo total de fabricar q cientos de lápices es c dólares, donde

$$c = 40 + 3q + \frac{q^2}{1000} + \frac{1}{q}.$$

El ciento de lápices se vende en \$7.

a. Demuestre que la cantidad del punto de equilibrio es una solución de la ecuación

$$f(q) = \frac{q^3}{1000} - 4q^2 + 40q + 1 = 0.$$

b. Utilice el método de Newton para estimar la solución de $f(q) = 0$, donde $f(q)$ está dada en la parte (a). Use 10 como aproximación inicial y dé su respuesta con dos decimales.

17. Equilibrio Dada la ecuación de oferta $p = 2q + 5$ y la ecuación de demanda $p = \dfrac{100}{q^2 + 1}$, use el método de Newton para estimar la cantidad de equilibrio del mercado. Proporcione su respuesta con tres decimales de precisión.

18. Equilibrio Dada la ecuación de oferta

$$p = 0.1q^3 + 0.6q + 2$$

y la ecuación de demanda $p = 30 - q$, use el método de Newton para estimar la cantidad de equilibrio del mercado y encuentre el correspondiente precio de equilibrio. Tome 5 como aproximación inicial para el valor requerido de q y dé su respuesta con dos decimales de precisión.

19. Use el método de Newton para estimar (con dos decimales) un valor crítico de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 5x + 1$$

en el intervalo [3, 4].

13.5 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 13.1 tamaño económico de lote

Sección 13.2 diferencial dy, dx

Sección 13.3 elasticidad puntual de la demanda elástica inelástica elasticidad unitaria

Sección 13.4 método de Newton

Resumen

Desde un punto de vista práctico, la fuerza del cálculo reside en que nos permite maximizar o minimizar cantidades. Por ejemplo, en el área de la economía podemos maximizar la utilidad o minimizar el costo. Algunas relaciones importantes que se usan en problemas económicos son las siguientes:

$$\bar{c} = \frac{c}{q}, \quad \text{costo promedio por unidad} = \frac{\text{costo total}}{\text{unidad}},$$

$$r = pq, \quad \text{ingreso} = (\text{precio})(\text{cantidad}),$$

$$P = r - c, \quad \text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}.$$

Si $y = f(x)$ es una función diferenciable de x, definimos la diferencial dy como

$$dy = f'(x)\,dx,$$

donde dx (o Δx) es un cambio en x y puede ser cualquier número real. Si dx es cercana a cero, entonces dy es una aproximación a Δy que es un cambio en y:

$$\Delta y \approx dy.$$

Además, dy puede emplearse para estimar el valor de una función. Usamos la relación

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy.$$

Aquí, $f(x + dx)$ es el valor por estimar; x y dx se escogen de manera que $f(x)$ sea fácil de calcular y dx sea pequeña.

Si una ecuación define a y como una función de x, entonces la derivada de x con respecto a y está dada por

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \qquad dy/dx \neq 0.$$

La elasticidad puntual de la demanda es un número que mide cómo la demanda del consumidor es afectada por el cambio en el precio. Está dada por

$$\eta = \frac{p/q}{dp/dq},$$

donde p es el precio por unidad al que se demandan q unidades. Las tres categorías de elasticidad son:

$|\eta| > 1$, demanda elástica,

$|\eta| = 1$, elasticidad unitaria,

$|\eta| < 1$, demanda inelástica.

Dicho de manera sencilla, para un cambio porcentual dado en el precio, habrá un cambio porcentual mayor en la cantidad demandada, si la demanda es elástica, un cambio porcentual menor si la demanda es inelástica y un cambio porcentual igual si la demanda tiene elasticidad unitaria.

La relación entre elasticidad y la razón de cambio del ingreso está dada por

$$\frac{dr}{dq} = p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right).$$

El método de Newton es el nombre dado a la fórmula siguiente, que se usa para estimar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, siempre que f sea diferenciable:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

1. **Maximización de la producción** Un fabricante determina que m empleados en cierta línea de producción producen q unidades por mes, donde

$$q = 80m^2 - 0.1m^4.$$

Para obtener una producción mensual máxima, ¿cuántos empleados deben asignarse a la línea de producción?

2. **Ingreso** La función de demanda para el producto de un fabricante está dada por $p = 100e^{-0.1q}$. ¿Para qué valor de q maximiza el fabricante su ingreso total?

3. **Ingreso** La función de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = \sqrt{600 - q}.$$

Si el monopolista quiere producir por lo menos 100 unidades pero no más de 300, ¿cuántas unidades debe producir para maximizar el ingreso total?

4. **Costo promedio** Si $c = 0.01q^2 + 5q + 100$ es una función de costo, encuentre la función de costo promedio. ¿A qué nivel de producción q presenta un costo promedio mínimo?

5. **Utilidad** La función de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = 400 - 2q,$$

y el costo promedio por unidad para producir q unidades es

$$\bar{c} = q + 160 + \frac{2000}{q},$$

donde p y $\bar{c}$ están en dólares por unidad. Encuentre la utilidad máxima que el monopolista puede lograr.

6. **Diseño de un recipiente** Una caja rectangular va a fabricarse recortando cuadrados iguales de cada esquina de una lámina de cartón de 10 × 16 pulgadas y doblando luego los lados. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo?

7. **Cercado** Un terreno rectangular va a cercarse y dividirse en tres partes iguales por dos cercas paralelas a uno de los lados. Si se va a usar un total de 800 pies de cerca, encuentre las dimensiones del terreno para que su área sea máxima.

8. **Diseño de un cartel** Un cartel rectangular con un área de 500 plg^2 debe tener un margen de 4 pulgadas a cada lado y en la parte inferior, y un margen de 6 pulgadas en la parte superior. El resto del cartel es para material impreso. Encuentre las dimensiones de modo que el área para la zona sea máxima.

9. **Costo** Una empresa fabrica estantes para computadoras personales. Para cierto modelo, el costo total c (en miles de dólares) cuando se producen q *cientos* de estantes, está dado por

$$c = 2q^3 - 9q^2 + 12q + 20.$$

a. La empresa tiene actualmente capacidad para producir entre 75 y 600 (inclusive) estantes por semana. Determine el número de estantes que debe producir por semana para minimizar el costo total y encuentre el correspondiente costo promedio por estante.

b. Suponga que deben producirse entre 300 y 600 estantes. ¿Cuántos deberían producirse ahora para minimizar el costo total?

10. **Bacterias** En un laboratorio se aplica un agente antibacterial experimental a una población de 100 bacterias. Los datos indican que el número N de bacterias t horas después de dicha aplicación, está dado por

$$N = \frac{14{,}400 + 120t + 100t^2}{144 + t^2}.$$

¿Para qué valor de t se presenta el número máximo de bacterias en la población? ¿Cuál es este número máximo?

En los problemas 11 y 12 determine las diferenciales de las funciones en términos de x y dx.

11. $f(x) = x^2 \ln(x + 5)$.

12. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x - 7}$.

13. Si $p = q^2 + 8q$, use diferenciales para estimar Δp si q cambia de 4 a 4.02.

En los problemas 14 y 15 aproxime las expresiones usando diferenciales.

14. $e^{-0.01}$.

15. $\sqrt{25.5}$.

16. Si $x = 4y^2 + 7y - 3$, encuentre dy/dx.

Para las ecuaciones de demanda en los problemas del 17 al 19 determine si la demanda es elástica, inelástica o si tiene elasticidad unitaria para los valores indicados de q.

17. $p = \dfrac{500}{q}$; $q = 200$.

18. $p = 900 - q^2$; $q = 10$.

19. $p = 18 - 0.02q$; $q = 600$.

20. La ecuación de demanda para un producto es

$$p = 30 - \sqrt{q}.$$

a. Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 10$.

b. Verifique que la demanda sea inelástica si $0 < p < 10$.

21. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = \sqrt{2500 - p^2}.$$

Encuentre la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 30$. Si el precio de 30 disminuye $\frac{2}{3}\%$, ¿cuál es el cambio aproximado en la demanda?

22. La ecuación de demanda para un producto es

$$q = \sqrt{100 - p}, \qquad \text{donde } 0 < p < 100.$$

a. Encuentre todos los precios que corresponden a una demanda elástica.

b. Calcule la elasticidad puntual de la demanda cuando $p = 40$. Use su respuesta para estimar el incremento o disminución porcentual en la demanda cuando el precio se incrementa en 5% para $p = 42$.

23. La ecuación $x^3 - 2x - 2 = 0$ tiene una raíz entre 1 y 2. Use el método de Newton para estimar la raíz. Continúe el procedimiento de aproximación hasta que la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas sea menor a 0.0001. Redondee su respuesta a cuatro decimales.

24. Encuentre, con tres decimales de precisión, todas las soluciones reales de la ecuación $e^x = 3x$.

Aplicación práctica
Cantidad económica de pedido



En administración de inventarios, la cantidad económica de pedido (u orden) es el tamaño más eficiente, en términos de costo, para abastecer nuevamente los pedidos. A fin de determinar este tamaño óptimo, necesitamos tener una idea de cómo evolucionan las disminuciones y el reabastecimiento, y cuál es el costo resultante.

A continuación están las hipótesis representativas:

1. El inventario está disminuyendo, debido a las compras, a una tasa constante D, que se mide en unidades por año.
2. Todos los pedidos de reabastecimiento son del mismo tamaño, y cada uno llega en un envío, justo como las existencias están saliendo.
3. Además de los costos por artículo, cada pedido también incluye un costo fijo por orden, F.
4. Cada unidad en existencias tiene un valor constante, V, medido en dólares.
5. El costo de almacenar el inventario es una fracción fija, R, del valor total actual del inventario. Este factor de costo de acarreo se mide en dólares por dólar por año.

Las hipótesis 1 y 2 dan origen a una gráfica del inventario con respecto al tiempo como la que se observa en la figura 13.17.

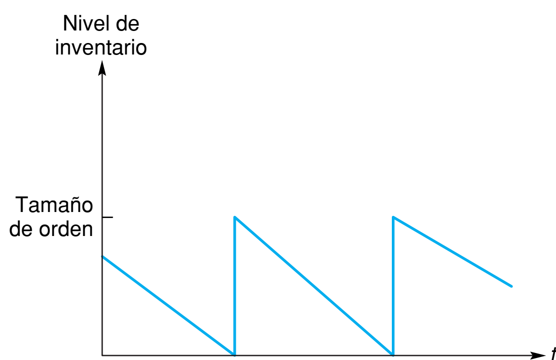


FIGURA 13.17 Inventario a lo largo del tiempo.

Ahora, deseamos minimizar el costo, en dólares por año, de administrar el inventario que se muestra en la figura 13.17. Si el reabastecimiento se pide en lotes de q unidades cada uno, entonces existen $\frac{D}{q}$ pedidos por año, para un costo por pedidos anual de $\frac{FD}{q}$. (El gasto anual debido al costo por artículo, no puede ajustarse por el cambio del tamaño del pedido, de modo que este costo es ignorado en nuestros cálculos, es decir, que no hay descuento por volumen.) Con un nivel de inventario promedio de $\frac{q}{2}$, el costo de acarreo anual es $\frac{RVq}{2}$. Entonces, el costo anual relacionado con el inventario, C, es la suma del costo de los pedidos y el costo de acarreo:

$$C = \frac{FD}{q} + \frac{RVq}{2}.$$

Esta cantidad crece, tanto cuando q se hace grande como cuando q se aproxima a cero. De modo que si existe un único punto en donde $\frac{dC}{dq}$ es igual a cero, éste será un mínimo de C. Encontrémoslo.

$$\frac{dC}{dq} = -\frac{FD}{q^2} + \frac{RV}{2} = 0,$$

$$q^2 = \frac{2FD}{RV},$$

$$q = \sqrt{\frac{2FD}{RV}}.$$

Esta fórmula se llama la fórmula del tamaño de lote de Wilson, en honor de un consultor industrial quien popularizó su uso. Si sustituimos $F = \$10$ por orden, $D = 1500$ unidades por año, $R = \$0.10$ dólares por dólar por año y $V = \$10$, entonces q se obtiene como

$$q = \sqrt{\frac{2(10)(1500)}{(0.10)(10)}} \approx 173.2.$$

El tamaño de pedido más eficiente en costo es de 173 unidades.

Las variaciones de la fórmula de Wilson hacen más flexibles una o más de las cinco hipótesis en las que está basada. Una hipótesis que puede ser más flexible es la 5. Suponga que el costo de acarreo como un porcentaje del valor del inventario se eleva cuando el inventario es bajo (piense en un gran almacén que se queda casi vacío). Modelaremos esto reemplazando R con $R(1 + ke^{-sq})$. R es el costo de acarreo anual por

dólar para niveles de inventario grandes, y el término ke^{-sq} $(k, s > 0)$ eleva el costo para niveles bajos de inventario. El costo anual total del costo del inventario ahora se transforma en

$$C = \frac{FD}{q} + \frac{RVq(1 + ke^{-sq})}{2}.$$

Nuevamente, deseamos minimizar esta cantidad, y otra vez C se hace grande cuando q se hace grande y cuando q se aproxima a cero. El mínimo es donde

$$\frac{dC}{dq} = -\frac{FD}{q^2} + \frac{RV(1 + ke^{-sq} - ksqe^{-sq})}{2} = 0.$$

Suponga que $k = 1$, $s = \frac{\ln 2}{1000} \approx 0.000693$. Entonces el costo de acarreo por dólar es el doble para un inventario pequeño que para uno grande, y se encuentra en medio de los dos costos en un nivel de inventario de 1000. Si conservamos F, D, R y V, igual que antes, y utilizamos una calculadora gráfica u otra técnica de solución numérica, encontramos que $\frac{dC}{dq} = 0$ cuando $q \approx 127.9$. El tamaño óptimo de pedido es de 128 unidades. Observe que aunque la hipótesis ahora incluye economía de escala, el costo de acarreo es mayor en todos los niveles de inventario y ha conducido a una cantidad económica de orden más pequeña.

Ejercicios

1. El ejemplo 5 de la sección 13.1 es un problema de tamaño de lote que implica periodos de producción en lugar de pedidos a un proveedor. ¿Qué papel desempeña la cantidad F, el costo fijo por pedido? ¿Qué papel desempeña V, el valor unitario? ¿Puede utilizarse la fórmula de Wilson en el ejemplo 5?

2. Utilice la fórmula de Wilson de tamaño de lote para calcular la cantidad económica de pedido para un artículo que tiene un valor de \$36.50, cuesta 5% de su valor almacenarlo por año, y es comprado de un proveedor que cobra \$25 por procesar cada pedido.

3. Suponga que las hipótesis 1, 3, 4 y 5 se mantienen, pero la 2 se modifica: un administrador nunca permite que un inventario caiga al nivel cero, en lugar de eso, mantiene un margen de seguridad de cierto número de unidades. ¿Qué diferencia hace esto en los cálculos de la cantidad económica de pedido?

4. ¿Qué otras hipótesis, además de la 2 y 5, podrían flexibilizarse de manera práctica? Explique su respuesta.



CAPÍTULO 14

Integración

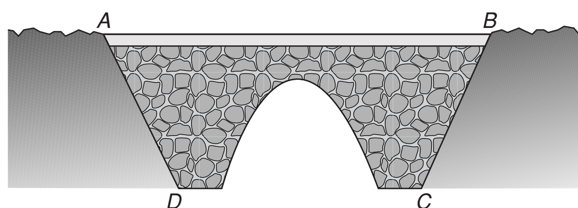
Quienquiera que haya tenido un negocio, conoce la necesidad de estimar costos con precisión. Cuando los trabajos se contratan de manera individual, la determinación de cuánto cuesta el trabajo, por lo general es el primer paso para decidir cuánto pedir.

Por ejemplo, un pintor debe determinar cuánta pintura utilizará en un trabajo. Como un galón de pintura cubrirá cierto número de pies cuadrados, la clave es determinar el área de la superficie que será pintada. Por lo general, esto sólo requiere de aritmética simple —las paredes y los techos son rectangulares, de modo que el área total es una suma de productos de base por altura.

Pero no todas las áreas son tan sencillas de calcular. Por ejemplo, suponga que el puente que se muestra abajo debe pulirse para remover el hollín. ¿Cómo calcularía el contratista, el número de pies cuadrados del área de la pared vertical de cada lado del puente?

Quizá el área podría ser estimada como tres cuarto del área del trapecio formado por los puntos A, B, C y D. Pero un cálculo más preciso, podría ser más adecuado si la cotización fuese para una docena de puentes del mismo tamaño (a lo largo de una vía de tren); esto requeriría un enfoque más refinado.

Si la forma del arco del puente puede describirse en forma matemática por medio de una función, el contratista podría utilizar el método introducido en este capítulo: integración. La integración tiene muchas aplicaciones, la más simple de las cuales es la determinación de áreas de regiones acotadas por curvas. Otras aplicaciones incluyen el cálculo de la deflexión total de una viga debido a una fuerza de flexión, el cálculo de la distancia recorrida bajo el mar por un submarino y el cálculo del pago de electricidad por una compañía que consume energía a diferentes tasas en el transcurso de un mes.



Los capítulos 10 al 13 trataron el cálculo diferencial. Diferenciamos una función y obtuvimos otra función que era su derivada. El *cálculo integral* se ocupa del proceso inverso. Dada la derivada de una función se debe encontrar la función original. La necesidad de hacer esto surge de manera natural. Por ejemplo, podemos tener una función de ingreso marginal y querer encontrar la función de ingreso a partir de ella. El cálculo integral también involucra un concepto de límite que nos permite determinar el límite de un tipo especial de suma, cuando el número de términos en la suma tiende a infinito. ¡Ésta es la verdadera fuerza del cálculo integral! Con él podemos calcular el área de una región que no pueda encontrarse con algún otro método conveniente.

OBJETIVO Definir la antiderivada y la integral indefinida, y aplicar fórmulas básicas de integración.

14.1 La integral indefinida

Dada una función f, si F es una función tal que

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

entonces F se llama *antiderivada* de f. Así,

una antiderivada de f es simplemente una función cuya derivada es f.

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (1) por la diferencial dx resulta $F'(x)dx = f(x)dx$. Sin embargo, como $F'(x)dx$ es la diferencial de F, se tiene que $dF = f(x)dx$. De aquí que podemos considerar una antiderivada de f como una función cuya diferencial es $f(x)dx$.

Definición

Una ***antiderivada*** de una función f es una función F tal que

$$F'(x) = f(x),$$

o en forma equivalente, en notación diferencial,

$$dF = f(x)\,dx.$$

Por ejemplo, como la derivada de x^2 es $2x$, x^2 es una antiderivada de $2x$. Sin embargo, no es la única antiderivada de $2x$, ya que

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}(x^2 - 5) = 2x,$$

tanto $x^2 + 1$ como $x^2 - 5$ también son antiderivadas de $2x$. De hecho, es claro que como la derivada de una constante es cero, $x^2 + C$ es también una antiderivada de $2x$ para *cualquier* constante C. Así, $2x$ tiene un número infinito de antiderivadas. Lo más importante, es que *todas* las antiderivadas de $2x$ deben ser funciones de la forma $x^2 + C$, debido al siguiente hecho:

> Dos antiderivadas cualesquiera de una función difieren sólo en una constante.

Como $x^2 + C$ describe todas las antiderivadas de $2x$, podemos referirnos a ella como la *antiderivada más general* de $2x$, denotada por $\int 2x\,dx$, que se lee "*integral indefinida* de $2x$ con respecto a x". Así, escribimos

$$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

El símbolo $\int$ se llama **símbolo de integración,** $2x$ es el **integrando** y C la **constante de integración.** La dx es parte de la notación integral e indica la variable implicada. Aquí, x es la **variable de integración.**

En forma más general, la **integral indefinida** de cualquier función f con respecto a x se escribe $\int f(x)\,dx$ y denota la antiderivada más general de f. Como todas las antiderivadas de f difieren sólo en una constante, si F es cualquier antiderivada de f, entonces

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \text{ donde } C \text{ es una constante.}$$

Integrar f significa encontrar $\int f(x)\,dx$. En resumen,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{si y sólo si} \quad F'(x) = f(x).$$

Principios en práctica 1
Determinación de una integral indefinida

Si el costo marginal es $f(q) = 28.3$, encuentre $\int 28.3\,dq$, que proporciona la forma de la función de costo.

EJEMPLO 1 Determinación de una integral indefinida

Encontrar $\int 5\,dx$.

Solución:

Estrategia: primero debemos encontrar (tal vez una palabra más apropiada sería "conjeturar") una función cuya derivada sea 5. Luego añadimos la constante de integración.

Como sabemos que la derivada de $5x$ es 5, $5x$ es una antiderivada de 5. Por tanto,

$$\int 5\,dx = 5x + C.$$



Advertencia Es **incorrecto** escribir

$$\int 5\,dx = 5x.$$

No olvide la constante de integración.

Usando las fórmulas de diferenciación vistas en los capítulos 10 y 11, hemos compilado una lista de fórmulas básicas de integración en la tabla 14.1. Estas fórmulas son fáciles de verificar. Por ejemplo, la fórmula 2 es cierta porque la derivada de $x^{n+1}/(n+1)$ es x^n para $n \neq -1$ (se debe tener $n \neq -1$ porque el denominador es 0 cuando $n = -1$). La fórmula 2 establece que la integral indefinida de una potencia de x (excepto x^{-1}) se obtiene incrementando el exponente de x en una unidad, al dividir esto entre el nuevo exponente y sumándole la constante de integración. La integral indefinida de x^{-1} se analizará en la sección 14.3.

TABLA 14.1 Fórmulas básicas de integración

1. $\int k\,dx = kx + C$, k es una constante.
2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$.
3. $\int e^x\,dx = e^x + C$.
4. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, k es una constante.
5. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

Para verificar la fórmula 4, debemos comprobar que la derivada de $k\int f(x)\,dx$ es $kf(x)$. Como la derivada de $k\int f(x)\,dx$ es simplemente k veces la derivada de $\int f(x)\,dx$, que es $f(x)$, la fórmula 4 queda verificada. El lector debe verificar las otras fórmulas. La fórmula 5 puede extenderse a cualquier número de sumas o diferencias.

EJEMPLO 2 Integrales indefinidas de una constante y de una potencia de *x*

a. *Encontrar* $\int 1\,dx$.

Solución: por la fórmula 1 con $k = 1$,

$$\int 1\,dx = 1x + C = x + C.$$

Usualmente escribimos $\int 1\,dx$ como $\int dx$. Por lo que, $\int dx = x + C$.

b. *Encontrar* $\int x^5\,dx$.

Solución: por la fórmula 2 con $n = 5$,

$$\int x^5\,dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C.$$

■

EJEMPLO 3 Integral indefinida de una constante por una función de *x*

Encontrar $\int 7x\,dx$.

Solución: por la fórmula 4 con $k = 7$ y $f(x) = x$,

$$\int 7x\,dx = 7\int x\,dx.$$

Como x es x^1, por la fórmula 2 tenemos

$$\int x^1\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

Principios en práctica 2

Integral indefinida de una constante por una función de *t*

Si la razón de cambio de los ingresos de una compañía puede modelarse por $\frac{dR}{dt} = 0.12t^2$, entonces determine $\int 0.12t^2\,dt$, que proporciona la forma de la función de ingreso de la compañía.

donde C_1 es la constante de integración. Por tanto,

$$\int 7x\,dx = 7\int x\,dx = 7\left[\frac{x^2}{2} + C_1\right] = \frac{7}{2}x^2 + 7C_1.$$

Como $7C_1$ sólo es una constante arbitraria, por simplicidad la reemplazamos por C. Así,

$$\int 7x\,dx = \frac{7}{2}x^2 + C.$$

No es necesario escribir todos los pasos intermedios al integrar. Con mayor sencillez, escribimos

$$\int 7x\,dx = (7)\frac{x^2}{2} + C = \frac{7}{2}x^2 + C.$$



Advertencia Sólo una factor *constante* del integrando puede "sacarse" al frente del signo de integral. Puesto que x no es constante, $\int 7x\,dx \neq 7x\int dx = (7x)(x + C) = 7x^2 + 7Cx.$

EJEMPLO 4 Integral de una constante por una función de *x*

Encontrar $\int -\frac{3}{5}e^x\,dx.$

Solución:

$$\int -\frac{3}{5}e^x\,dx = -\frac{3}{5}\int e^x\,dx \qquad \text{(Fórmula 4)}$$

$$= -\frac{3}{5}e^x + C \qquad \text{(Fórmula 3).}$$

Principios en práctica 3

Determinación de integrales indefinidas

Debido a una competencia nueva, el número de suscriptores a cierta revista está disminuyendo a una velocidad de $\frac{dS}{dt} = -\frac{480}{t^3}$ suscripciones por mes, donde t es el número de meses desde que la competencia entró al mercado. Determine la forma de la ecuación para el número de suscriptores a la revista.

EJEMPLO 5 Determinación de integrales indefinidas

a. *Encontrar* $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt.$

Solución: aquí, t es la variable de integración. Escribimos de nuevo el integrando de manera que podamos usar una fórmula básica. Como $1/\sqrt{t} = t^{-1/2}$, al aplicar la fórmula 2 obtenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-1/2}\,dt = \frac{t^{(-1/2)+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C.$$

b. *Encontrar* $\int \frac{1}{6x^3}\,dx.$

Solución:

$$\int \frac{1}{6x^3}\,dx = \frac{1}{6}\int x^{-3}\,dx = \left(\frac{1}{6}\right)\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C$$

$$= -\frac{x^{-2}}{12} + C = -\frac{1}{12x^2} + C.$$

Principios en práctica 4

Integral indefinida de una suma

La tasa de crecimiento de la población en una ciudad nueva es estimada por medio de $\frac{dN}{dt} = 500 + 300\sqrt{t}$, en donde t está en años. Encuentre $\int (500 + 300\sqrt{t})\,dt$.

EJEMPLO 6 Integral indefinida de una suma

Encontrar $\int (x^2 + 2x)\,dx$.

Solución: por la fórmula 5,

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \int x^2\,dx + \int 2x\,dx.$$

Ahora,

$$\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_1,$$

y

$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = (2)\frac{x^{1+1}}{1+1} + C_2 = x^2 + C_2.$$

Por lo que,

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C_1 + C_2.$$

Cuando la integración de una expresión incluye más de un término, sólo se necesita una constante de integración.

Por conveniencia reemplazamos la constante $C_1 + C_2$ por C. Así,

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C.$$

Omitiendo los pasos intermedios, integramos simplemente término por término y escribimos

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + (2)\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + C.$$

Principios en práctica 5

Integral indefinida de sumas y diferencias

Suponga que la tasa de ahorro en Estados Unidos está dada por $\frac{dS}{dt} = 2.1t^2 - 65.4t + 491.6$, en donde t es el tiempo en años y S es la cantidad de dinero ahorrado en miles de millones de dólares. Determine la forma de la ecuación para el monto de dinero ahorrado.

EJEMPLO 7 Integral indefinida de una suma y diferencia

Encontrar $\int (2\sqrt[5]{x^4} - 7x^3 + 10e^x - 1)\,dx$.

Solución:

$$\int (2\sqrt[5]{x^4} - 7x^3 + 10e^x - 1)\,dx$$

$$= 2\int x^{4/5}\,dx - 7\int x^3\,dx + 10\int e^x\,dx - \int 1\,dx \qquad \text{(Fórmulas 5 y 4)}$$

$$= (2)\frac{x^{9/5}}{\frac{9}{5}} - (7)\frac{x^4}{4} + 10e^x - x + C \qquad \text{(Fórmulas 1, 2 y 3)}$$

$$= \frac{10}{9}x^{9/5} - \frac{7}{4}x^4 + 10e^x - x + C.$$

A veces, para aplicar las fórmulas básicas de integración, es necesario efectuar primero operaciones algebraicas en el integrando, como se muestra en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Uso de manipulaciones algebraicas para encontrar una integral indefinida

Encontrar $\int y^2(y + \frac{2}{3})\, dy$.

Solución: el integrando no concuerda con ninguna forma familiar de integración. Sin embargo, multiplicando los factores del integrando obtenemos

$$\int y^2(y + \tfrac{2}{3})\, dy = \int (y^3 + \tfrac{2}{3}y^2)\, dy$$

$$= \frac{y^4}{4} + \left(\frac{2}{3}\right)\frac{y^3}{3} + C = \frac{y^4}{4} + \frac{2y^3}{9} + C.$$



Advertencia En el ejemplo 8 multiplicamos primero los factores en el integrando. Observe que

La integral de un producto *no* es el producto de las integrales.

$$\int y^2(y + \tfrac{2}{3})\, dy \neq \left[\int y^2\, dy\right]\left[\int (y + \tfrac{2}{3})\, dy\right].$$

En términos más generales,

$$\int f(x)g(x)\, dx \neq \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx.$$

EJEMPLO 9 Uso de manipulaciones algebraicas para encontrar una integral indefinida

a. *Encontrar* $\int \frac{(2x - 1)(x + 3)}{6}\, dx$.

Solución: al factorizar la constante $\frac{1}{6}$ y multiplicar los binomios, obtenemos

$$\int \frac{(2x - 1)(x + 3)}{6}\, dx = \frac{1}{6}\int (2x^2 + 5x - 3)\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[(2)\frac{x^3}{3} + (5)\frac{x^2}{2} - 3x\right] + C$$

$$= \frac{x^3}{9} + \frac{5x^2}{12} - \frac{x}{2} + C.$$

Otro enfoque algebraico de (b) es

$$\int \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$$
$$= \int (x^3-1)x^{-2}\,dx$$
$$= \int (x - x^{-2})\,dx,$$

etcétera.

b. *Encontrar* $\int \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$.

Solución: podemos descomponer el integrando en fracciones, dividiendo cada término del numerador entre el denominador:

$$\int \frac{x^3-1}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \int (x - x^{-2})\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C.$$

Ejercicio 14.1

En los problemas del 1 al 52 encuentre las integrales indefinidas.

1. $\int 5\,dx$.

2. $\int \frac{1}{2}\,dx$.

3. $\int x^8\,dx$.

4. $\int 2x^{25}\,dx$.

5. $\int 5x^{-7}\,dx$.

6. $\int \frac{z^{-3}}{3}\,dz$.

7. $\int \frac{2}{x^{10}}\,dx$.

8. $\int \frac{7}{x^4\,dx}$.

9. $\int \frac{1}{y^{11/5}}\,dy$.

10. $\int \frac{7}{2x^{9/4}}\,dx$.

11. $\int (8+u)\,du$.

12. $\int (r^3+2r)\,dr$.

13. $\int (y^5-5y)\,dy$.

14. $\int (7-3w-9w^2)\,dw$.

15. $\int (3t^2-4t+5)\,dt$.

16. $\int (1+u+u^2+u^3)\,du$.

17. $\int (7+e)\,dx$.

18. $\int (5-2^{-1})\,dx$.

19. $\int \left(\frac{x}{7} - \frac{3}{4}x^4\right)dx$.

20. $\int \left(\frac{2x^2}{7} - \frac{8}{3}x^4\right)dx$.

21. $\int 6e^x\,dx$.

22. $\int \left(\frac{e^x}{3} + 2x\right)dx$.

23. $\int (x^{8.3} - 9x^6 + 3x^{-4} + x^{-3})\,dx$.

24. $\int (0.3y^4 - 8y^{-3} + 2)\,dy$.

25. $\int \frac{-2\sqrt{x}}{3}\,dx$.

26. $\int dw$.

27. $\int \frac{1}{4\sqrt[8]{x^2}}\,dx$.

28. $\int \frac{-3}{(2x)^2}\,dx$.

29. $\int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{x^3}\right)dx$.

30. $\int \left(\frac{1}{2x^3} - \frac{1}{x^4}\right)dx$.

31. $\int \left(\frac{3w^2}{2} - \frac{2}{3w^2}\right)dw$.

32. $\int \frac{4}{e^{-s}}\,ds$.

33. $\int \frac{2z-5}{7}\,dz$.

34. $\int \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}e^x\right)dx$.

35. $\int (x^e + 10e^x)\,dx$.

36. $\int \left(3y^3 - 2y^2 + \frac{e^y}{6}\right)dy$.

37. $\int (2\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x})\,dx$.

38. $\int 0\,dx$.

39. $\int \left(-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{5} - \frac{7}{2\sqrt{x}} + 6x\right)dx$.

40. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

41. $\int (x^2+5)(x-3)\,dx$.

42. $\int x^4(x^3+8x^2+7)\,dx$.

43. $\int \sqrt{x}(x+3)\,dx$.

44. $\int (z+2)^2\,dz$.

45. $\int (2u+1)^2\,du$.

46. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1\right)^2 dx$.

47. $\int v^{-2}(2v^4 + 3v^2 - 2v^{-3})\,dv$.

48. $\int [6e^u - u^3(\sqrt{u}+1)]\,du$.

49. $\int \frac{z^4+10z^3}{2z^2}\,dz$.

50. $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 4x}{5x}\, dx.$

51. $\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^x}\, dx.$

52. $\int \frac{(x^4 + 1)^2}{x^3}\, dx.$

53. Si $F(x)$ y $G(x)$ son tales que $F'(x) = G'(x)$, ¿es cierto que $F(x) - G(x)$ debe ser cero?

54. a. Encuentre una función F tal que $\int F(x)\, dx = xe^x + C$.

b. ¿Hay sólo una función F que satisfaga la ecuación dada en la parte (a), o existen muchas funciones?

55. Encuentre $\int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) dx.$

OBJETIVO Encontrar una antiderivada particular de una función que satisface ciertas condiciones. Esto implica la evaluación de una constante de integración.

14.2 Integración con condiciones iniciales

Si conocemos la razón de cambio, f', de la función f, entonces la función f misma es una antiderivada de f' (ya que la derivada de f es f'). Por supuesto hay muchas antiderivadas de f' y la más general es denotada por la integral indefinida. Por ejemplo, si

$$f'(x) = 2x,$$

entonces,

$$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int 2x\, dx = x^2 + C. \quad (1)$$

Esto es, *cualquier* función de la forma $f(x) = x^2 + C$ tiene su derivada igual a $2x$. Note que debido a la constante de integración, no conocemos $f(x)$ específicamente. Sin embargo, si f debe tener cierto valor para un valor particular de x, podemos determinar el valor de C y conocer así específicamente a $f(x)$. Por ejemplo, si $f(1) = 4$, de la ecuación (1) se tiene

$$f(1) = 1^2 + C,$$
$$4 = 1 + C,$$
$$C = 3.$$

Así,

$$f(x) = x^2 + 3.$$

Esto es, ahora ya conocemos la función particular $f(x)$ para la cual $f'(x) = 2x$ y $f(1) = 4$. La condición $f(1) = 4$, que da un valor de f para un valor específico de x, se llama *condición inicial* (o *valor en la frontera*).

Principios en práctica 1
Problema con condición inicial

La tasa de crecimiento de una especie de bacterias es estimada por medio de
$\frac{dN}{dt} = 800 + 200e^t$, en donde N
es el número de bacterias (en miles) después de t horas. Si $N(5) = 40{,}000$, determine $N(t)$.

EJEMPLO 1 Problema con condición inicial

Si y es una función de x tal que $y' = 8x - 4$ y $y(2) = 5$, encontrar y. [*Nota: $y(2) = 5$ significa que $y = 5$ cuando $x = 2$.*] *Encontrar también $y(4)$.*

Solución: aquí, $y(2) = 5$ es la condición inicial. Como $y' = 8x - 4$, y es una antiderivada de $8x - 4$:

$$y = \int (8x - 4)\, dx = 8 \cdot \frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^2 - 4x + C. \quad (2)$$

Podemos determinar el valor de C por medio de la condición inicial. Como $y = 5$ cuando $x = 2$, de la ecuación (2) tenemos

$$5 = 4(2)^2 - 4(2) + C,$$
$$5 = 16 - 8 + C,$$
$$C = -3.$$

Al reemplazar C por -3 en la ecuación (2) se obtiene la función que buscamos:

$$y = 4x^2 - 4x - 3. \quad (3)$$

Para encontrar $y(4)$, hacemos $x = 4$ en la ecuación (3):

$$y(4) = 4(4)^2 - 4(4) - 3 = 64 - 16 - 3 = 45.$$

■ *Principios en práctica 2*

Problema con condición inicial que incluye a y''

La aceleración de un objeto después de t segundos está dada por $y'' = 84t + 24$, la velocidad a los 8 segundos está dada por $y'(8) = 2891$ pies/seg, y la posición a los 2 segundos está dada por $y(2) = 185$ pies. Determine $y(t)$.

EJEMPLO 2 Problema con condiciones iniciales que implican a y''

Dado que $y'' = x^2 - 6$, $y'(0) = 2$, y $y(1) = -1$, encontrar y.

Solución:

Estrategia: para pasar de y'' a y, son necesarias dos integraciones: la primera nos lleva de y'' a y', y la otra de y' a y. Por tanto, se tendrán dos constantes de integración, que denotaremos como C_1 y C_2.

Como $y'' = \frac{d}{dx}(y') = x^2 - 6$, y' es una antiderivada de $x^2 - 6$. Por lo que,

$$y' = \int (x^2 - 6)\,dx = \frac{x^3}{3} - 6x + C_1. \quad (4)$$

Ahora, $y'(0) = 2$ significa que $y' = 2$ cuando $x = 0$; por tanto, de la ecuación (4), tenemos

$$2 = \frac{0^3}{3} - 6(0) + C_1.$$

De aquí, $C_1 = 2$, de modo que

$$y' = \frac{x^3}{3} - 6x + 2.$$

Por integración podemos encontrar y:

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - 6x + 2\right) dx$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} - (6)\frac{x^2}{2} + 2x + C_2,$$

así

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x + C_2. \quad (5)$$

Ahora, como $y = -1$ cuando $x = 1$, de la ecuación (5) tenemos

$$-1 = \frac{1^4}{12} - 3(1)^2 + 2(1) + C_2.$$

Así, $C_2 = -\frac{1}{12}$, por lo que

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x - \frac{1}{12}.$$

La integración con condiciones iniciales es útil en muchos casos prácticos como lo ilustran los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 3 Ingreso y educación

Para un grupo urbano particular, algunos sociólogos estudiaron el ingreso anual promedio actual y (en dólares) que una persona con x años de educación puede esperar recibir al buscar un empleo ordinario. Ellos estimaron que la razón a la que el ingreso cambia con respecto a la educación está dada por

$$\frac{dy}{dx} = 100x^{3/2}, \qquad 4 \leq x \leq 16,$$

donde $y = 28{,}720$ *cuando* $x = 9$. *Encontrar* y.

Solución: aquí y es una antiderivada de $100x^{3/2}$. Entonces,

$$y = \int 100x^{3/2}\, dx = 100\int x^{3/2}\, dx$$

$$= (100)\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C$$

$$y = 40x^{5/2} + C. \tag{6}$$

La condición inicial es que $y = 28{,}720$ cuando $x = 9$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (6), podemos determinar el valor de C:

$$28{,}720 = 40(9)^{5/2} + C$$

$$= 40(243) + C$$

$$28{,}720 = 9720 + C.$$

Por tanto, $C = 19{,}000$ y

$$y = 40x^{5/2} + 19{,}000.$$

EJEMPLO 4 Determinación de la función de demanda a partir del ingreso marginal

Si la función de ingreso marginal para el producto de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = 2000 - 20q - 3q^2,$$

encontrar la función de demanda.

Solución:

Estrategia: al integrar dr/dq y usando una condición inicial, podemos encontrar la función de ingreso r. Pero el ingreso está dado también por la relación general $r = pq$, donde p es el precio por unidad. Así, $p = r/q$. Reemplazando r en esta ecuación por la función de ingreso, obtenemos la función de demanda.

Como dr/dq es la derivada del ingreso total r,

$$r = \int (2000 - 20q - 3q^2)\ dq$$
$$= 2000q - (20)\frac{q^2}{2} - (3)\frac{q^3}{3} + C,$$

o

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3 + C. \qquad (7)$$

El ingreso es cero cuando q es cero.

Suponemos que **cuando no se ha vendido ninguna unidad, el ingreso total es 0;** esto es, $r = 0$ cuando $q = 0$. Ésta es nuestra condición inicial. Sustituyendo estos valores en la ecuación (7) resulta

$$0 = 2000(0) - 10(0)^2 - 0^3 + C.$$

Aunque $q = 0$ da $C = 0$, esto en general no es cierto. Ocurre en esta sección porque las funciones de ingreso son polinomiales. En secciones posteriores, la evaluación cuando $q = 0$ puede producir un valor distinto de cero para C.

De aquí, $C = 0$ y

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3.$$

Para encontrar la función de demanda, usamos el hecho de que $p = r/q$ y sustituimos el valor de r.

$$p = \frac{r}{q} = \frac{2000q - 10q^2 - q^3}{q}.$$
$$p = 2000 - 10q - q^2.$$

■

EJEMPLO 5 Determinación del costo a partir del costo marginal

En la manufactura de un producto, los costos fijos por semana son de \$4000. *Los costos fijos son costos como la renta y el seguro, que permanecen constantes a todos los niveles de producción en un periodo dado. Si la función de costo marginal dc/dq es*

$$\frac{dc}{dq} = 0.000001(0.002q^2 - 25q) + 0.2,$$

donde c es el costo total (en dólares) de producir q libras de producto por semana, encontrar el costo de producir 10,000 *libras en una semana.*

Solución: como dc/dq es la derivada del costo total c,

$$c = \int [0.000001(0.002q^2 - 25q) + 0.2]\ dq$$
$$= 0.000001\int (0.002q^2 - 25q)\ dq + \int 0.2\ dq.$$

Cuando q es cero, el costo total es igual al costo fijo.

$$c = 0.000001\left(\frac{0.002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2}\right) + 0.2q + C.$$

Aunque $q = 0$ da para C un valor igual al costo fijo, esto no es cierto en general. Ocurre en esta sección porque las funciones de costo son polinomiales. En secciones posteriores, la evaluación cuando $q = 0$ puede producir un valor para C que sea diferente del costo fijo.

Los costos fijos son constantes independientemente de la producción. Por tanto, cuando $q = 0$, $c = 4000$, lo cual es nuestra condición inicial. Sustituyendo encontramos que $C = 4000$, por lo que

$$c = 0.000001\left(\frac{0.002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2}\right) + 0.2q + 4000. \qquad (8)$$

De la ecuación (8), cuando $q = 10{,}000$, $c = 5416\frac{2}{3}$. Así, el costo total de producir 10,000 libras de producto en una semana es de \$5416.67.

Ejercicio 14.2

En los problemas 1 y 2 encuentre y, sujeta a las condiciones dadas

1. $dy/dx = 3x - 4;\quad y(-1) = \frac{13}{2}$.

2. $dy/dx = x^2 - x;\quad y(3) = \frac{19}{2}$.

En los problemas 3 y 4, si y satisface las condiciones dadas, encuentre y(x) para el valor dado de x.

3. $y' = 4/\sqrt{x},\ y(4) = 10;\quad x = 9$.

4. $y' = -x^2 + 2x,\ y(2) = 1;\quad x = 1$.

En los problemas del 5 al 8 encuentre y, sujeta a las condiciones dadas.

5. $y'' = -x^2 - 2x;\quad y'(1) = 0,\ y(1) = 1$.

6. $y'' = x + 1;\quad y'(0) = 0,\ y(0) = 5$.

7. $y''' = 2x;\quad y''(-1) = 3,\ y'(3) = 10,\ y(0) = 13$.

8. $y''' = e^x + 1;\quad y''(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y(0) = 3$.

En los problemas del 9 al 12 dr/dq es una función de ingreso marginal. Encuentre la función de demanda.

9. $dr/dq = 0.7$.

10. $dr/dq = 15 - \frac{1}{15}q$.

11. $dr/dq = 275 - q - 0.3q^2$.

12. $dr/dq = 10{,}000 - 2(2q + q^3)$.

En los problemas del 13 al 16 dc/dq es una función de costo marginal y los costos fijos están indicados entre llaves. En los problemas 13 y 14, encuentre la función de costo total. En los problemas 15 y 16 encuentre el costo total para el valor indicado de q.

13. $dc/dq = 1.35;\quad \{200\}$.

14. $dc/dq = 2q + 75;\quad \{2000\}$.

15. $dc/dq = 0.09q^2 - 1.2q + 4.5;\quad \{7700\};\quad q = 10$.

16. $dc/dq = 0.000102q^2 - 0.034q + 5;\ \{10{,}000\};\ q = 100$.

17. Dieta para ratas Un grupo de biólogos estudió los efectos alimenticios en ratas a las que se alimentó con una dieta en la que 10% era proteína.[1] La proteína consistió en levadura y harina de maíz.



El grupo encontró que en cierto periodo, la razón de cambio aproximada del aumento promedio de peso G (en gramos) de una rata, con respecto al porcentaje P de levadura en la mezcla proteínica fue

$$\frac{dG}{dP} = -\frac{P}{25} + 2, \qquad 0 \le P \le 100.$$

Si $G = 38$ cuando $P = 10$, encuentre G.

18. Polilla de invierno En Nueva Escocia[2] se llevó a cabo un estudio acerca de la polilla de invierno. Las larvas de la polilla caen al suelo de los árboles huéspedes. Se encontró que la razón (aproximada) con que la densidad y (número de larvas por pie cuadrado de suelo) cambia con respecto a la distancia x (en pies), desde la base de un árbol huésped es

$$\frac{dy}{dx} = -1.5 - x, \qquad 1 \le x \le 9.$$

Si $y = 57.3$ cuando $x = 1$, encuentre y.

19. Flujo de un fluido En el estudio del flujo de un fluido en un tubo de radio constante R, tal como la sangre en ciertas partes del cuerpo, puede considerarse que el tubo consiste en tubos concéntricos de radio r, donde $0 \le r \le R$. La velocidad v del fluido es una función de r y está dada por[3]

$$v = \int -\frac{(P_1 - P_2)r}{2l\eta}\, dr,$$

[1] Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods", en *Single–Cell Protein;* ed. R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

[2] Adaptado de D. G. Embree, "The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia, 1954-1962", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).

[3] R. W. Stacy et al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill, 1955).

donde P_1 y P_2 son las presiones en los extremos del tubo, η (una letra griega que se lee "eta") es la viscosidad del fluido y l es la longitud del tubo. Si $v = 0$ cuando $r = R$, demuestre que

$$v = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4l\eta}.$$

20. Elasticidad de la demanda El único productor de cierto artículo ha determinado que la función de ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dq} = 100 - 3q^2.$$

Encuentre la elasticidad puntual de la demanda para el producto cuando $q = 5$. [*Sugerencia:* encuentre primero la función de demanda.]

21. Costo promedio Un fabricante ha determinado que la función de costo marginal es

$$\frac{dc}{dq} = 0.003q^2 - 0.4q + 40,$$

donde q es el número de unidades producidas. Si el costo marginal es de $27.50 cuando $q = 50$ y los costos fijos son de $5000, ¿cuál es el costo *promedio* de producir 100 unidades?

22. Si $f''(x) = 6x + 2$ y $f'(-1) = 5$, evalúe

$$f(1) - f(-1).$$

OBJETIVO Utilizar las fórmulas para $\int u^n\,du$, $\int e^u\,du$, y $\int \frac{1}{u}\,du$.

14.3 MÁS FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN

Regla de la potencia para integración

La fórmula

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad \text{si } n \neq -1,$$

que se aplica a una potencia de x, puede generalizarse para manejar una potencia de una *función* de x. Suponga que u es una función diferenciable de x. Por medio de la regla de la potencia para diferenciación, si $n \neq -1$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)[u(x)]^n \cdot u'(x)}{n+1} = [u(x)]^n \cdot u'(x).$$

Así,

$$\int [u(x)]^n \cdot u'(x)\ dx = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

A ésta le llamamos la *regla de la potencia para integración*. Observe que $u'(x)dx$ es la diferencial de u, es decir du. En forma matemática breve, podemos reemplazar $u(x)$ por u y $u'(x)dx$ por du:

Regla de la potencia para integración
Si u es diferenciable, entonces

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad \text{si } n \neq -1.$$

Es esencial que usted se dé cuenta de la diferencia entre la regla de la potencia para integración y la fórmula para $\int x^n\,dx$. En la regla de potencia, u representa una función, mientras que en $\int x^n\,dx$, x es la variable.

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla de la potencia para integración

a. *Determinar* $\int (x + 1)^{20}\, dx$.

Solución: como el integrando es una potencia de la función $x + 1$, haremos $u = x + 1$. Entonces $du = dx$, y la $\int (x + 1)^{20}\, dx$ tiene la forma $\int u^{20}\, du$. Por medio de la regla de la potencia para integración,

$$\int (x + 1)^{20}\, dx = \int u^{20}\, du = \frac{u^{21}}{21} + C = \frac{(x + 1)^{21}}{21} + C.$$

Observe que no damos nuestra respuesta en términos de u, sino en términos de x.

b. *Determinar* $\int 3x^2(x^3 + 7)^3\, dx$.

Solución: observamos que el integrando contiene una potencia de la función $x^3 + 7$. Hacemos $u = x^3 + 7$. Entonces $du = 3x^2 dx$. Por fortuna, $3x^2$ aparece como un factor en el integrando y puede usarse como parte de du. Así tenemos

Después de la integración, usted se puede sorprender de lo que le sucedió a $3x^2$; $3x^2$, junto con dx, forma la diferencial de u en la regla de la potencia.

$$\int 3x^2(x^3 + 7)^3\, dx = \int (x^3 + 7)^3[3x^2\, dx] = \int u^3\, du$$

$$= \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^3 + 7)^4}{4} + C.$$

Para aplicar la regla de la potencia para integración, algunas veces debemos hacer un ajuste para obtener du en el integrando, como lo ilustra el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Ajuste de *du*

Encontrar $\int x\sqrt{x^2 + 5}\, dx$.

Solución: podemos escribir esto como $\int x(x^2 + 5)^{1/2}\, dx$. Observe que el integrando contiene una potencia de la función $x^2 + 5$. Si $u = x^2 + 5$, entonces $du = 2x\, dx$. Ya que el factor *constante* 2 en du *no* aparece en el integrando, esta integral no tiene la forma $\int u^n\, du$. Sin embargo, podemos poner la integral dada en esta forma por medio de la multiplicación y división del integrando por 2. Esto no cambia su valor. Así,

$$\int x(x^2 + 5)^{1/2}\, dx = \int \frac{2}{2} x(x^2 + 5)^{1/2}\, dx = \int \frac{1}{2}(x^2 + 5)^{1/2}[2x\, dx].$$

Moviendo el factor *constante* $\frac{1}{2}$ al frente del signo de integral, tenemos

$$\int x(x^2 + 5)^{1/2}\, dx = \frac{1}{2}\int (x^2 + 5)^{1/2}[2x\, dx] \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right] + C.$$

Regresando en términos de x se obtiene

$$\int x\sqrt{x^2 + 5}\,dx = \frac{(x^2 + 5)^{3/2}}{3} + C.$$

En el ejemplo 2, necesitábamos el factor 2 en el integrando. En la ecuación (1) se insertó, y la integral se multiplicó al mismo tiempo por $\frac{1}{2}$. En términos más generales, si k es una constante diferente de cero, entonces

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{k}{k} f(x)\,dx = \frac{1}{k}\int kf(x)\,dx.$$

Podemos ajustar los factores constantes, pero no los factores variables.

En efecto, podemos multiplicar el integrando por una constante diferente de cero, k, siempre y cuando compensemos esto multiplicando toda la integral por $1/k$. Tal manipulación **no puede** ser hecha con factores *variables*.



Advertencia Cuando use la forma $\int u^n\,du$, no descuide a du. Por ejemplo,

$$\int (4x + 1)^2\,dx \neq \frac{(4x + 1)^3}{3} + C.$$

La forma apropiada de resolver este problema es como sigue. Haciendo $u = 4x + 1$, tenemos $du = 4dx$. Así,

$$\int (4x + 1)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (4x + 1)^2[4\,dx] = \frac{1}{4}\int u^2\,du$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{u^3}{3} + C = \frac{(4x + 1)^3}{12} + C.$$

EJEMPLO 3 Aplicación de la regla de la potencia para integración

a. *Encontrar* $\int \sqrt[3]{6y}\,dy$.

Solución: el integrando es $(6y)^{1/3}$, una potencia de una función. Tratamos de utilizar la regla de la potencia para integración. Si tomamos $u = 6y$, entonces $du = 6\,dy$. Como el factor 6 no aparece en el integrando, insertamos un factor de 6 y lo ajustamos con un factor de $\frac{1}{6}$ al frente de la integral. Entonces, tenemos

El ejemplo 3(a) puede resolverse sin el uso de la regla de la potencia, por medio de la reescritura del integrando como $\sqrt[3]{6}y^{1/3}$. Esto da la respuesta equivalente

$$\frac{3\sqrt[3]{6}}{4}y^{4/3} + C.$$

$$\int \sqrt[3]{6y}\,dy = \int (6y)^{1/3}\,dy = \frac{1}{6}\int (6y)^{1/3}[6\,dy] = \frac{1}{6}\int u^{1/3}\,du$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\frac{u^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{(6y)^{4/3}}{8} + C.$$

b. *Encontrar* $\int \frac{2x^3 + 3x}{(x^4 + 3x^2 + 7)^4}\,dx$.

Solución: podemos escribir esto como $\int (x^4 + 3x^2 + 7)^{-4}(2x^3 + 3x)\,dx$. Trataremos de utilizar la regla de la potencia para integración. Si $u = x^4 + 3x^2 + 7$, entonces $du = (4x^3 + 6x)\,dx$, que es dos veces la cantidad $(2x^3 + 3x)\,dx$ en la integral. Así, insertamos un factor de 2, y ajustamos con un factor de $\frac{1}{2}$ al frente de la integral, como sigue:

$$\int (x^4 + 3x^2 + 7)^{-4}(2x^3 + 3x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^4 + 3x^2 + 7)^{-4}[2(2x^3 + 3x)\,dx] \qquad \text{(factores insertados)}$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^4 + 3x^2 + 7)^{-4}[(4x^3 + 6x)\,dx]$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-4}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{6u^3} + C$$

$$= -\frac{1}{6(x^4 + 3x^2 + 7)^3} + C \qquad \text{(de nuevo escribimos en términos de } x\text{).}$$

Al utilizar la regla de la potencia para integración, tenga cuidado cuando hace su elección de u. En el ejemplo 3(b), *no* puede adelantar mucho si, por ejemplo, elige $u = 2x^3 + 3x$. En ocasiones puede ser necesario que elija muchas opciones diferentes. No basta con sólo ver la integral. Intente algo, aun si se equivoca, ya que puede darle sugerencias de algo que puede funcionar. **El dominio de la integración sólo se alcanza después de muchas horas de práctica y estudio consciente.**

EJEMPLO 4 Una integral a la cual no se aplica la regla de la potencia

Encontrar $\int 4x^2(x^4 + 1)^2\,dx$.

Solución: si tomamos $u = x^4 + 1$, entonces $du = 4x^3dx$. Para obtener du en la integral, necesitamos un factor adicional de la *variable* x. Sin embargo, sólo podemos ajustar factores **constantes.** Así, no podemos utilizar la regla de la potencia. En lugar de eso, para encontrar la integral, primero debemos desarrollar $(x^4 + 1)^2$:

$$\int 4x^2(x^4 + 1)^2\,dx = 4\int x^2(x^8 + 2x^4 + 1)\,dx$$

$$= 4\int (x^{10} + 2x^6 + x^2)\,dx$$

$$= 4\left(\frac{x^{11}}{11} + \frac{2x^7}{7} + \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Integración de funciones con la exponencial natural

Ahora volvemos nuestra atención para integrar funciones exponenciales. Si u es una función diferenciable de x, entonces

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}.$$

Para esta fórmula de diferenciación, la correspondiente fórmula de integración es

$$\int e^u \frac{du}{dx}\,dx = e^u + C.$$

Pero, $\frac{du}{dx}\,dx$ es la diferencial de u, es decir, du. Así,

$$\int e^u\,du = e^u + C. \qquad (2)$$

> **Principios en práctica 1**
> **Integrales que incluyen funciones exponenciales**
>
> Cuando un objeto se mueve de un entorno a otro, su temperatura T cambia a una tasa dada por $\frac{dT}{dt} = kCe^{kt}$, donde t es el tiempo (en horas) después de haber cambiado de entorno, C es la diferencia de temperaturas (original menos nueva) entre los entornos y k es una constante. Si el entorno original tiene una temperatura de 70°, la del nuevo es 60° y $k = -0.5$, determine la forma general de $T(t)$.

EJEMPLO 5 Integrales que incluyen funciones exponenciales

a. *Encontrar* $\int 2xe^{x^2}\,dx$.

Solución: sea $u = x^2$. Entonces $du = 2x\,dx$, y por la ecuación (2),

$$\int 2xe^{x^2}\,dx = \int e^{x^2}[2x\,dx] = \int e^u\,du$$
$$= e^u + C = e^{x^2} + C.$$

b. *Encontrar* $\int (x^2+1)e^{x^3+3x}\,dx$.

Solución: si $u = x^3 + 3x$, entonces $du = (3x^2+3)\,dx = 3(x^2+1)\,dx$. Si el integrando tuviese un factor de 3, la integral tendría la forma $\int e^u\,du$. Así, escribimos

$$\int (x^2+1)e^{x^3+3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3+3x}[3(x^2+1)\,dx]$$
$$= \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + C$$
$$= \frac{1}{3}e^{x^3+3x} + C.$$



Advertencia La fórmula de la regla de la potencia para $\int u^n\,du$ no se aplica a $\int e^u\,du$. Por ejemplo,

$$\int e^x\,dx \neq \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$$

Integrales que incluyen funciones logarítmicas

Como usted sabe, la fórmula de la potencia $\int u^n\,du = u^{n+1}/(n+1) + C$ no se aplica cuando $n = -1$. Para manejar esa situación, es decir, $\int u^{-1}\,du = \int \frac{1}{u}\,du$, primero recordamos que

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

Parecería que $\int \frac{1}{u}\frac{du}{dx}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C$. Sin embargo, el logaritmo de u está definido sólo si u es positivo. Si $u < 0$, entonces $\ln u$ no está definido. Así,

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C, \qquad \text{con tal que } u > 0.$$

Por otra parte, si $u < 0$, entonces $-u > 0$ y $\ln(-u)$ está definido. Además,

$$\frac{d}{dx}[\ln(-u)] = \frac{1}{-u}(-1)\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

En este caso $(u < 0)$,

$$\int \frac{1}{u}\frac{du}{dx}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(-u) + C.$$

En resumen, si $u > 0$, entonces $\int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C$; si $u < 0$, entonces $\int \frac{1}{u}\,du = \ln(-u) + C$. Combinando estos casos, tenemos

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C. \qquad \textbf{(3)}$$

En particular, si $u = x$, entonces $du = dx$, y

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C. \qquad \textbf{(4)}$$

Principios en práctica 2

Integrales que incluyen $\frac{1}{u}\,du$

Si la tasa de memorización de un vocabulario de una lengua extranjera del estudiante promedio está dada por $\frac{dv}{dt} = \frac{35}{t+1}$, donde v es el número de palabras memorizadas del vocabulario en t horas de estudio, determine la forma general de $v(t)$.

EJEMPLO 6 Integrales que incluyen a $\frac{1}{u}\,du$

a. *Encontrar* $\int \frac{7}{x}\,dx$.

Solución: de la ecuación (4),

$$\int \frac{7}{x}\,dx = 7\int \frac{1}{x}\,dx = 7\ln|x| + C.$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos, podemos escribir esta respuesta en otra forma:

$$\int \frac{7}{x}\,dx = \ln|x^7| + C.$$

b. *Encontrar* $\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx$.

Solución: sea $u = x^2 + 5$. Entonces $du = 2x\,dx$. De la ecuación (3),

$$\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \int \frac{1}{x^2+5}[2x\,dx] = \int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \ln|u| + C = \ln|x^2+5| + C.$$

Como $x^2 + 5$ siempre es positiva, podemos omitir las barras de valor absoluto:

$$\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \ln(x^2+5) + C.$$

EJEMPLO 7 Una integral que incluye $\frac{1}{u}\,du$

Encontrar $\displaystyle\int \frac{(2x^3+3x)\,dx}{x^4+3x^2+7}$.

Solución: si $u = x^4 + 3x^2 + 7$, entonces $du = (4x^3 + 6x)\,dx$, que es dos veces el numerador. Para aplicar la ecuación (3), insertamos un factor de 2 y lo ajustamos con un factor de $\frac{1}{2}$, como sigue:

$$\int \frac{2x^3+3x}{x^4+3x^2+7}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(2x^3+3x)}{x^4+3x^2+7}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^4+3x^2+7}[(4x^3+6x)\,dx]$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^4+3x^2+7| + C \qquad \text{(escribimos de nuevo)}$$
$$= \ln\sqrt{x^4+3x^2+7} + C \qquad \left(\frac{1}{2}\ln|u| = \ln u^{1/2}\right).$$

EJEMPLO 8 Una integral que incluye dos formas

Encontrar $\displaystyle\int \left[\frac{1}{(1-w)^2} + \frac{1}{w-1}\right] dw.$

Solución:

$$\int \left[\frac{1}{(1-w)^2} + \frac{1}{w-1}\right] dw = \int (1-w)^{-2}\,dw + \int \frac{1}{w-1}\,dw$$
$$= -1\int (1-w)^{-2}[-dw] + \int \frac{1}{w-1}\,dw.$$

La primera integral tiene la forma $\int u^{-2}\,du$ y la segunda tiene la forma $\int \frac{1}{v}\,dv$. Así,

$$\int \left[\frac{1}{(1-w)^2} + \frac{1}{w-1} \right] dw = -\frac{(1-w)^{-1}}{-1} + \ln|w-1| + C$$

$$= \frac{1}{1-w} + \ln|w-1| + C.$$

Para su comodidad, en la tabla 14.2 listamos las fórmulas básicas de integración analizadas hasta el momento. Suponemos que u es una función de x.

TABLA 14.2 Fórmulas básicas de integración

1.	$\int k\, du = ku + C, \quad k$ una constante
2.	$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \; n \neq -1.$
3.	$\int e^u\, du = e^u + C.$
4.	$\int \frac{1}{u}\, du = \ln\lvert u\rvert + C, \quad u \neq 0.$
5.	$\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx.$
6.	$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx.$

Ejercicio 14.3

En los problemas del 1 al 80 encuentre las integrales indefinidas.

1. $\int (x+5)^7\, dx.$

2. $\int 15(x+2)^4\, dx.$

3. $\int 2x(x^2+3)^5\, dx.$

4. $\int (3x^2+14x)(x^3+7x^2+1)\, dx.$

5. $\int (3y^2+6y)(y^3+3y^2+1)^{2/3}\, dy.$

6. $\int (-12z^2-12z+1)(-4z^3-6z^2+z)^{18}\, dx.$

7. $\int \frac{5}{(3x-1)^3}\, dx.$

8. $\int \frac{4x}{(2x^2-7)^{10}}\, dx.$

9. $\int \sqrt{2x-1}\, dx.$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{x-2}}\, dx.$

11. $\int (7x-6)^4\, dx.$

12. $\int x^2(3x^3+7)^3\, dx.$

13. $\int x(x^2+3)^{12}\, dx.$

14. $\int 9x\sqrt{1+2x^2}\, dx.$

15. $\int 4x^4(27+x^5)^{1/3}\, dx.$

16. $\int (3-2x)^{10}\, dx.$

17. $\int 3e^{3x}\, dx.$

18. $\int 2e^{2t+5}\, dt.$

19. $\int (2t+1)e^{t^2+t}\, dt.$

20. $\int -3w^2e^{-w^3}\, dw.$

21. $\int xe^{7x^2}\, dx.$

22. $\int x^3e^{4x^4}\, dx.$

23. $\int 6e^{-2x}\,dx.$

24. $\int x^4 e^{-6x^5}\,dx.$

25. $\int \frac{1}{x+5}\,dx.$

26. $\int \frac{2x+1}{x+x^2}\,dx.$

27. $\int \frac{3x^2+4x^3}{x^3+x^4}\,dx.$

28. $\int \frac{9x^2-2x}{1-x^2+3x^3}\,dx.$

29. $\int \frac{6z}{(z^2-6)^5}\,dx.$

30. $\int \frac{1}{(8y-3)^3}\,dy.$

31. $\int \frac{4}{x}\,dx.$

32. $\int \frac{3}{1+2y}\,dy.$

33. $\int \frac{s^2}{s^3+5}\,ds.$

34. $\int \frac{2x^2}{3-4x^3}\,dx.$

35. $\int \frac{8}{5-3x}\,dx.$

36. $\int \frac{7t}{5t^2-6}\,dt.$

37. $\int \sqrt{5x}\,dx.$

38. $\int \frac{1}{(4x)^7}\,dx.$

39. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx.$

40. $\int \frac{11}{3-2x}\,dx.$

41. $\int 2y^3 e^{y^4+1}\,dx.$

42. $\int 5\sqrt{4x-3}\,dx.$

43. $\int v^2 e^{-2v^3+1}\,dv.$

44. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x^3+9}}\,dx.$

45. $\int (e^{-5x}+2e^x)\,dx.$

46. $\int 4\sqrt[3]{y+1}\,dy.$

47. $\int (x+1)(3-3x^2-6x)^3\,dx.$

48. $\int 2ye^{3y^2}\,dy.$

49. $\int \frac{x^2+2}{x^3+6x}\,dx.$

50. $\int (e^x-e^{-x}+e^{3x})\,dx.$

51. $\int \frac{16s-4}{3-2s+4s^2}\,ds.$

52. $\int (t^2+4t)(t^3+6t^2)^6\,dt.$

53. $\int x(2x^2+1)^{-1}\,dx.$

54. $\int (w^3-8w^7+1)(w^4-4w^8+4w)^{-6}\,dw.$

55. $\int -(x^2-2x^5)(x^3-x^6)^{-10}\,dx.$

56. $\int \frac{3}{5}(v-2)e^{2-4v+v^2}\,dv.$

57. $\int (2x^3+x)(x^4+x^2)\,dx.$

58. $\int (e^{3.1})^2\,dx.$

59. $\int \frac{18+12x}{(4-9x-3x^2)^5}\,dx.$

60. $\int (e^x-e^{-x})^2\,dx.$

61. $\int x(2x+1)e^{4x^3+3x^2-4}\,dx.$

62. $\int (u^2+3-ue^{7-u^2})\,du.$

63. $\int x\sqrt{(8-5x^2)^3}\,dx.$

64. $\int e^{-x/4}\,dx.$

65. $\int \left(\sqrt{2x}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx.$

66. $\int \frac{x^3}{e^{x^4}}\,dx.$

67. $\int (x^2+1)^2\,dx.$

68. $\int \left[x(x^2-16)^2-\frac{1}{2x+5}\right]dx.$

69. $\int \left[\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^5}{(x^6+1)^2}\right]dx.$

70. $\int \left[\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx.$

71. $\int \left[\frac{1}{3x-5}-(x^2-2x^5)(x^3-x^6)^{-10}\right]dx.$

72. $\int (r^3+5)^2\,dr.$

73. $\int \left[\sqrt{3x+1}-\frac{x}{x^2+3}\right]dx.$

74. $\int \left[\frac{2x}{x^2+3}-\frac{x^3}{(x^4+2)^2}\right]dx.$

75. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

76. $\int (e^4-2^e)\,dx.$

77. $\int \frac{1+e^{2x}}{4e^x}\,dx.$

78. $\int \frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t}-1}\,dt.$

79. $\int \frac{x+1}{x^2+2x}\ln(x^2+2x)\,dx.$

80. $\int \sqrt[3]{x}\,e^{\sqrt[3]{8x^4}}\,dx.$

En los problemas del 81 al 84 encuentre y, sujeta a las condiciones dadas.

81. $y' = (3-2x)^2; \quad y(0) = 1.$

82. $y' = \frac{x}{x^2+6}; \quad y(1) = 0.$

83. $y'' = \frac{1}{x^2}; \quad y'(-1) = 1, y(1) = 0.$

84. $y'' = \sqrt{x+2}; \quad y'(2) = \frac{1}{3}, y(2) = -\frac{7}{15}.$

85. Bienes raíces La tasa de cambio del valor de una casa que cuesta $350,000 puede modelarse por medio de $\frac{dV}{dt} = 8e^{0.05t}$, donde t es el tiempo en años desde que la casa fue construida y V es el valor (en miles de dólares) de la casa. Determine $V(t)$.

86. Tiempo de vida Si la tasa de cambio de la esperanza de vida l al nacer, de personas que nacen en Estados Unidos puede modelarse por $\frac{dl}{dt} = \frac{12}{2t + 50}$, en donde t es el número de años a partir de 1940 y la esperanza de vida fue de 63 años en 1940, encuentre la esperanza de vida para personas que nacieron en 1998.

87. Oxígeno en los vasos capilares En un análisis de la difusión del oxígeno en los vasos capilares,[4] se usan cilindros concéntricos de radio r como modelos de un capilar. La concentración C de oxígeno en el capilar está dada por

$$C = \int \left(\frac{Rr}{2K} + \frac{B_1}{r} \right) dr,$$

donde R es la razón constante con que el oxígeno se difunde en el capilar, y K y B_1 son constantes. Encuentre C (escriba la constante de integración como B_2).

88. Encuentre $f(2)$ si $f(\frac{1}{2}) = 1$ y $f'(x) = e^{2x-1} - 6x$.

[4]W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press. Inc., 1972).

OBJETIVO Analizar técnicas de manejo de problemas de integración más complejas, a saber, por medio de manipulación algebraica y por ajuste del integrando a una forma conocida. Integrar una función exponencial con una base diferente a e y determinar la función de consumo, dada la propensión marginal al consumo.

14.4 TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Ahora que ha adquirido alguna práctica en resolver integrales indefinidas, consideraremos algunos problemas con mayor grado de dificultad.

Cuando se tienen que integrar fracciones, es necesario a veces efectuar una división previa para obtener formas de integración familiares, como se verá en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 División antes de la integración

a. *Encontrar* $\int \frac{x^3 + x}{x^2}\, dx.$

Solución: no es evidente una forma familiar de integración. Sin embargo, podemos descomponer el integrando en dos fracciones, dividiendo cada término del numerador entre el denominador. Entonces tenemos

Aquí partimos la integral.

$$\int \frac{x^3 + x}{x^2}\, dx = \int \left[\frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2} \right] dx = \int \left[x + \frac{1}{x} \right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

b. *Encontrar* $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x + 1}\, dx.$

Solución: aquí el integrando es un cociente de polinomios en donde el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, y el denominador tiene más de un término. En tal caso, para integrar efectuamos primero la división hasta que el grado del residuo sea menor que el del divisor. Obtenemos

Aquí utilizamos la división larga para reescribir el integrando.

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x + 1}\, dx = \int \left(x^2 + x + \frac{1}{2x + 1} \right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{2x + 1}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}[2\,dx]$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C.$$

EJEMPLO 2 Integrales indefinidas

a. *Encontrar* $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^3}\,dx.$

Solución: podemos escribir esta integral como $\int \frac{(\sqrt{x}-2)^{-3}}{\sqrt{x}}\,dx$. Consideremos la regla de la potencia para integración con $u = \sqrt{x} - 2$. Entonces $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, y

Aquí la integral se ajusta a la forma en la que puede aplicarse la regla de la potencia para integración.

$$\int \frac{(\sqrt{x}-2)^{-3}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int (\sqrt{x}-2)^{-3}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right]$$

$$= 2\int u^{-3}\,du = 2\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{u^2} + C = -\frac{1}{(\sqrt{x}-2)^2} + C.$$

b. *Encontrar* $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx.$

Solución: si $u = \ln x$, entonces $du = \frac{1}{x}\,dx$, y

Aquí la integral se lleva a la forma conocida $\int \frac{1}{u}\,du$.

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\,dx\right) = \int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C,$$

c. *Encontrar* $\int \frac{5}{w(\ln w)^{3/2}}\,dw.$

Solución: si $u = \ln w$, entonces $du = \frac{1}{w}\,dw$. Aplicando la regla de la potencia para integración, tenemos

Aquí la integral se ajusta a la forma en la que se puede aplicar la regla de la potencia para integración.

$$\int \frac{5}{w(\ln w)^{3/2}}\,dw = 5\int (\ln w)^{-3/2}\left(\frac{1}{w}\,dw\right)$$

$$= 5\int u^{-3/2}\,du = 5\cdot\frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{-10}{u^{1/2}} + C = -\frac{10}{(\ln w)^{1/2}} + C.$$

Integración de a^u

En la sección 14.3 integramos una función exponencial con base *e:*

$$\int e^u \, du = e^u + C.$$

Consideremos ahora la integral de una función exponencial con una base diferente a *e:*

$$\int a^u \, du.$$

Para encontrar esta integral, primero convertimos a^u en una función exponencial con base e por medio del uso de la propiedad 8 de la sección 5.3:

$$a = e^{\ln a}. \tag{1}$$

El ejemplo 3 ilustrará esto.

EJEMPLO 3 Una integral que incluye $a^u \, du$

Encontrar $\int 2^{3-x} \, dx$.

Solución:

Estrategia: queremos integrar una función exponencial con base 2. Para hacer esto, primero convertimos de base 2 a base e usando la ecuación (1) para escribir 2 en términos de e.

Como $2 = e^{\ln 2}$, tenemos

$$\int 2^{3-x} \, dx = \int (e^{\ln 2})^{3-x} \, dx = \int e^{(\ln 2)(3-x)} \, dx.$$

La última integral tiene un integrando de la forma e^u, donde $u = (\ln 2)(3 - x)$. Como $du = -\ln 2 \, dx$, tenemos

$$\int e^{(\ln 2)(3-x)} \, dx = -\frac{1}{\ln 2}\int e^{(\ln 2)(3-x)}[(-\ln 2) \, dx] \quad \left(\text{de la forma: } \int e^u \, du\right)$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}e^{(\ln 2)(3-x)} + C = -\frac{1}{\ln 2}2^{3-x} + C.$$

Así,

$$\int 2^{3-x} \, dx = -\frac{1}{\ln 2}2^{3-x} + C.$$

Note que expresamos la respuesta en términos de una función exponencial con base 2, la base del integrando original.

Generalizando el procedimiento descrito en el ejemplo 3, podemos obtener una fórmula para integrar a^u:

$$\int a^u\,du = \int (e^{\ln a})^u\,du = \int e^{(\ln a)\,u}\,du$$

$$= \frac{1}{\ln a}\int e^{(\ln a)u}[(\ln a)\,du] \qquad (\ln a \text{ es constante})$$

$$= \frac{1}{\ln a}e^{(\ln a)u} + C = \frac{1}{\ln a}(e^{\ln a})^u + C$$

$$= \frac{1}{\ln a}a^u + C \qquad (e^{\ln a} = a).$$

De aquí, tenemos

$$\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C.$$

Aplicando esta fórmula a la integral del ejemplo 3 resulta

$$\int 2^{3-x}\,dx \qquad (a = 2, u = 3 - x)$$

$$= -\int 2^{3-x}(-\,dx) \qquad (du = -dx)$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}2^{3-x} + C,$$

que es el mismo resultado obtenido antes.

Aplicación de la integración

Ahora, consideraremos una aplicación de la integración que relaciona una función de consumo con la propensión marginal al consumo.

EJEMPLO 4 Determinación de una función de consumo a partir de la propensión marginal al consumo

Para cierto país, la propensión marginal al consumo está dada por

$$\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}},$$

donde el consumo C es una función del ingreso nacional I. Aquí, I se expresa en miles de millones de slugs (50 *slugs* = $0.01). *Determinar la función de consumo para el país si se sabe que el consumo es de* 10 *mil millones de slugs* ($C = 10$) *cuando* $I = 12$.

Solución: como la propensión marginal al consumo es la derivada de C, tenemos

$$C = \int\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}\right)dI = \int\frac{3}{4}\,dI - \frac{1}{2}\int(3I)^{-1/2}\,dI$$

$$= \frac{3}{4}I - \frac{1}{2}\int(3I)^{-1/2}\,dI.$$

Si hacemos $u = 3I$, entonces $du = 3\,dI$ y

$$C = \frac{3}{4}I - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\int (3I)^{-1/2}[3\ dI]$$
$$= \frac{3}{4}I - \frac{1}{6}\frac{(3I)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C_1.$$
$$C = \frac{3}{4}I - \frac{\sqrt{3I}}{3} + C_1.$$

Éste es un ejemplo de un problema con condiciones iniciales.

Cuando $I = 12$, entonces $C = 10$, por lo que

$$10 = \frac{3}{4}(12) - \frac{\sqrt{3(12)}}{3} + C_1,$$
$$10 = 9 - 2 + C_1.$$

Por tanto $C_1 = 3$ y la función de consumo es

$$C = \frac{3}{4}I - \frac{\sqrt{3I}}{3} + 3.$$

Ejercicio 14.4

En los problemas del 1 al 56 determine las integrales indefinidas.

1. $\int \frac{2x^4 + 3x^3 - x^2}{x^3}\,dx.$

2. $\int \frac{9x^2 + 5}{3x}\,dx.$

3. $\int (3x^2 + 2)\sqrt{2x^3 + 4x + 1}\,dx.$

4. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^2 + 1}}\,dx.$

5. $\int \frac{15}{\sqrt{4 - 5x}}\,dx.$

6. $\int \frac{2xe^{x^2}\,dx}{e^{x^2} - 2}.$

7. $\int 4^{7x}\,dx.$

8. $\int 3^x\,dx.$

9. $\int 2x(7 - e^{x^2/4})\,dx.$

10. $\int \left(e^x + x^e + ex + \frac{e}{x}\right)dx.$

11. $\int \frac{6x^2 - 11x + 5}{3x - 1}\,dx.$

12. $\int \frac{(2x - 1)(x + 3)}{x - 5}\,dx.$

13. $\int \frac{3e^{2x}}{e^{2x} + 1}\,dx.$

14. $\int 6(e^{4-3x})^2\,dx.$

15. $\int \frac{e^{7/x}}{x^2}\,dx.$

16. $\int \frac{2x^4 - 6x^3 + x - 2}{x - 2}\,dx.$

17. $\int \frac{2x^3}{x^2 - 4}\,dx.$

18. $\int \frac{5 - 4x^2}{3 + 2x}\,dx.$

19. $\int \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{3\sqrt{x}}\,dx.$

20. $\int \frac{3e^s}{6 + 5e^s}\,ds.$

21. $\int \frac{5(x^{1/3} + 2)^4}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

22. $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

23. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$

24. $\int \sqrt{t}(5 - t\sqrt{t})^{0.4}\,dt.$

25. $\int \frac{\ln^2(r + 1)}{r + 1}\,dr.$

26. $\int \frac{8x^3 - 6x^2 - ex^4}{3x^3}\,dx.$

27. $\int \frac{3^{\ln x}}{x}\,dx.$

28. $\int \frac{4}{x\ln(2x^2)}\,dx.$

29. $\int x\sqrt{e^{x^2+3}}\,dx.$

30. $\int \frac{x + 3}{x + 6}\,dx.$

31. $\int \frac{8}{(x + 3)\ln(x + 3)}\,dx.$

32. $\int (x^{e^2} + 2x)\,dx.$

33. $\int \frac{x^3 + x^2 - x - 3}{x^2 - 3}\,dx.$

34. $\displaystyle\int \frac{4x \ln \sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx.$

35. $\displaystyle\int \frac{6x\sqrt{\ln(x^2+1)^2}}{x^2+1}\,dx.$

36. $\displaystyle\int 3(x^2+2)^{-1/2}xe^{\sqrt{x^2+2}}\,dx.$

37. $\displaystyle\int \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^4-1}} - \ln 4\right)dx.$

38. $\displaystyle\int \frac{x - x^{-2}}{x^2+2x^{-1}}\,dx.$

39. $\displaystyle\int \frac{2x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4}{x^3}\,dx.$

40. $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx.$

41. $\displaystyle\int \frac{x}{x-1}\,dx.$

42. $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}\,dx.$

43. $\displaystyle\int \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+2}}\,dx.$

44. $\displaystyle\int \frac{7}{(2x+1)[1+\ln(2x+1)]^2}\,dx.$

45. $\displaystyle\int \frac{(e^{-x}+6)^2}{e^x}\,dx.$

46. $\displaystyle\int \left[\frac{1}{8x+1} - \frac{1}{e^x(8+e^{-x})^2}\right]dx.$

47. $\displaystyle\int (x^3 + ex)\sqrt{x^2+e}\,dx.$

48. $\displaystyle\int 2^{x \ln x}(1+\ln x)\,dx.$

49. $\displaystyle\int \sqrt{x}\sqrt{(8x)^{3/2}+3}\,dx.$

50. $\displaystyle\int \frac{3}{x(\ln x)^{1/2}}\,dx.$

51. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{s}}{e^{\sqrt{s^3}}}\,ds.$

52. $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{3x}\,dx.$

53. $\displaystyle\int e^{\ln(x+2)}\,dx.$

54. $\displaystyle\int dx.$

55. $\displaystyle\int \frac{\ln(xe^x)}{x}\,dx.$

56. $\displaystyle\int 2e^{x^2+\ln x}\,dx.$

En los problemas 57 y 58, dr/dq es una función de ingreso marginal. Encuentre la función de demanda.

57. $\displaystyle\frac{dr}{dq} = \frac{200}{(q+2)^2}.$

58. $\displaystyle\frac{dr}{dq} = \frac{900}{(2q+3)^3}.$

En los problemas 59 y 60, dc/dq es una función de costo marginal. Encuentre la función de costo total, si los costos fijos en cada caso son de 2000.

59. $\displaystyle\frac{dc}{dq} = \frac{20}{q+5}.$

60. $\displaystyle\frac{dc}{dq} = 2e^{0.001q}.$

En los problemas del 61 al 63, dC/dI representa la propensión marginal al consumo. Encuentre la función de consumo sujeta a la condición dada.

61. $\displaystyle\frac{dC}{dI} = \frac{1}{\sqrt{I}};\quad C(9) = 8.$

62. $\displaystyle\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}};\quad C(3) = \frac{11}{4}.$

63. $\displaystyle\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{6\sqrt{I}};\quad C(25) = 23.$

---

64. Función de costo La función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = 10 - \frac{100}{q+10},$$

donde c es el costo total en dólares cuando se producen q unidades. Cuando se producen 100 unidades, el costo promedio es de \$50 por unidad. Con aproximación a la unidad de dólar más cercana, determine el costo fijo del fabricante.

65. Función de costo Suponga que la función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = \frac{100q^2 - 4998q + 50}{q^2 - 50q + 1},$$

donde c es el costo total en dólares cuando se producen q unidades.

a. Determine el costo marginal cuando se producen 50 unidades.

b. Si los costos fijos son de \$10,000, encuentre el costo total de producir 50 unidades.

c. Use el resultado de las partes (a) y (b) y diferenciales para aproximar el costo total de producir 52 unidades.

66. Función de costo La función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = \frac{9}{10}\sqrt{q}\sqrt{0.04q^{3/4}+4},$$

donde c es el costo total en dólares cuando se producen q unidades. Los costos fijos son de \$360.

a. Determine el costo marginal cuando se producen 25 unidades.

b. Encuentre el costo total de producir 25 unidades.

c. Use los resultados de las partes (a) y (b) y diferenciales para estimar el costo total de producir 23 unidades.

67. Valor de la tierra Se estima que dentro de t años, contados a partir de ahora, el valor V (en dólares) de un acre de tierra cerca del pueblo fantasma de Cherokee, California, estará creciendo a razón de $\dfrac{8t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}$ dólares por año. Si el valor de la tierra es actualmente

de $500 por acre, ¿cuánto costará dentro de 10 años? Exprese su resultado al dólar más cercano.

68. Función de ingreso La función de ingreso marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dr}{dq} = \frac{3}{e^q + 2},$$

donde r es el ingreso total recibido (en dólares) cuando se producen y venden q unidades. Encuentre la función de demanda y exprésela en la forma $p = f(q)$. [*Sugerencia:* escriba nuevamente dr/dq al multiplicar numerador y denominador por e^{-q}.]

69. Ahorro La propensión marginal al ahorro en cierto país está dada por

$$\frac{dS}{dI} = \frac{5}{(I + 2)^2}$$

donde S e I representan el ahorro y el ingreso totales nacionales, respectivamente, y están medidos en miles de millones de dólares. Si el consumo total nacional es de $7.5 mil millones cuando el ingreso total nacional es de $8 mil millones, ¿para qué valor o valores de I el ahorro total nacional es igual a cero?

70. Función de consumo La propensión marginal al ahorro en cierto país está dada por

$$\frac{dS}{dI} = \frac{1}{2} - \frac{1.8}{\sqrt[3]{3I^2}},$$

donde S e I representan el ahorro y el ingreso totales nacionales, respectivamente, y están medidos en miles de millones de dólares.

a. Determine la propensión marginal al consumo cuando el ingreso total nacional es de $81 mil millones.
b. Determine la función de consumo si el ahorro es de $3 mil millones cuando el ingreso total nacional es de $24 mil millones.
c. Use el resultado de la parte (b) para mostrar que el consumo es de $54.9 mil millones cuando el ingreso total nacional es de $81 mil millones.
d. Use diferenciales y los resultados de las partes (a) y (c) para estimar el consumo cuando el ingreso total nacional es de $78 mil millones.

OBJETIVO Introducir la notación sigma y dar fórmulas de sumas que se utilizarán en la sección siguiente.

14.5 SUMATORIA

Con el fin de prepararlo para otras aplicaciones de la integración, tendremos que analizar ciertas sumas.

Consideremos el cálculo de la suma S de los primeros n enteros positivos:

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n. \quad (1)$$

Si escribimos los términos del miembro derecho de la ecuación (1) en orden inverso tenemos

$$S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1. \quad (2)$$

Al sumar los miembros correspondientes de las ecuaciones (1) y (2) resulta

$$\begin{array}{rcccccccc} S = & 1 & + & 2 & + \cdots + & (n-1) & + & n \\ S = & n & + & (n-1) & + \cdots + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S = & (n+1) & + & (n+1) & + \cdots + & (n+1) & + & (n+1). \end{array}$$

En el miembro derecho de la última ecuación el término $(n + 1)$ aparece n veces. Así, $2S = n(n + 1)$, por lo que

$$S = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(suma de los primeros } n \text{ enteros positivos).} \quad (3)$$

Por ejemplo, la suma de los primeros 100 enteros positivos corresponde a $n = 100$ y es $100(100 + 1)/2$ o 5050.

Por conveniencia, para indicar una suma introduciremos la *notación sigma* o *de sumatoria*, llamada así por la letra griega Σ (sigma) que se usa. Por ejemplo, la notación

$$\sum_{k=1}^{3} (2k + 5)$$

denota la suma de aquellos números que se obtienen de la expresión $2k + 5$ al reemplazar primero k por 1, luego por 2 y finalmente por 3. Así,

$$\sum_{k=1}^{3}(2k+5) = [2(1)+5] + [2(2)+5] + [2(3)+5]$$

$$= 7 + 9 + 11 = 27.$$

La letra k se llama *índice de la sumatoria;* los número 1 y 3 son los *límites de la sumatoria* (1 es el *límite inferior* y 3 el *límite superior*). Los valores del índice comienzan en el límite inferior y toman valores enteros sucesivos hasta llegar al límite superior. El símbolo usado para el índice es "mudo", en el sentido de que no afecta a la suma de los términos. Puede usarse cualquier otra letra. Por ejemplo,

$$\sum_{j=1}^{3}(2j+5) = 7 + 9 + 11 = \sum_{k=1}^{3}(2k+5).$$

EJEMPLO 1 Notación sigma

a. *Evaluar* $\displaystyle\sum_{k=4}^{7}\frac{k^2+3}{2}$.

Solución: aquí, la suma comienza con $k = 4$. De modo que tenemos

$$\sum_{k=4}^{7}\frac{k^2+3}{2} = \frac{4^2+3}{2} + \frac{5^2+3}{2} + \frac{6^2+3}{2} + \frac{7^2+3}{2}$$

$$= \frac{19}{2} + \frac{28}{2} + \frac{39}{2} + \frac{52}{2} = 69.$$

b. *Evaluar* $\displaystyle\sum_{j=0}^{2}(-1)^{j+1}(j-1)^2$.

Solución:

$$\sum_{j=0}^{2}(-1)^{j+1}(j-1)^2$$

$$= (-1)^{0+1}(0-1)^2 + (-1)^{1+1}(1-1)^2 + (-1)^{2+1}(2-1)^2$$

$$= (-1) + 0 + (-1) = -2.$$

Para expresar la suma de los primeros n enteros positivos en notación sigma, podemos escribir

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Por la ecuación (3),

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (4)$$

Note en la ecuación (4) que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ es una función sólo de n, no de k.

EJEMPLO 2 Aplicación de la fórmula 4

a. *Evaluar* $\sum_{k=1}^{60} k$.

Solución: aquí, debemos encontrar la suma de los primeros 60 números enteros positivos. Por la ecuación (4) con $n = 60$,

$$\sum_{k=1}^{60} k = \frac{60(60 + 1)}{2} = 1830.$$

b. *Evaluar* $\sum_{k=1}^{n-1} k$.

Solución: aquí se deben sumar los primeros $n - 1$ enteros positivos. Reemplazando n por $n - 1$ en la ecuación (4), obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n - 1)[(n - 1) + 1]}{2} = \frac{(n - 1)n}{2}.$$

Otra fórmula útil es la de la suma de los *cuadrados* de los primeros n enteros positivos:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}. \quad \textbf{(5)}$$

EJEMPLO 3 Aplicación de la fórmula 5

Evaluar $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$.

Solución: esta suma puede escribirse como $\sum_{k=1}^{6} k^2$. Por la ecuación (5) con $n = 6$,

$$\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{6(6 + 1)[2(6) + 1]}{6} = 91.$$

Concluimos con una propiedad de sigma. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales y c es una constante, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = cx_1 + cx_2 + \cdots + cx_n$$

$$= c(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = c\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Esto significa que un factor constante puede “salir” del símbolo de sumatoria. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{5} 3i^2 = 3\sum_{i=1}^{5} i^2.$$

Por la ecuación (5), tenemos

$$\sum_{i=1}^{5} 3i^2 = 3\sum_{i=1}^{5} i^2 = 3\left[\frac{5(6)(11)}{6}\right] = 165.$$



Advertencia Aunque los factores constantes pueden "salir" del signo de suma, ninguna otra cosa puede salir.

Ejercicio 14.5

En los problemas del 1 al 10 evalúe la suma indicada.

1. $\sum_{k=1}^{5} (k + 4)$.

2. $\sum_{k=12}^{15} (7 - 2k)$.

3. $\sum_{j=1}^{10} (-1)^j$.

4. $\sum_{j=0}^{5} 2^j$.

5. $\sum_{n=2}^{3} (3n^2 - 7)$.

6. $\sum_{n=2}^{4} \frac{n+1}{n-1}$.

7. $\sum_{k=3}^{4} \frac{(-1)^k(k+1)}{2^k}$.

8. $\sum_{n=1}^{5} 4$.

9. $\sum_{k=1}^{3} \frac{(-1)^{k-1}(1-k^2)}{k}$.

10. $\sum_{n=1}^{4} (n^2 + n)$.

En los problemas del 11 al 16 exprese las sumas dadas por medio de la notación sigma.

11. $1 + 2 + 3 + \cdots + 19$.

12. $7 + 8 + 9 + 10$.

13. $1 + 3 + 5 + 7$.

14. $2 + 4 + 6 + 8$.

15. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$.

16. $3 + 6 + 9 + 12$.

En los problemas del 17 al 22 evalúe las sumas por medio de las ecuaciones (4) y (5).

17. $\sum_{k=1}^{450} k$.

18. $\sum_{k=1}^{10} k^2$.

19. $\sum_{j=1}^{6} 4j$.

20. $\sum_{i=1}^{40} \frac{i}{2}$.

21. $\sum_{i=1}^{6} 3i^2$.

22. $\sum_{j=1}^{8} \left(\frac{j}{2}\right)^2$.

23. Una compañía tiene un activo cuyo valor original es de \$3200 y no tiene valor de recuperación. El costo de mantenimiento anual es de \$100 y aumenta \$100 cada año. Demuestre que el costo promedio total anual C en un periodo de n años es

$$C = \frac{3200}{n} + 50(n + 1).$$

Encuentre el valor de n que minimiza a C. ¿Cuál es el costo promedio anual para este valor de n?

OBJETIVO Explicar, por medio del concepto de área, la integral definida como un límite de una suma especial; evaluar integrales definidas sencillas por medio del proceso de límite.

14.6 La integral definida

La figura 14.1 muestra la región R limitada por las líneas $y = f(x) = 2x$, $y = 0$ (el eje x) y $x = 1$. La región es simplemente un triángulo rectángulo. Si b y h son las longitudes de la base y de la altura, respectivamente, entonces, de geometría, el área A del triángulo es $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(1)(2) = 1$ unidad cuadrada. Encontraremos ahora esta área por otro método, el cual como veremos

posteriormente, se aplica a regiones más complejas. Este método implica la suma de áreas de rectángulos.

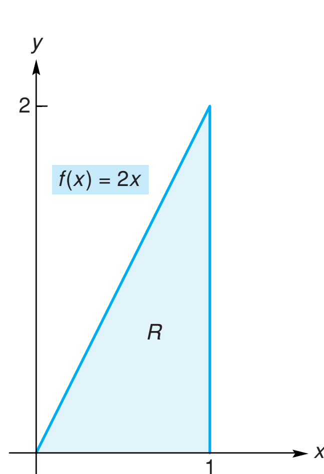


FIGURA 14.1 Región acotada por $f(x) = 2x$, $y = 0$, y $x = 1$
.

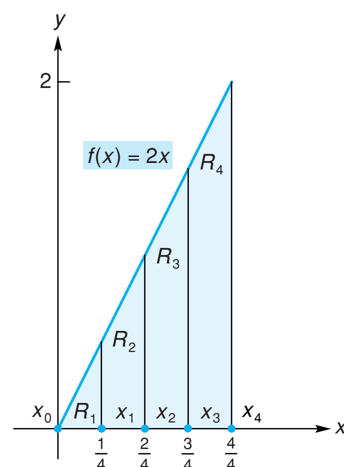


FIGURA 14.2 Cuatro subregiones de R.

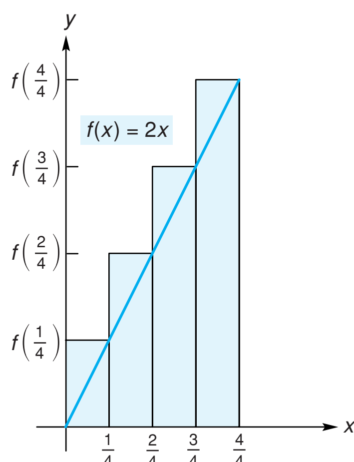


FIGURA 14.3 Cuatro rectángulos circunscritos.

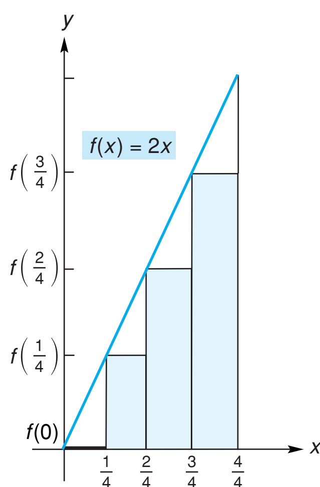


FIGURA 14.4 Cuatro rectángulos inscritos.

Dividamos el intervalo [0, 1] sobre el eje x, en cuatro subintervalos de igual longitud por medio de puntos igualmente separados, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{2}{4}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, y $x_4 = \frac{4}{4} = 1$. (Véase la fig. 14.2.) Cada subintervalo tiene longitud de $\Delta x = \frac{1}{4}$. Estos subintervalos determinan cuatro subregiones de R: R_1, R_2, R_3 y R_4, como se indica.

Con cada subregión podemos asociar un rectángulo *circunscrito* (véase la fig. 14.3), esto es, un rectángulo cuya base es el correspondiente subintervalo y cuya altura es el valor *máximo* de $f(x)$ en cada subintervalo. Como f es una función creciente, el valor máximo de $f(x)$ en cada subintervalo ocurre cuando x es el extremo derecho de éste. Así, las áreas de los rectángulos circunscritos asociados con las regiones R_1, R_2, R_3 y R_4 son $\frac{1}{4}f(\frac{1}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{2}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{3}{4})$ y $\frac{1}{4}f(\frac{4}{4})$, respectivamente. El área de cada rectángulo es una aproximación al área de su correspondiente subregión. Así, la suma de las áreas de estos rectángulos, denotada por $\overline{S}_4$ (se lee "suma superior considerando 4 subintervalos"), aproxima el área A del triángulo. Tenemos

$$\begin{aligned}\overline{S}_4 &= \tfrac{1}{4}f(\tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{2}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{3}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{4}{4})\\ &= \tfrac{1}{4}[2(\tfrac{1}{4}) + 2(\tfrac{2}{4}) + 2(\tfrac{3}{4}) + 2(\tfrac{4}{4})] = \tfrac{5}{4}.\end{aligned}$$

Usted puede verificar que es posible escribir $\overline{S}_4$ como $\overline{S}_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x$. El hecho de que $\overline{S}_4$ es mayor que el área real del triángulo era de esperarse, ya que $\overline{S}_4$ incluye áreas de regiones sombreadas que no pertenecen al triángulo (véase la fig. 14.3).

Por otra parte, con cada subregión podemos también asociar un rectángulo *inscrito* (véase la fig. 14.4), esto es, un rectángulo cuya base es el subintervalo correspondiente pero cuya altura es el valor *mínimo* de $f(x)$ en ese subintervalo. Como f es una función creciente, el valor mínimo de $f(x)$ en cada subintervalo ocurrirá cuando x sea el extremo izquierdo de éste. Así, las áreas de los cuatro rectángulos inscritos asociados con R_1, R_2, R_3 y R_4 son $\frac{1}{4}f(0)$, $\frac{1}{4}f(\frac{1}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{2}{4})$ y $\frac{1}{4}f(\frac{3}{4})$, respectivamente. Su suma, denotada $\underline{S}_4$ (se lee "suma

inferior considerando 4 intervalos") es también una aproximación al área A del triángulo. Tenemos

$$\underline{S}_4 = \tfrac{1}{4}f(0) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{2}{4}) + \tfrac{1}{4}f(\tfrac{3}{4})$$

$$= \tfrac{1}{4}[2(0) + 2(\tfrac{1}{4}) + 2(\tfrac{2}{4}) + 2(\tfrac{3}{4})] = \tfrac{3}{4}.$$

Usando la notación sigma podemos escribir $\underline{S}_4 = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\Delta x$. Observe que $\underline{S}_4$ es menor que el área del triángulo porque los rectángulos no toman en cuenta aquella porción del triángulo que no está sombreada en la figura 14.4.

Como

$$\tfrac{3}{4} = \underline{S}_4 \leq A \leq \overline{S}_4 = \tfrac{5}{4},$$

decimos que $\underline{S}_4$ es una aproximación a A por *abajo* y $\overline{S}_4$ es una aproximación a A por *arriba*.

Si $[0, 1]$ se divide en más subintervalos, esperamos que ocurran mejores aproximaciones a A. Para probar esto, usemos seis subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{1}{6}$. Entonces $\overline{S}_6$ el área total de seis rectángulos circunscritos (véase la fig. 14.5), y $\underline{S}_6$, el área total de seis rectángulos inscritos (véase la fig. 14.6), son

$$\overline{S}_6 = \tfrac{1}{6}f(\tfrac{1}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{2}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{3}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{4}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{5}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{6}{6})$$

$$= \tfrac{1}{6}[2(\tfrac{1}{6}) + 2(\tfrac{2}{6}) + 2(\tfrac{3}{6}) + 2(\tfrac{4}{6}) + 2(\tfrac{5}{6}) + 2(\tfrac{6}{6})] = \tfrac{7}{6}$$

y

$$\underline{S}_6 = \tfrac{1}{6}f(0) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{1}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{2}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{3}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{4}{6}) + \tfrac{1}{6}f(\tfrac{5}{6})$$

$$= \tfrac{1}{6}[2(0) + 2(\tfrac{1}{6}) + 2(\tfrac{2}{6}) + 2(\tfrac{3}{6}) + 2(\tfrac{4}{6}) + 2(\tfrac{5}{6})] = \tfrac{5}{6}.$$

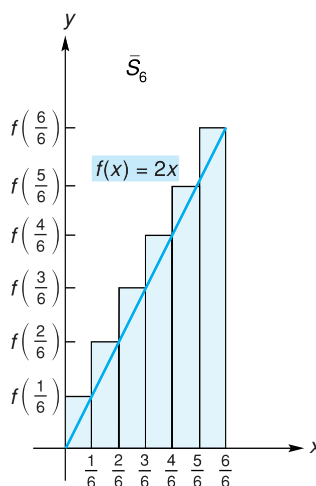


FIGURA 14.5 Seis rectángulos circunscritos.

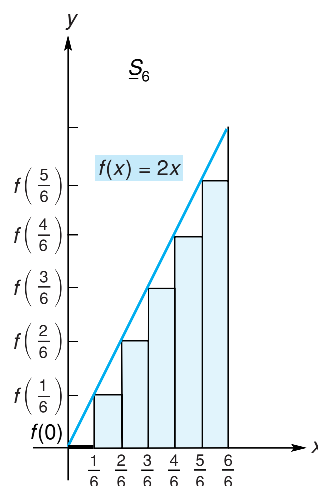


FIGURA 14.6 Seis rectángulos inscritos.

Observe que $\underline{S}_6 \leq A \leq \overline{S}_6$ y, con la notación apropiada, tanto $\overline{S}_6$ como $\underline{S}_6$ serán de la forma $\Sigma f(x)\Delta x$. Es claro que usando seis subintervalos se obtuvo una mejor aproximación al área que con cuatro subintervalos, como era de esperarse.

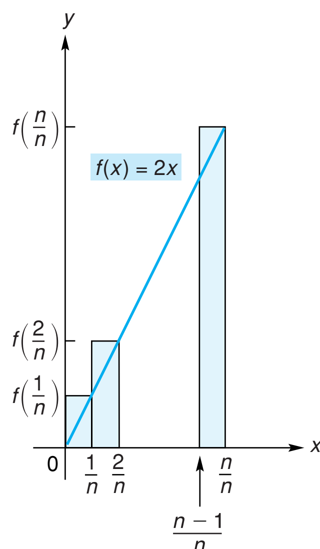


FIGURA 14.7 n rectángulos circunscritos.

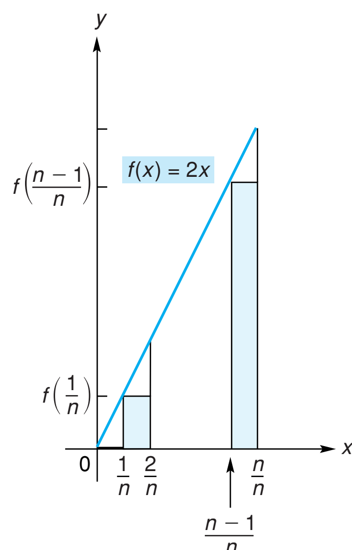


FIGURA 14.8 n rectángulos inscritos.

En términos generales, si dividimos $[0, 1]$ en n subintervalos de igual longitud Δx, entonces $\Delta x = 1/n$ y los puntos extremos de los subintervalos son $x = 0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n$, y $n/n = 1$ (véase la fig. 14.7). El área de n rectángulos *circunscritos* es

$$\begin{aligned}\overline{S}_n &= \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right) \qquad (1)\\ &= \frac{1}{n}\left[2\left(\frac{1}{n}\right) + 2\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + 2\left(\frac{n}{n}\right)\right]\\ &= \frac{2}{n^2}[1 + 2 + \cdots + n] \qquad \textit{(al factorizar } \frac{2}{n} \text{ en cada término).}\end{aligned}$$

De la sección 14.5, la suma de los n primeros enteros positivos es $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Así,

$$\overline{S}_n = \left(\frac{2}{n^2}\right)\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{n}.$$

Para n rectángulos *inscritos*, el área total determinada por los subintervalos (véase la fig. 14.8) es

$$\begin{aligned}\underline{S}_n &= \frac{1}{n}f(0) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n}f\left(\frac{n-1}{n}\right) \qquad (2)\\ &= \frac{1}{n}\left[2(0) + 2\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + 2\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]\\ &= \frac{2}{n^2}[1 + \cdots + (n-1)].\end{aligned}$$

Sumando los primeros $n - 1$ enteros positivos, como hicimos en el ejemplo 2(b) de la sección 14.5, obtenemos

$$\underline{S}_n = \left(\frac{2}{n^2}\right)\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{n}.$$

De las ecuaciones (1) y (2) se observa nuevamente que $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ son sumas de la *forma* $\Sigma f(x)\Delta x$, es decir, $\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\Delta x$ y $\underline{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\Delta x$.

Por la naturaleza de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ parece razonable, y de hecho es cierto, que

$$\underline{S}_n \leq A \leq \overline{S}_n.$$

Conforme n crece, $\underline{S}_n$ y $\overline{S}_n$ resultan ser mejores aproximaciones para A. De hecho, tomamos los límites de $\underline{S}_n$ y $\overline{S}_n$, cuando n tienda a ∞ a través de valores enteros positivos:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Como $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ tienen el mismo límite común, a saber,

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = 1, \quad (3)$$

y como

$$\underline{S}_n \leq A \leq \overline{S}_n,$$

debemos considerar este límite como el área del triángulo. Así, $A = 1$ unidad cuadrada, lo cual concuerda con nuestro valor anterior.

Llamamos al límite común de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$, o sea 1, la *integral definida* de $f(x) = 2x$ sobre el intervalo de $x = 0$ a $x = 1$, y denotamos esta cantidad escribiendo

$$\int_0^1 2x\,dx = 1. \quad (4)$$

La razón para usar el término *integral definida* y el simbolismo de la ecuación (4), será evidente en la siguiente sección. Los números 0 y 1 que aparecen con el signo $\int$ en la ecuación (4) se llaman *límites de integración*; 0 es el *límite inferior* y 1 es el *límite superior*.

En general, para una función f definida sobre el intervalo de $x = a$ a $x = b$, donde $a < b$, podemos formar las sumas $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$, que se obtienen considerando los valores máximo y mínimo, respectivamente, en cada uno de n subintervalos de igual longitud Δx.[5] Ahora podemos establecer lo siguiente:

El límite común de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ cuando $n \to \infty$, si éste existe, se llama **integral definida** de f sobre $[a, b]$ y se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Los números a y b se llaman **límites de integración;** a es el **límite inferior** y b es el **límite superior.** EL símbolo x se llama **variable de integración** y $f(x)$ es el **integrando.**

En términos de un proceso límite, tenemos

$$\sum f(x)\,\Delta x \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

La integral definida es el límite de la forma $\Sigma f(x)\,\Delta x$. Esta interpretación será útil en secciones posteriores.

Debemos aclarar dos puntos acerca de la integral definida. Primero, la integral definida es el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x)\,\Delta x$. De hecho, podemos pensar el signo de integral como una "S" alargada, que es la primera letra de "sumatoria". Segundo, para una función f arbitraria definida en un intervalo, podemos calcular las sumas $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ y determinar su límite común en caso de que exista. Sin embargo, algunos términos de las sumas pueden ser negativos, si $f(x)$ es negativa en puntos del intervalo. Estos términos no son áreas de rectángulos (un área nunca es negativa), por lo que el límite común puede no representar un área. Así, **la integral definida no es otra cosa que un número real y puede o no representar un área.**

Como vimos en la ecuación (3) $\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n$ es igual a $\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n$. Para una función arbitraria esto no siempre es cierto. Sin embargo, para las funciones que consideraremos, esos límites serán iguales y la integral definida siempre existirá. Para

[5] Aquí suponemos que los valores máximo y mínimo existen.

ahorrar tiempo, usaremos sólo el **extremo derecho** de cada subintervalo al calcular una suma. Para las funciones en esta sección, esta suma se denotará como S_n y corresponderá ya sea a $\underline{S}_n$ o bien a $\overline{S}_n$.

En general, en $[a, b]$, tenemos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

EJEMPLO 1 Cálculo de un área usando extremos derechos

Encontrar el área de la región en el primer cuadrante limitada por $f(x) = 4 - x^2$ *y las rectas* $x = 0$ *y* $y = 0$.

Solución: en la figura 14.9 se da el bosquejo de la región. Se ve que el intervalo en el cual varía x es $[0, 2]$, que subdividimos en n subintervalos de igual longitud Δx. Como la longitud de $[0, 2]$ es 2, tomamos $\Delta x = 2/n$. Los extremos de los subintervalos son $x = 0, 2/n, 2(2/n), \ldots, (n-1)(2/n)$ y $n(2/n) = 2$, que se muestran en la figura 14.10. El diagrama también muestra los correspondientes rectángulos obtenidos usando el extremo derecho de cada subintervalo. El área de cada rectángulo es el producto de su ancho $(2/n)$ y su altura, que es el valor en el extremo derecho de su base. Al sumar estas áreas, obtenemos

Principios en práctica 1

Cálculo de un área por medio de los extremos del lado derecho

Una compañía ha determinado que su función de ingreso marginal está dada por $R'(x) = 600 - 0.5x$, en donde R es el ingreso (en dólares) recibido cuando se venden x unidades. Determine el ingreso total recibido por la venta de 10 unidades, determinando el área en el primer cuadrante acotada por $y = R'(x) = 600 - 0.5x$ y las rectas $y = 0, x = 0,$ y $x = 10$.

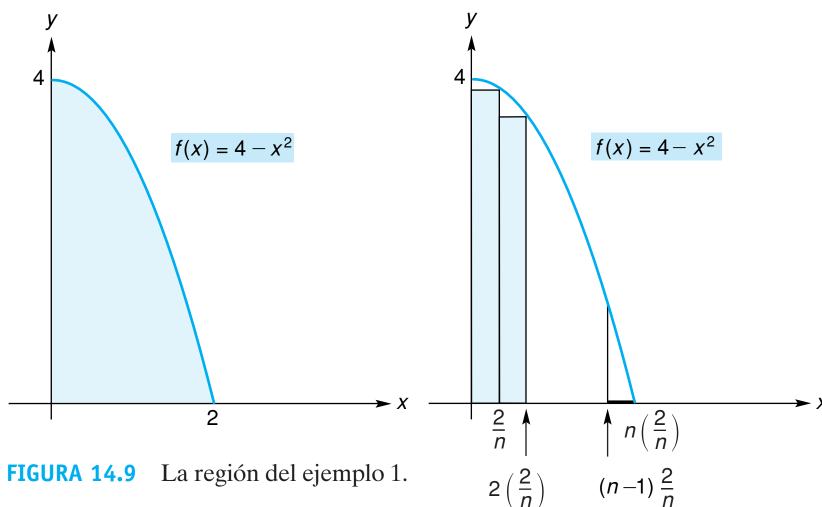


FIGURA 14.9 La región del ejemplo 1.

FIGURA 14.10 n subintervalos y los rectángulos correspondientes para el ejemplo 1.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{2}{n}f\left[2\left(\frac{2}{n}\right)\right] + \cdots + \frac{2}{n}f\left[n\left(\frac{2}{n}\right)\right] \\ &= \frac{2}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left[2\left(\frac{2}{n}\right)\right] + \cdots + f\left[n\left(\frac{2}{n}\right)\right]\right] \\ &= \frac{2}{n}\left[\left\{4 - \left(\frac{2}{n}\right)^2\right\} + \left\{4 - \left[2\left(\frac{2}{n}\right)\right]^2\right\} + \cdots + \left\{4 - \left[n\left(\frac{2}{n}\right)\right]^2\right\}\right]. \end{aligned}$$

Como el número 4 aparece n veces en la suma, podemos simplificar S_n. Obtenemos

$$S_n = \frac{2}{n}\left[4n - \left(\frac{2}{n}\right)^2 - 2^2\left(\frac{2}{n}\right)^2 - \cdots - n^2\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{2}{n}\left[4n - \left(\frac{2}{n}\right)^2 \{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\}\right].$$

De la sección 14.5, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, por lo que

$$S_n = \frac{2}{n}\left[4n - \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= 8 - \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} \qquad \text{(distribución)}$$

$$= 8 - \frac{4}{3}\left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}\right) \qquad \text{(expansión).}$$

Por último, se considera el límite de S_n cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[8 - \frac{4}{3}\left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[8 - \frac{4}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{16}{3}.$$

Por consiguiente, el área de la región es de $\frac{16}{3}$ unidades cuadradas.

■ **EJEMPLO 2 Evaluación de una integral definida**

Evaluar $\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$.

Solución: queremos encontrar la integral definida de $f(x) = 4 - x^2$ sobre el intervalo $[0, 2]$. Así, tenemos que calcular $\lim_{n\to\infty} S_n$. Pero este límite es precisamente el límite $\frac{16}{3}$ encontrado en el ejemplo 1, por ello concluimos que

No se le agregan unidades a la respuesta, ya que una integral definida es sólo un número sin dimensiones.

$$\int_0^2 (4 - x^2)\, dx = \frac{16}{3}.$$

■ **EJEMPLO 3 Integración de una función sobre un intervalo**

Integrar $f(x) = x - 5$ *entre* $x = 0$ *y* $x = 3$; *esto es, evaluar* $\int_0^3 (x - 5)\, dx$.

Solución: primero dividimos $[0, 3]$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = 3/n$. Los puntos extremos son $0,\ 3/n, 2(3/n),\ \ldots, (n-1)(3/n), n(3/n) = 3$ (véase la fig. 14.11). Usando los extremos derechos formamos la suma

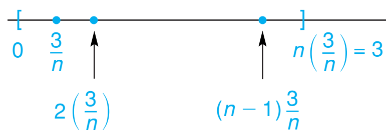


FIGURA 14.11 División de [0, 3] en n subintervalos.

$$S_n = \frac{3}{n}f\left(\frac{3}{n}\right) + \frac{3}{n}f\left[2\left(\frac{3}{n}\right)\right] + \cdots + \frac{3}{n}f\left[n\left(\frac{3}{n}\right)\right].$$

Al simplificar, tenemos

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{3}{n}\left[\left\{\frac{3}{n} - 5\right\} + \left\{2\left(\frac{3}{n}\right) - 5\right\} + \cdots + \left\{n\left(\frac{3}{n}\right) - 5\right\}\right] \\ &= \frac{3}{n}\left[-5n + \frac{3}{n}\{1 + 2 + \cdots + n\}\right] \\ &= \frac{3}{n}\left[-5n + \left(\frac{3}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2}\right] \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= -15 + \frac{9}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \\ &= -15 + \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Al calcular el límite, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[-15 + \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = -15 + \frac{9}{2} = -\frac{21}{2}.$$

Por tanto,

$$\int_0^3 (x - 5)\, dx = -\frac{21}{2}.$$

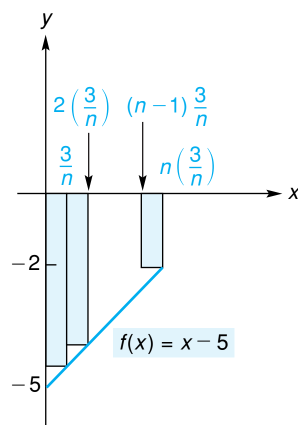


FIGURA 14.12 $f(x)$ es negativa en cada extremo derecho.

Observe que la integral definida en este caso es un número *negativo*. La razón es clara de la gráfica de $f(x) = x - 5$ en el intervalo [0, 3]. (Véase la fig. 14.12.) Como el valor $f(x)$ es negativo en cada extremo derecho, cada término en S_n debe también ser negativo. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} S_n$, que es la integral definida, es negativo. Geométricamente, cada término en S_n es el valor negativo del área de un rectángulo (véase la fig. 14.12). Aunque la integral definida es sólo un número, aquí podemos interpretarla como la representación del valor negativo del área de la región limitada por $f(x) = x - 5$, $x = 0$, $x = 3$ y el eje x ($y = 0$).

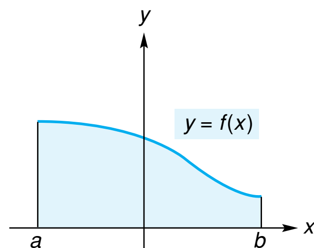


FIGURA 14.13 Si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\, dx$ representa el área.

En el ejemplo 3 se demostró que *la integral definida no tiene que representar un área*. De hecho, ahí la integral definida fue negativa. Sin embargo, si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $S_n \geq 0$ para todo valor de n. Por consiguiente, $\lim_{n\to\infty} S_n \geq 0$, por lo que $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$. Además, está integral definida da el área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ (véase la fig. 14.13).

Aunque el procedimiento que usamos para analizar la integral definida es suficiente para nuestros fines, no es riguroso. **Lo importante por recordar acerca de la integral definida es que es el límite de una suma especial.**

Tecnología

Aquí se presenta un programa para la calculadora gráfica TI-83 que estimará el límite de S_n cuando $n \to \infty$ para una función f definida en $[a, b]$.

```
PROGRAM:RIGHTSUM
Lbl 1
Input "SUBINTV",N
(B − A)/N → H
Ø → S
A + H → X
1 → I
Lbl 2
Y1 + S → S
X + H → X
I + 1 → I
If I ≤ N
Goto 2
H*S → S
Disp S
Pause
Goto 1
```

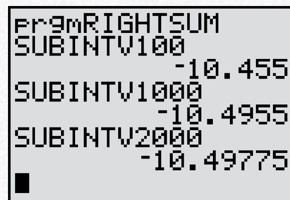


FIGURA 14.14 Los valores de S_n para $f(x) = x - 5$ en $[0, 3]$.

RIGHTSUM calculará S_n para un número dado n de subintervalos. Antes de ejecutar el programa, almacene $f(x)$, a y b como Y_1, A y B, respectivamente. Durante la ejecución del programa se le pedirá a usted indicar el número de subintervalos. El programa procederá entonces a exhibir el valor de S_n. Cada vez que oprima ENTER, el programa se repetirá. De esta manera, pueden obtenerse los valores de S_n para varios números de subintervalos. La figura 14.14 muestra valores de S_n ($n = 100$, 1000 y 2000) para la función $f(x) = x - 5$ en el intervalo $[0, 3]$. Cuando $n \to \infty$, se ve que $S_n \to -10.5$. Así estimamos que

$$\lim_{n\to\infty} S_n \approx -10.5,$$

o, de manera equivalente,

$$\int_0^3 (x - 5)\, dx \approx -10.5,$$

lo cual concuerda con nuestro resultado del ejemplo 3. Es interesante notar que el tiempo requerido por una calculadora para calcular S_{2000} en la figura 14.14 fue mayor de 1.5 minutos.

Ejercicio 14.6

En los problemas del 1 al 4 esboce la región del primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Aproxime el área de la región por medio de la suma indicada. Use el extremo derecho de cada subintervalo.

1. $f(x) = x, y = 0, x = 1;\quad S_3$.

2. $f(x) = 3x, y = 0, x = 1;\quad S_5$.

3. $f(x) = x^2, y = 0, x = 1;\quad S_3$.

4. $f(x) = x^2 + 1, y = 0, x = 0, x = 1;\quad S_2$.

En los problemas 5 y 6, por medio de la división del intervalo indicado en n subintervalos de igual longitud, encuentre S_n para la función dada. Use el extremo derecho de cada subintervalo. No encuentre el $\lim_{n\to\infty} S_n$.

5. $f(x) = 4x;\quad [0, 1]$.

6. $f(x) = 2x + 1;\quad [0, 2]$.

En los problemas 7 y 8, (a) simplifique S_n y (b) encuentre $\lim_{n\to\infty} S_n$.

7. $S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n} + 1\right) + \left(\frac{2}{n} + 1\right) + \cdots + \left(\frac{n}{n} + 1\right)\right]$.

8. $S_n = \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(n \cdot \frac{2}{n}\right)^2\right]$.

En los problemas del 9 al 14 esboce la región del primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Determine el área exacta de la región considerando el límite de S_n, cuando $n \to \infty$. Use el extremo derecho de cada subintervalo.

9. Región descrita en el problema 1.

10. Región descrita en el problema 2.

11. Región descrita en el problema 3.

12. Región descrita en el problema 4.

13. $f(x) = 2x^2, y = 0, x = 2$.

14. $f(x) = 9 - x^2, y = 0, x = 0$.

En los problemas del 15 al 20 evalúe la integral definida dada tomando el límite de S_n. Use el extremo derecho de cada subintervalo. Esboce la gráfica, en el intervalo dado, de la función por integrar.

15. $\int_0^2 3x\, dx$.

16. $\int_0^4 9\, dx$.

17. $\int_0^3 -4x\, dx$.

18. $\int_0^3 (2x - 9)\,dx.$

19. $\int_0^1 (x^2 + x)\,dx.$

20. $\int_1^2 (x + 2)\,dx.$

21. Encuentre $D_x\left[\int_2^3 \sqrt{x^2+1}\,dx\right]$ sin usar límites.

22. Encuentre $\int_0^3 f(x)\,dx$ sin usar límites, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 2x - 2, & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 2, & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

23. Encuentre $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ sin usar límites, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ -1 + \frac{x}{2}, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

En los problemas del 24 al 26 use un programa como el ***RIGHTSUM,*** *para estimar el área de la región del primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Redondee sus respuestas a un decimal.*

24. $f(x) = x^3 + 1, y = 0, x = 2, x = 3.7.$

25. $f(x) = \sqrt{x}, y = 0, x = 1.3, x = 4.$

26. $f(x) = e^x, y = 0, x = 0, x = 1.$

En los problemas del 27 al 30 use un programa como el ***RIGHTSUM,*** *para estimar el valor de la integral definida. Redondee sus respuestas a un decimal.*

27. $\int_2^5 \frac{x+1}{x+2}\,dx.$

28. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx.$

29. $\int_{-1}^2 (4x^2 + x - 13)\,dx.$

30. $\int_{0.1}^{0.2} \ln x\; dx.$

OBJETIVO Hacer un desarrollo informal del teorema fundamental del cálculo y utilizarlo para calcular integrales definidas. Obtener un cambio en los valores de la función cuando la tasa de cambio en la función es conocida.

14.7 El teorema fundamental del cálculo integral

Teorema fundamental

Hasta ahora, hemos considerado por separado los procesos de cálculo de la derivada y de la integral definida. Ahora juntaremos esas ideas fundamentales y desarrollaremos la importante relación que existe entre ellas. Como resultado, podremos evaluar las integrales definidas en forma más eficiente.

La gráfica de una función f está dada en la figura 14.15. Supongamos que f es continua en el intervalo $[a, b]$ y que su gráfica no cae debajo del eje x. Esto es, $f(x) \geq 0$. De la sección precedente, el área de la región debajo de la gráfica y arriba del eje x entre $x = a$ y $x = b$, está dada por $\int_a^b f(x)\,dx$. Consideraremos ahora otra manera de determinar está área.

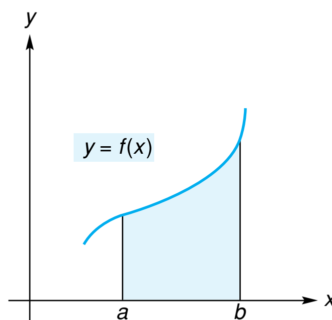


FIGURA 14.15 En $[a, b]$, f es continua y $f(x) \geq 0$.

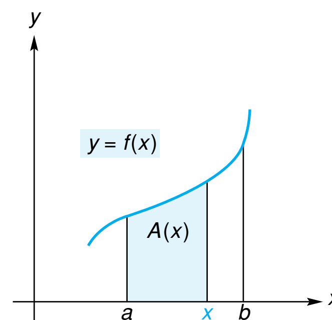


FIGURA 14.16 $A(x)$ es una función de área.

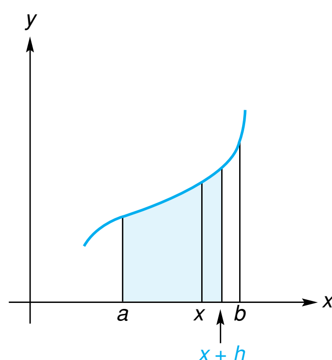


FIGURA 14.17 $A(x + h)$ proporciona el área de la región sombreada.

Supongamos que existe una función $A = A(x)$, a la cual nos referiremos como una función de área, que nos da el área de la región debajo de la gráfica de f y arriba del eje x, entre a y x, donde $a \leq x \leq b$. Esta región aparece sombreada en la figura 14.16. No confunda $A(x)$, que es un área, con $f(x)$, que es la altura de la gráfica en x.

Con base en su definición, podemos enunciar inmediatamente dos propiedades de A:

1. $A(a) = 0$, ya que no hay "área" entre a y a;
2. $A(b)$ es el área ente a y b; esto es

$$A(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Si x se incrementa en h unidades, entonces $A(x + h)$ es el área de la región sombreada en la figura 14.17. Por tanto, $A(x + h) - A(x)$ es la diferencia de las áreas en las figuras 14.17 y 14.16, o sea, el área de la región sombreada en la figura 14.18. Para una h suficientemente cercana a cero, el

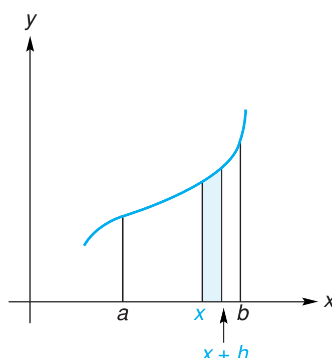


FIGURA 14.18 El área de la región sombreada es $A(x + h) - A(x)$.

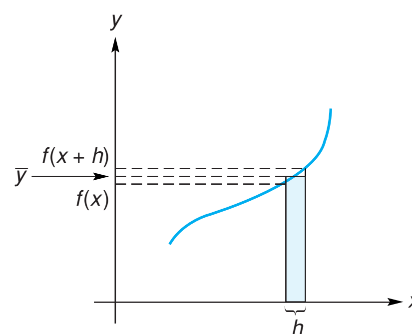


FIGURA 14.19 El área del rectángulo es la misma que el área de la región sombreada en la figura 14.18.

área de esta región es la misma que la de un rectángulo (véase la fig. 14.19) cuya base sea h y su altura algún valor $\bar{y}$ entre $f(x)$ y $f(x + h)$. Aquí $\bar{y}$ es una función de h. Así, el área del rectángulo es, por una parte, $A(x + h) - A(x)$, y por otra $h\bar{y}$, por lo que

$$A(x + h) - A(x) = h\bar{y}$$

o

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} = \bar{y} \qquad \text{(dividiendo entre } h\text{).}$$

Cuando $h \to 0$, $\bar{y}$ se aproxima al número $f(x)$, por lo que

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} = f(x). \tag{1}$$

Pero el miembro izquierdo es simplemente la deriva de A. La ecuación (1) se puede entonces escribir como

$$A'(x) = f(x).$$

Concluimos que la función de área A tiene la propiedad adicional de que su derivada A' es f. Esto es, A es una antiderivada de f. Ahora, supongamos que

F es *cualquier* antiderivada de f. Como A y F son antiderivadas de la misma función, difieren cuando mucho en una constante

$$A(x) = F(x) + C. \tag{2}$$

Recuerde que $A(a) = 0$. Por lo que, al evaluar ambos miembros de la ecuación (2) para $x = a$, resulta

$$0 = F(a) + C,$$

o

$$C = -F(a).$$

Así, la ecuación (2) se convierte en

$$A(x) = F(x) - F(a). \tag{3}$$

Entonces, si $x = b$, de la ecuación (3)

$$A(b) = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Pero recuerde que

$$A(b) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

De las ecuaciones (4) y (5) obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

La relación entre una integral definida y la antidiferenciación ha resultado clara. Para encontrar $\int_a^b f(x)\,dx$ basta encontrar una antiderivada de f, digamos F, y restar el valor de F en el límite inferior a, de su valor en el límite superior b. Supusimos que f era continua y $f(x) \geq 0$ para poder usar el concepto de "área". Sin embargo, nuestro resultado es cierto para cualquier función continua,[6] y se conoce como el *teorema fundamental del cálculo integral*.

Teorema fundamental del cálculo integral

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

La integral definida es un número, y una integral indefinida es una función.

Es importante que entienda la diferencia entre una integral definida y una integral indefinida. La **integral definida** $\int_a^b f(x)\,dx$ es un **número definido** como el límite de una suma. El teorema fundamental establece que la **integral indefinida** $\int f(x)\,dx$ (una antiderivada de f), la cual es una **función** de x y está relacionada con el proceso de diferenciación, puede usarse para determinar ese límite.

[6] Si f es continua en $[a, b]$, puede demostrarse que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Supongamos que aplicamos el teorema fundamental para evaluar $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$. Aquí, $f(x) = 4 - x^2$, $a = 0$ y $b = 2$. Como una antiderivada de $4 - x^2$ es $F(x) = 4x - (x^3/3)$, se sigue que

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = F(2) - F(0) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - (0) = \frac{16}{3}.$$

Esto confirma nuestro resultado del ejemplo 2 de la sección 14.6. Si hubiésemos escogido $F(x)$ como $4x - (x^3/3) + C$, entonces

$$F(2) - F(0) = \left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) + C\right] - [0 + C] = \frac{16}{3},$$

igual que antes. Ya que el valor escogido para C es irrelevante, por conveniencia lo escogeremos siempre igual a 0, como se hizo inicialmente. Por lo general, $F(b) - F(a)$ se abrevia escribiendo

$$F(x)\Big|_a^b.$$

Por tanto, tenemos

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{16}{3}.$$

Principios en práctica 1

Aplicación del teorema fundamental

El ingreso (en dólares) de una cadena de comida rápida está aumentando a una tasa de $f(t) = 10{,}000e^{0.02t}$, donde t está en años. Determine $\int_3^6 10{,}000e^{0.02t}\,dt$, que proporciona el ingreso total para la cadena entre el tercero y sexto años.

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema fundamental

Encontrar $\int_{-1}^{3} (3x^2 - x + 6)\,dx$.

Solución: una antiderivada de $3x^2 - x + 6$ es

$$x^3 - \frac{x^2}{2} + 6x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} (3x^2 - x + 6)\,dx &= \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_{-1}^{3}\\ &= \left[3^3 - \frac{3^2}{2} + 6(3)\right] - \left[(-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 6(-1)\right]\\ &= \left(\frac{81}{2}\right) - \left(-\frac{15}{2}\right) = 48.\end{aligned}$$

Propiedades de la integral definida

Para $\int_a^b f(x)\,dx$ hemos supuesto que $a < b$. Ahora se definen los casos en que $a > b$ o $a = b$. Primero,

$$\text{si } a > b, \text{ entonces } \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Esto es, al intercambiar los límites de integración se cambia el signo de la integral. Por ejemplo,

$$\int_2^0 (4 - x^2)\,dx = -\int_0^2 (4 - x^2)\,dx.$$

Si los límites de integración son iguales, tenemos

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Algunas propiedades de la integral definida merecen mencionarse. La primera propiedad replantea más formalmente nuestro comentario de la sección anterior sobre áreas.

Propiedades de la integral definida

1. Si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ puede interpretarse como el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las líneas $x = a$ y $x = b$.

2. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx,$ donde k es una constante.

2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$

Las propiedades 2 y 3 son similares a las reglas para las integrales indefinidas porque una integral definida puede evaluarse, utilizando el teorema fundamental, en términos de una antiderivada. Se dan a continuación dos propiedades más de las integrales definidas.

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$

La variable de integración es una "variable muda" en el sentido de que cualquier otra variable produce el mismo resultado, esto es, el mismo número.

Para ilustrar la propiedad 4, usted puede verificar, por ejemplo, que

$$\int_0^2 x^2\,dx = \int_0^2 t^2\,dt.$$

5. Si f es continua sobre un intervalo I, y a, b y c están en I, entonces

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

La propiedad 5 significa que la integral definida en un intervalo puede expresarse en términos de integrales definidas en subintervalos. Así

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \int_0^1 (4 - x^2)\,dx + \int_1^2 (4 - x^2)\,dx.$$

Veremos ahora ejemplos de integración definida y calcularemos algunas áreas en la sección siguiente.

EJEMPLO 2 Uso del teorema fundamental

Encontrar $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^4}}\,dx.$

Solución: para encontrar una antiderivada del integrando, aplicaremos la regla de la potencia para integración:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^4}}\,dx &= \int_0^1 x^3(1 + x^4)^{-1/2}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 (1 + x^4)^{-1/2}[4x^3\,dx] = \left(\frac{1}{4}\right)\frac{(1 + x^4)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(1 + x^4)^{1/2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}(2)^{1/2} - \frac{1}{2}(1)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}$$

Advertencia En el ejemplo 2, el valor de la antiderivada $\frac{1}{2}(1 + x^4)^{1/2}$ en el límite inferior es $\frac{1}{2}(1)^{1/2}$. **No** suponga que una evaluación en el límite cero da como resultado 0.

EJEMPLO 3 Evaluación de integrales definidas

a. *Encontrar* $\int_1^2 [4t^{1/3} + t(t^2 + 1)^3]\,dt.$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 [4t^{1/3} + t(t^2 + 1)^3]\,dt &= 4\int_1^2 t^{1/3}\,dt + \frac{1}{2}\int_1^2 (t^2 + 1)^3[2t\,dt] \\
&= (4)\frac{t^{4/3}}{\frac{4}{3}}\bigg|_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{(t^2 + 1)^4}{4}\bigg|_1^2 \\
&= 3(2^{4/3} - 1) + \frac{1}{8}(5^4 - 2^4) \\
&= 3 \cdot 2^{4/3} - 3 + \frac{609}{8}, \\
&= 6\sqrt[3]{2} + \frac{585}{8}.
\end{aligned}$$

b. *Encontrar* $\int_0^1 e^{3t}\,dt.$

Solución:

$$\int_0^1 e^{3t}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3t}[3\,dt]$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)e^{3t}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^3 - e^0) = \frac{1}{3}(e^3 - 1).$$

EJEMPLO 4 Determinación e interpretación de una integral definida

Evaluar $\int_{-2}^{1} x^3\,dx.$

Solución:

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{1} = \frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}.$$

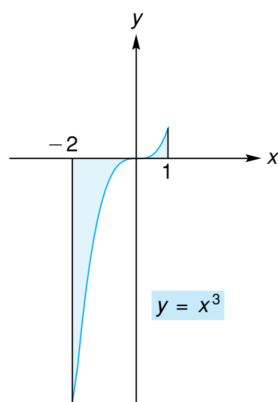


FIGURA 14.20 Gráfica de $y = x^3$ en el intervalo $[-2, 1]$.

La razón por la que el resultado es negativo es clara si observamos la gráfica de $y = x^3$ en el intervalo $[-2, 1]$. (Véase la fig. 14.20.) Para $-2 \leq x < 0, f(x)$ es negativa. Como una integral definida es el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x)\Delta x$, se deduce que $\int_{-2}^{0} x^3\,dx$ no es sólo un número negativo, sino también el negativo del área de la región sombreada en el tercer cuadrante. Por otra parte, $\int_0^1 x^3\,dx$ es el área de la región sombreada en el primer cuadrante, ya que $f(x) \geq 0$ en $[0, 1]$. La integral definida en el intervalo entero $[-2, 1]$ es la suma *algebraica* de estos números, ya que, por la propiedad 5,

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \int_{-2}^{0} x^3\,dx + \int_0^1 x^3\,dx.$$

Así, $\int_{-2}^{1} x^3\,dx$ no representa el área entre la curva y el eje x. Sin embargo, si se desea el área, ésta puede darse como el valor de

$$\left|\int_{-2}^{0} x^3\,dx\right| + \int_0^1 x^3\,dx.$$



Advertencia Recuerde que $\int_a^b f(x)\,dx$ es un límite de un suma. En algunos casos este límite representa un área. En otros no. Cuando $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces la integral representa el área entre la gráfica de f y el eje x desde $x = a$ a $x = b$.

La integral definida de una derivada

Como una función f es una antiderivada de f', por el teorema fundamental tenemos

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a). \quad \textbf{(6)}$$

Pero $f'(x)$ es la razón de cambio de f con respecto a x. De aquí que si conocemos la razón de cambio de f y es necesario encontrar la diferencia entre los valores de la función $f(b) - f(a)$, es suficiente con evaluar $\int_a^b f'(x)\,dx$.

Principios en práctica 2

Cambio en los valores de una función

Un servicio administrativo determina que la tasa de incremento del costo de mantenimiento (en dólares por año) para un complejo privado de departamentos está dada por $M'(x) = 90x^2 + 5000$, en donde x es la edad del complejo de departamentos en años y $M(x)$ es el costo total (acumulado) de mantenimiento en x años. Determine el costo para los primeros cinco años.

EJEMPLO 5 Determinación de un cambio en los valores de la función por integración definida

La definición de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = 0.6q + 2.$$

Si la producción actual es $q = 80$ unidades por semana, ¿cuánto más costará incrementar la producción a 100 unidades por semana?

Solución: la función de costo total es $c = c(q)$ y queremos encontrar la diferencia $c(100) - c(80)$. La razón de cambio de c es dc/dq; entonces, por la ecuación (6),

$$\begin{aligned} c(100) - c(80) &= \int_{80}^{100} \frac{dc}{dq}\,dq = \int_{80}^{100} (0.6q + 2)\,dq \\ &= \left[\frac{0.6q^2}{2} + 2q\right]\Bigg|_{80}^{100} = [0.3q^2 + 2q]\Big|_{80}^{100} \\ &= [0.3(100)^2 + 2(100)] - [0.3(80)^2 + 2(80)] \\ &= 3200 - 2080 = 1120. \end{aligned}$$

Si c está en dólares, entonces el costo de incrementar la producción de 80 a 100 unidades es $1120.

Tecnología

Muchas calculadoras gráficas tienen la capacidad de estimar el valor de una integral definida. En una TI-83, para estimar

$$\int_{80}^{100} (0.6q + 2)\,dq,$$

usamos el comando "fnInt(" como se indica en la figura 14.21. Los parámetros que deben proporcionarse con este comando son:

función que será integrada, variable de integración, límite inferior, límite superior.

Vemos que el valor de esta integral definida es de 1120, lo que concuerda con el resultado del ejemplo 5.

De manera similar, para estimar

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx$$

introducimos

$$\text{fnInt}(X^3, X, -2, 1),$$

o en forma alterna, si primero almacenamos x^3 como Y_1, podemos introducir

$$\text{fnInt}(Y_1, X, -2, 1).$$

En cada caso obtenemos -3.75, valor que concuerda con el resultado del ejemplo 4.

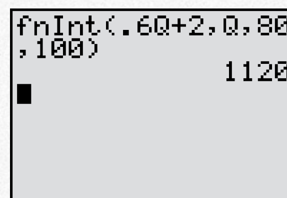


FIGURA 14.21 Estimación de $\int_{80}^{100} (0.6q + 2)\,dq$.

Ejercicio 14.7

En los problemas del 1 al 43 evalúe la integral definida.

1. $\int_0^2 7\,dx.$

2. $\int_2^4 (1-e)\,dx.$

3. $\int_1^2 5x\,dx.$

4. $\int_0^5 -3x\,dx.$

5. $\int_{-3}^1 (2x-3)\,dx.$

6. $\int_{-1}^1 (4-9y)\,dy.$

7. $\int_2^3 (y^2-2y+1)\,dy.$

8. $\int_3^2 (2t-t^2)\,dt.$

9. $\int_{-2}^{-1} (3w^2-w-1)\,dw.$

10. $\int_8^9 dt.$

11. $\int_1^2 -4t^{-4}\,dt.$

12. $\int_1^2 \frac{x^{-2}}{2}\,dx.$

13. $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x^5}\,dx.$

14. $\int_{1/2}^{3/2} (x^2+x+1)\,dx.$

15. $\int_{1/2}^3 \frac{1}{x^2}\,dx.$

16. $\int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2\right)dx.$

17. $\int_{-1}^1 (z+1)^5\,dz.$

18. $\int_1^8 (x^{1/3}-x^{-1/3})\,dx.$

19. $\int_0^1 2x^2(x^3-1)^3\,dx.$

20. $\int_1^3 (x+3)^3\,dx.$

21. $\int_1^8 \frac{4}{y}\,dy.$

22. $\int_{-(e^e)}^{-1} \frac{6}{x}\,dx.$

23. $\int_0^1 e^5\,dx.$

24. $\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}\,dx.$

25. $\int_0^2 x^2 e^{x^3}\,dx.$

26. $\int_0^1 (3x^2+4x)(x^3+2x^2)^4\,dx.$

27. $\int_4^5 \frac{2}{(x-3)^3}\,dx.$

28. $\int_0^6 \sqrt{2x+4}\,dx.$

29. $\int_{1/3}^2 \sqrt{10-3p}\,dp.$

30. $\int_{-1}^1 q\sqrt{q^2+3}\,dq.$

31. $\int_0^1 x^2\sqrt[3]{7x^3+1}\,dx.$

32. $\int_0^{\sqrt{7}} \left[2x-\frac{x}{(x^2+1)^{5/3}}\right]dx.$

33. $\int_0^1 \frac{2x^3+x}{x^2+x^4+1}\,dx.$

34. $\int_a^b (m+ny)\,dy.$

35. $\int_0^1 (e^x-e^{-2x})\,dx.$

36. $\int_{-2}^1 8|x|\,dx.$

37. $\int_1^e 2(x^{-1}+x^{-2}-x^{-3})\,dx.$

38. $\int_1^2 \left(6\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx.$

39. $\int_1^3 (x+1)e^{x^2+2x}\,dx.$

40. $\int_3^4 \frac{e^{\ln x}}{x}\,dx.$

41. $\int_0^2 \frac{x^6+6x^4+x^3+8x^2+x+5}{x^3+5x+1}\,dx.$

42. $\int_{-1}^1 \frac{2}{1+e^x}\,dx.$ [*Sugerencia:* multiplique el integrando por $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$.]

43. $\int_0^2 f(x)\,dx$, donde $f(x)=\begin{cases}4x^2, & \text{si } 0\le x\le \frac{1}{2},\\ 2x, & \text{si } \frac{1}{2}\le x\le 2.\end{cases}$

---

44. Evalúe $\left(\int_2^3 x\,dx\right)^2 - \int_2^3 x^2\,dx.$

45. Suponga que $f(x)=\int_1^x 3\frac{1}{t^2}\,dt$. Evalúe $\int_e^1 f(x)\,dx.$

46. Evalúe $\int_{10}^{10} e^{x^2}\,dx + \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2\ln 2}\,dx.$

47. Si $\int_1^3 f(x)\,dx = 4$ y $\int_3^2 f(x)\,dx = 3$, encuentre $\int_1^2 f(x)\,dx.$

48. Si $\int_1^4 f(x)\,dx = 6$, $\int_2^4 f(x)\,dx = 5$, y $\int_1^3 f(x)\,dx = 2$, encuentre $\int_2^3 f(x)\,dx.$

49. Evalúe $\int_1^2 \left(\frac{d}{dx}\int_1^2 e^{x^2}\,dx\right)dx.$ [*Sugerencia:* no es necesario determinar $\int_1^2 e^{x^2}\,dx.$]

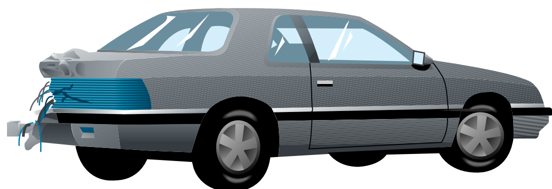
50. Suponga que $f(x)=\int_e^x \frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}\,dt$, donde $x>e$. Encuentre $f'(x)$.

51. Índice de severidad En un análisis de la seguridad en el tránsito, Shonle[7] considera cuánta aceleración puede tolerar una persona en un choque sin que se presenten en ella lesiones serias. El *índice de severidad* se define como

$$\text{I.S.} = \int_0^T \alpha^{5/2}\,dt,$$

[7] J.I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

donde α (la letra griega "alfa") se considera una constante implicada con la aceleración media ponderada y T es la duración del choque. Encuentre el índice de severidad.



52. Estadística En estadística, la media μ (letra griega "mu") de la función f de densidad de probabilidad continua, definida en el intervalo $[a, b]$ está dada por

$$\mu = \int_a^b [x \cdot f(x)]\, dx,$$

y la varianza σ^2 (letra griega "sigma") está dada por

$$\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x)\, dx.$$

Calcule μ y σ^2 si $a = 0, b = 1$ y $f(x) = 1$.

53. Distribución de ingresos El economista Pareto[8] ha establecido una ley empírica de distribución de ingresos superiores, que da el número N de personas que reciben x o más dólares. Si

$$\frac{dN}{dx} = -Ax^{-B},$$

donde A y B son constantes, obtenga una integral definida que dé el número total de personas con ingresos entre a y b, si $a < b$.

54. Biología En un estudio sobre mutación genética,[9] aparece la integral siguiente:

$$\int_0^{10^{-4}} x^{-1/2}\, dx.$$

Evalúe esta integral.

55. Flujo continuo de ingreso El valor actual (en dólares) de un flujo continuo de ingreso de \$2000 al año durante 5 años al 6% compuesto continuamente está dado por

$$\int_0^5 2000e^{-0.06t}\, dt.$$

Evalúe el valor actual, al dólar más cercano.

56. Biología En biología, con frecuencia surgen problemas que implican la transferencia de una sustancia entre compartimentos. Un ejemplo sería la transferencia del flujo sanguíneo a los tejidos. Evalúe la siguiente integral que se presenta en un problema de difusión[10] entre dos compartimentos:

$$\int_0^t (e^{-a\tau} - e^{-b\tau})\, d\tau,$$

aquí, τ (se lee "tau") es una letra griega; a y b son constantes.

57. Demografía Para cierta población, suponga que l es una función tal que $l(x)$ es el número de personas que alcanzan la edad x en cualquier año. Esta función se llama *función de la tabla de vida*. Bajo condiciones apropiadas, la integral

$$\int_x^{x+n} l(t)\, dt$$

da el número esperado de gente en la población que tiene entre exactamente x y $x + n$ años, inclusive. Si

$$l(x) = 10{,}000\sqrt{100 - x},$$

determine el número de personas que tienen exactamente entre 36 y 64 años, inclusive. Dé su respuesta al entero más cercano, ya que respuestas fraccionarias no tienen sentido.

58. Consumo de mineral Si c_0 es el consumo anual de un mineral en el tiempo $t = 0$, entonces bajo consumo continuo, la cantidad total de mineral usado en el intervalo $[0, t_1]$ es

$$\int_0^{t_1} c_0 e^{kt}\, dt,$$

donde k es la razón de consumo. Para un mineral de tierras raras se ha determinado que $c_0 = 3000$ unidades y $k = 0.05$. Evalúe la integral para estos datos.

59. Costo marginal La función de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = 0.2q + 8.$$

Si c está en dólares, determine el costo de incrementar la producción de 65 a 75 unidades.

60. Costo marginal Repita el problema 59 si

$$\frac{dc}{dq} = 0.003q^2 - 0.6q + 40$$

y la producción aumenta de 100 a 200 unidades.

61. Ingreso marginal La función de ingreso marginal de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = \frac{1000}{\sqrt{100q}}.$$

[8] G. Tintner, *Methodology of Mathematical Economics and Econometrics* (Chicago: University of Chicago Press, 1967), pág. 16.

[9] W. J. Ewens, *Population Genetics* (Londres: Methuen & Company Ltd., 1969).

[10] W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1972).

Si r está en dólares, encuentre el cambio en el ingreso total del fabricante si la producción aumenta de 400 a 900 unidades.

62. Ingreso marginal Repita el problema 61 si

$$\frac{dr}{dq} = 250 + 90q - 3q^2$$

y la producción crece de 10 a 20 unidades.

63. Tasa de criminalidad Una socióloga está estudiando la tasa de crímenes en cierta ciudad. Ella estima que t meses después del principio del próximo año, el número total de crímenes cometidos se incrementará a razón de $8t + 10$ por mes. Determine el número total de crímenes que puede esperarse que se cometan el próximo año. ¿Cuántos crímenes puede esperarse que se cometan durante los últimos 6 meses de ese año?

64. Altas de hospital Para un grupo de personas hospitalizadas, suponga que la razón de altas está dada por

$$f(t) = \frac{81 \times 10^6}{(300 + t)^4},$$

donde $f(t)$ es la proporción del grupo dado de alta por día al término de t días. ¿Qué proporción ha sido dada de alta al final de 700 días?

65. Producción Imagine un país "unidimensional" de longitud $2R$ (véase la fig. 14.22).[11] Suponga que la producción de bienes en este país está distribuida en forma continua de frontera a frontera. Si la cantidad producida cada año por unidad de distancia es $f(x)$, entonces la producción total del país está dada por

$$G = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx.$$

Evalúe G si $f(x) = i$, donde i es una constante.

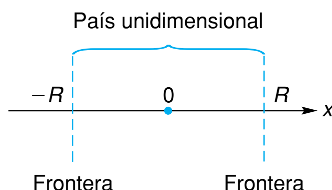


FIGURA 14.22 Diagrama para el problema 65.

66. Exportaciones Para el país "unidimensional" del problema 65, la cantidad E de exportaciones bajo ciertas condiciones, está dada por

$$E = \int_{-R}^{R} \frac{i}{2}[e^{-k(R-x)} + e^{-k(R+x)}]\, dx,$$

donde i y k son constantes ($k \neq 0$). Evalúe E.

67. Precio promedio de entrega En un análisis del precio de entrega de un artículo desde la fábrica hasta el cliente, DeCanio[12] afirma que el precio promedio de entrega pagado por los consumidores está dado por

$$A = \frac{\int_0^R (m + x)[1 - (m + x)]\, dx}{\int_0^R [1 - (m + x)]\, dx},$$

donde m es el precio en la fábrica, x la distancia y R la distancia máxima al punto de venta. DeCanio determina que

$$A = \frac{m + \frac{R}{2} - m^2 - mR - \frac{R^2}{3}}{1 - m - \frac{R}{2}}.$$

Verifíquelo.

En los problemas del 68 al 70 use el teorema fundamental del cálculo integral para determinar el valor de la integral definida. Verifique los resultados con su calculadora.

68. $\int_2^4 (7x + 3x^2)\, dx.$

69. $\int_0^4 \frac{1}{(4x + 4)^2}\, dx.$

70. $\int_0^1 e^{3t}\, dt.$ Redondee su respuesta a dos decimales.

En los problemas del 71 al 74 estime el valor de la integral definida. Redondee sus respuestas a dos decimales.

71. $\int_{-1}^{5} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4}\, dx.$

72. $\int_1^{3.4} x \ln^2 x\, dx.$

73. $\int_0^4 5\sqrt{t^2 + 3}\, dt.$

74. $\int_{-1}^{1} \frac{6\sqrt{q + 1}}{q + 3}\, dq.$

[11] R. Taagepera, "Why the Trade/GNP Ratio Decrease with Country Size", *Social Science Research*, 5 (1976), 385-404.

[12] S. J. DeCanio, "Delivered Pricing and Multiple Basing Point Equilibria: A Reevaluation", *The Quartely Journal of Economics*, XCIX, núm. 2 (1984), 329-349.

OBJETIVO Utilizar bandas verticales y la integral definida para encontrar el área de la región entre una curva y el eje x.

14.8 Área

En la sección 14.6 vimos que el área de una región puede encontrarse evaluando el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x)\,\Delta x$, donde $f(x)\,\Delta x$ representa el área de un rectángulo. Este límite es un caso especial de una integral definida, por lo que puede encontrarse fácilmente usando el teorema fundamental.

Al usar la integral definida para determinar áreas, conviene hacer un esbozo de la región implicada. Consideremos el área de la región limitada por $y = f(x)$ y el eje x entre $x = a$ y $x = b$, donde $f(x) \geq 0$ sobre $[a, b]$.(Véase la fig. 14.23.) Para plantear la integral, debe incluirse un rectángulo muestra en el esbozo, ya que el área de la región es un límite de sumas de áreas de rectángulos. Esto no sólo ayuda a entender el proceso de integración, también ayuda a encontrar áreas de regiones más complicadas. Dicho rectángulo (véase la fig. 14.23) se llama **elemento vertical de área** (o **franja vertical**). En el diagrama, el ancho del elemento vertical es Δx. La altura es el valor y de la curva. Por tanto, el rectángulo tiene un área de $y\,\Delta x$ o $f(x)\,\Delta x$. El área de la región entera se encuentra sumando las áreas de todos los elementos entre $x = a$ y $x = b$, y determinando el límite de esta suma, que es la integral definida. En forma simbólica, tenemos

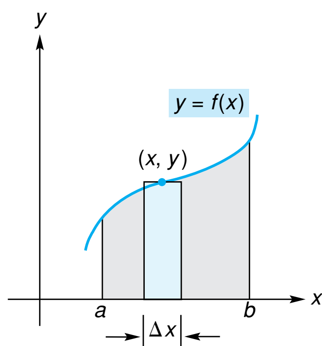


FIGURA 14.23 Región con elemento vertical.

$$\Sigma f(x)\,\Delta x \to \int_a^b f(x)\,dx = \text{área.}$$

El ejemplo 1 ilustrará esto.

EJEMPLO 1 Uso de la integral definida para encontrar un área

Encontrar el área de la región limitada por la curva

$$y = 6 - x - x^2$$

y el eje x.

Solución: primero debemos esbozar la curva para poder visualizar la región. Como

$$y = -(x^2 + x - 6) = -(x - 2)(x + 3),$$

las intersecciones con el eje x son $(2, 0)$ y $(-3, 0)$. Usando las técnicas de graficación que vimos antes, obtenemos la gráfica y la región que se muestra en la figura 14.24. *Con esta región es crucial encontrar las intersecciones de la curva con el eje x, porque ellas determinan el intervalo en el cual las áreas de los elementos deben sumarse*. Esto es, *esos valores x son los límites de integración*. El elemento vertical mostrado tiene un ancho Δx y altura y. Por tanto, el área del elemento es $y\,\Delta x$. Sumando las áreas de todos estos elementos de $x = -3$ a $x = 2$ y tomando el límite mediante la integral definida, obtenemos el área:

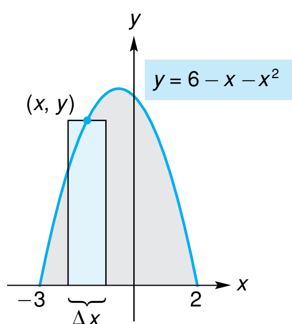


FIGURA 14.24 Región del ejemplo 1 con elemento vertical.

$$\Sigma y\,\Delta x \to \int_{-3}^{2} y\,dx = \text{área.}$$

Para evaluar la integral debemos expresar el integrando en términos de la variable de integración x. Como $y = 6 - x - x^2$,

$$\text{área} = \int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)\,dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{2}$$

$$= \left(12 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-18 - \frac{9}{2} - \frac{-27}{3}\right) = \frac{125}{6} \text{ unidades cuadradas.}$$

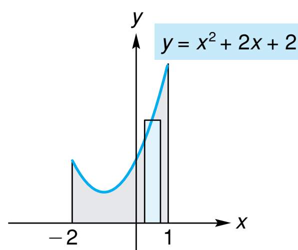


FIGURA 14.25 Diagrama para el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Determinación del área de una región

Encontrar el área de la región limitada por la curva $y = x^2 + 2x + 2$, el eje x y las líneas $x = -2$ y $x = 1$.

Solución: en la figura 14.25 se muestra un esbozo de la región. Tenemos

$$\text{área} = \int_{-2}^{1} y\,dx = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2x + 2)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{3} + 1 + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} + 4 - 4\right)$$

$$= 6 \text{ unidades cuadradas.}$$

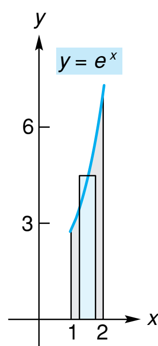


FIGURA 14.26 Diagrama para el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Determinación del área de una región

Encontrar el área de la región entre la curva $y = e^x$ y el eje x entre $x = 1$ y $x = 2$.

Solución: en la figura 14.26 se muestra un esbozo de la región.

$$\text{área} = \int_{1}^{2} y\,dx = \int_{1}^{2} e^x\,dx = e^x\Big|_{1}^{2}$$

$$= e^2 - e = e(e - 1) \text{ unidades cuadradas.}$$

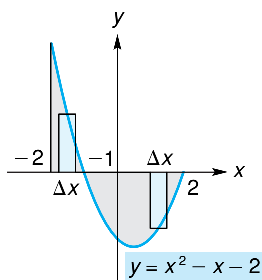


FIGURA 14.27 Diagrama para el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Un área que requiere dos integrales definidas

Encontrar el área de la región limitada por la curva

$$y = x^2 - x - 2$$

y la línea $y = 0$ (el eje x) entre $x = -2$ y $x = 2$.

Solución: en la figura 14.27 se muestra un esbozo de la región. Note que las intersecciones con el eje x son $(-1, 0)$ y $(2, 0)$.



Advertencia Es erróneo apresurarse y escribir que el área es $\int_{-2}^{2} y\,dx$, por la siguiente razón: para el rectángulo izquierdo la altura es y. Sin embargo, para el rectángulo a la derecha, la y es negativa, por lo que su altura es el número positivo $-y$. Esto señala la importancia de esbozar la región.

En el intervalo $[-2, -1]$, el área del elemento es

$$y\,\Delta x = (x^2 - x - 2)\,\Delta x.$$

En $[-1, 2]$ el área es

$$-y\,\Delta x = -(x^2 - x - 2)\,\Delta x.$$

Así,

$$\text{área} = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)\,dx + \int_{-1}^{2} -(x^2 - x - 2)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-2}^{-1} - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 4\right)\right]$$

$$- \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)\right]$$

$$= \frac{19}{3} \text{ unidades cuadradas}$$

El ejemplo siguiente muestra el uso del área como una probabilidad en estadística.

EJEMPLO 5 Aplicación a la estadística

*En estadística, una **función de densidad** (de probabilidad) f de una variable x, donde x toma todos los valores en el intervalo [a, b], tiene las siguientes propiedades:*

1. $f(x) \geq 0$.

2. $\int_a^b f(x)\,dx = 1$.

3. *La probabilidad de que x tome un valor entre c y d, que se escribe $P(c \leq x \leq d)$, donde $a \leq c \leq d \leq b$, se representa por el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje x entre $x = c$ y $x = d$. Por tanto (véase la fig.* 14.28),

$$P(c \leq x \leq d) = \int_c^d f(x)\,dx.$$

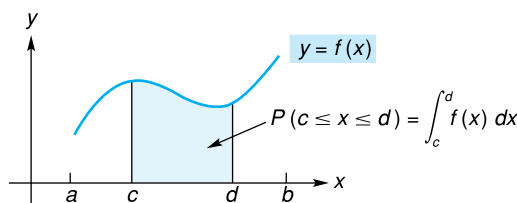


FIGURA 14.28 Probabilidad como un área.

Para la función de densidad $f(x) = 6(x - x^2)$, donde $0 \leq x \leq 1$, encontrar cada una de las siguientes probabilidades.

a. $P(0 \leq x \leq \frac{1}{4})$.

Solución: aquí $[a, b]$ es $[0, 1]$, c es 0 y d es $\frac{1}{4}$. Por la propiedad 3, tenemos

$$P(0 \leq x \leq \tfrac{1}{4}) = \int_0^{1/4} 6(x - x^2)\,dx = 6\int_0^{1/4} (x - x^2)\,dx$$

$$= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{1/4} = (3x^2 - 2x^3)\Big|_0^{1/4}$$

$$= \left[3\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^3\right] - 0 = \frac{5}{32}.$$

b. $P(x \geq \frac{1}{2})$.

Solución: como el dominio de f es $0 \leq x \leq 1$, decir que $x \geq \frac{1}{2}$ significa $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Así,

$$P(x \geq \tfrac{1}{2}) = \int_{1/2}^{1} 6(x - x^2)\,dx = 6\int_{1/2}^{1} (x - x^2)\,dx$$

$$= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{1/2}^{1} = (3x^2 - 2x^3)\Big|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 14.8

En los problemas del 1 al 34 use una integral definida para encontrar el área de la región limitada por la curva, el eje x y las líneas dadas. En cada caso primero haga el bosquejo de la región. Tenga cuidado con las áreas de regiones situadas debajo del eje x.

1. $y = 4x, \quad x = 2.$

2. $y = \frac{3}{4}x + 1, \quad x = 0, \quad x = 16.$

3. $y = 3x + 2, \quad x = 2, \quad x = 3.$

4. $y = x + 5, \quad x = 2, \quad x = 4.$

5. $y = x - 1, \quad x = 5.$

6. $y = 2x^2, \quad x = 1, \quad x = 2.$

7. $y = x^2, \quad x = 2, \quad x = 3.$

8. $y = 2x^2 - x, \quad x = -2, \quad x = -1.$

9. $y = x^2 + 2, \quad x = -1, \quad x = 2.$

10. $y = 2x + x^3, \quad x = 1.$

11. $y = x^2 - 2x, \quad x = -3, \quad x = -1.$

12. $y = 3x^2 - 4x, \quad x = -2, \quad x = -1.$

13. $y = 9 - x^2.$

14. $y = \frac{4}{x}, \quad x = 1, \quad x = 2.$

15. $y = 1 - x - x^3, \quad x = -2, \quad x = 0.$

16. $y = e^x, \quad x = 1, \quad x = 3.$

17. $y = 3 + 2x - x^2.$

18. $y = \frac{1}{x^2}, \quad x = 2, \quad x = 3.$

19. $y = \frac{1}{x}, \quad x = 1, \quad x = e.$

20. $y = \frac{1}{x}, \quad x = 1, \quad x = e^2.$

21. $y = \sqrt{x + 9}, \quad x = -9, \quad x = 0.$

22. $y = x^2 - 2x, \quad x = 1, \quad x = 3.$

23. $y = \sqrt{2x - 1}, \quad x = 1, \quad x = 5.$

24. $y = x^3 + 3x^2, \quad x = -2, \quad x = 2.$

25. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 2.$

26. $y = x^2 - 4, \quad x = -2, \quad x = 2.$

27. $y = e^x, \quad x = 0, \quad x = 2.$

28. $y = |x|, \quad x = -2, \quad x = 2.$

29. $y = x + \frac{2}{x}, \quad x = 1, \quad x = 2.$

30. $y = 6 - x - x^2.$

31. $y = x^3, \quad x = -2, \quad x = 4.$

32. $y = \sqrt{x - 2}, \quad x = 2, \quad x = 6.$

33. $y = 2x - x^2, \quad x = 1, \quad x = 3.$

34. $y = x^2 - x + 1, \quad x = 0, \quad x = 1.$

---

35. Dado que

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 16 - 2x, & \text{si } x \geq 2, \end{cases}$$

determine el área de la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y la línea $x = 3$. Incluya un esbozo de la región.

36. En condiciones de distribución uniforme continua, el concepto estadístico de la proporción de personas con ingresos entre a y t, donde $a \leq t \leq b$, es el área de la región entre la curva $y = 1/(b - a)$ y el eje x, entre $x = a$ y $x = t$. Esboce la gráfica de la curva y determine el área de la región dada.

37. Suponga que $f(x) = x/8$, donde $0 \le x \le 4$. Si f es una función de densidad (remítase al ejemplo 5), encuentre cada uno de lo siguiente:

a. $P(0 \le x \le 1)$.
b. $P(2 \le x \le 4)$.
c. $P(x \ge 3)$.

38. Suponga $f(x) = 3(1 - x)^2$, donde $0 \le x \le 1$. Si f es una función de densidad (remítase al ejemplo 5), encuentre lo siguiente:

a. $P(\frac{1}{2} \le x \le 1)$.
b. $P(\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2})$.
c. $P(x \le \frac{1}{3})$.
d. Use el resultado de la parte (c) para determinar $P(x \ge \frac{1}{3})$.

39. Suponga $f(x) = 1/x$, donde $e \le x \le e^2$. Si f es una función de densidad (remítase al ejemplo 5), encuentre lo siguiente:

a. $P(3 \le x \le 5)$.
b. $P(x \le 4)$.
c. $P(x \ge 3)$.
d. Verifique que $P(e \le x \le e^2) = 1$.

40. a. Sea r un número real, donde $r > 1$. Evalúe

$$\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx.$$

b. Su respuesta a la parte (a) puede interpretarse como el área de cierta región del plano. Esboce esta región.

c. Evalúe $\lim_{r \to \infty} \left(\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx \right)$.

d. Su respuesta a la parte (c) puede interpretarse como el área de cierta región del plano. Esboce esta región.

En cada uno de los problemas del 41 al 44 use la integración definida para estimar el área de la región limitada por la curva, el eje x y las líneas dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.

41. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $x = -2$, $x = 1$.

42. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x + 3}}$, $x = 3$, $x = 6$.

43. $y = x^4 - 2x^3 - 2$, $x = 1$, $x = 3$.

44. $y = 1 + 3x - x^4$.

OBJETIVO Determinar el área de una región acotada por dos o más curvas por medio del uso de franjas verticales u horizontales.

14.9 ÁREA ENTRE CURVAS

Elementos verticales

Ahora encontraremos el área de una región encerrada por varias curvas. Igual que antes, nuestro procedimiento consistirá en dibujar un elemento muestra de área y usar la integral definida para "sumar" las áreas de todos los elementos.

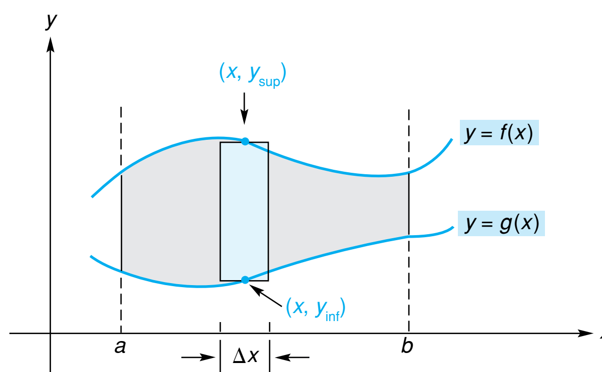


FIGURA 14.29 Región entre curvas.

Por ejemplo, considere el área de la región en la figura 14.29 que está limitada arriba y abajo por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, y lateralmente por las líneas $x = a$ y $x = b$. El ancho del elemento vertical indicado es Δx y la altura es el valor y de la curva superior menos el valor y de la curva inferior, lo que escribiremos como $y_{sup} - y_{inf}$. El área del elemento es entonces

$$[y_{sup} - y_{inf}]\Delta x,$$

o

$$[f(x) - g(x)]\,\Delta x.$$

Al sumar las áreas de todos los elementos entre $x = a$ y $x = b$ por medio de la integral definida, obtenemos el área de la región:

$$\sum [f(x) - g(x)]\,\Delta x \rightarrow \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \text{área}.$$

EJEMPLO 1 Determinación de un área entre dos curvas

Encontrar el área de la región limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$ y $y = x$.

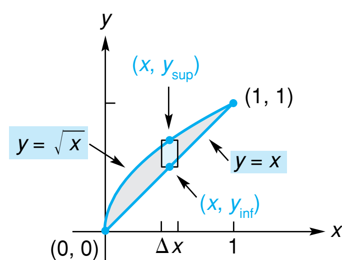


FIGURA 14.30 Diagrama para el ejemplo 1.

Solución: en la figura 14.30 se muestra un esbozo de la región. Para determinar dónde se intersecan las curvas, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones $y = \sqrt{x}$ y $y = x$. Eliminando y por sustitución, obtenemos

$$\sqrt{x} = x,$$

$$x = x^2 \qquad \text{(elevando ambos lados al cuadrado),}$$

$$0 = x^2 - x = x(x - 1).$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 1.$$

Si $x = 0, y = 0$; si $x = 1, y = 1$. Por lo que las curvas se intersecan en $(0, 0)$ y $(1, 1)$. El ancho del elemento del área indicado es Δx. Su altura es el valor y de la curva superior menos el valor y de la curva inferior:

$$y_{sup} - y_{inf} = \sqrt{x} - x.$$

El área del elemento es entonces $(\sqrt{x} - x)\,\Delta x$. Sumando las áreas de todos estos elementos entre $x = 0$ y $x = 1$ por medio de la integral definida, obtenemos el área de toda la región:

Debe ser obvio para usted que el conocimiento de los puntos de intersección es importante en la determinación de los límites de integración.

$$\text{área} = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^{1/2} - x)\,dx = \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{6} \text{ unidad cuadrada.}$$

EJEMPLO 2 Determinación de un área entre dos curvas

Encontrar el área de la región limitada por las curvas $y = 4x - x^2 + 8$ y $y = x^2 - 2x$.

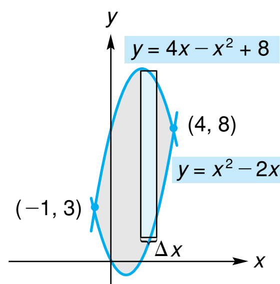


FIGURA 14.31 Diagrama para el ejemplo 2.

Solución: en la figura 14.31 se muestra un esbozo de la región. Para encontrar dónde se intersecan las curvas, resolvemos el sistema de ecuaciones $y = 4x - x^2 + 8$ y $y = x^2 - 2x$:

$$4x - x^2 + 8 = x^2 - 2x,$$

$$-2x^2 + 6x + 8 = 0,$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0,$$

$$(x+1)(x-4) = 0 \qquad \text{(factorizando),}$$

$$x = -1 \quad \text{o} \quad x = 4.$$

Cuando $x = -1$, $y = 3$; cuando $x = 4$, $y = 8$. Las curvas se intersecan en $(-1, 3)$ y $(4, 8)$. El ancho del elemento indicado es Δx. La altura es el valor y de la curva superior menos el valor y de la curva inferior:

$$y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}} = (4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x).$$

Por tanto, el área del elemento es

$$[(4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x)]\,\Delta x = (-2x^2 + 6x + 8)\,\Delta x.$$

Al sumar todas estas áreas desde $x = -1$ hasta $x = 4$, tenemos

$$\text{área} = \int_{-1}^{4} (-2x^2 + 6x + 8)\,dx = 41\tfrac{2}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

EJEMPLO 3 Área de una región con dos curvas superiores diferentes

Encontrar el área de la región entre las curvas $y = 9 - x^2$ y $y = x^2 + 1$ entre $x = 0$ y $x = 3$.

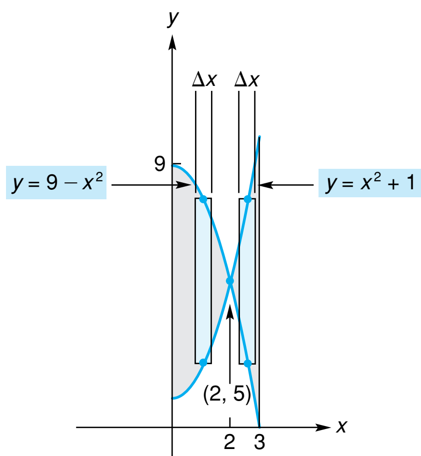


FIGURA 14.32 y_{sup} es $9 - x^2$ en $[0, 2]$ y es $x^2 + 1$ en $[2, 3]$.

Solución: en la figura 14.32 se muestra un esbozo de la región. Las curvas se intersecan cuando

$$9 - x^2 = x^2 + 1,$$

$$8 = 2x^2,$$

$$4 = x^2,$$

$$x = \pm 2 \qquad \text{(dos soluciones).}$$

Cuando $x = \pm 2$, $y = 5$, por lo que los puntos de intersección son $(\pm 2, 5)$. Como estamos interesados en la región de $x = 0$ a $x = 3$, el punto de intersec-

ción que nos concierne es (2, 5). Note en la figura 14.32 que en la región a la *izquierda* del punto de intersección (2, 5), un elemento tiene

$$y_{\text{sup}} = 9 - x^2 \quad \text{y} \quad y_{\text{inf}} = x^2 + 1,$$

pero para un elemento a la *derecha* de (2, 5) ocurre lo contrario, esto es

$$y_{\text{sup}} = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad y_{\text{inf}} = 9 - x^2.$$

Entonces, entre $x = 0$ y $x = 2$, el área de un elemento es

$$\begin{aligned}(y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}})\,\Delta x &= [(9 - x^2) - (x^2 + 1)]\,\Delta x \\ &= (8 - 2x^2)\,\Delta x,\end{aligned}$$

pero entre $x = 2$ y $x = 3$, es

$$\begin{aligned}(y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}})\,\Delta x &= [(x^2 + 1) - (9 - x^2)]\,\Delta x \\ &= (2x^2 - 8)\,\Delta x.\end{aligned}$$

Por tanto, para encontrar el área de la región entera necesitamos *dos* integrales:

$$\begin{aligned}\text{área} &= \int_0^2 (8 - 2x^2)\,dx + \int_2^3 (2x^2 - 8)\,dx \\ &= \left(8x - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{2x^3}{3} - 8x\right)\Bigg|_2^3 \\ &= \left[\left(16 - \frac{16}{3}\right) - 0\right] + \left[(18 - 24) - \left(\frac{16}{3} - 16\right)\right] \\ &= \frac{46}{3} \text{ unidades cuadradas.}\end{aligned}$$

Elementos horizontales

Algunas veces el área puede ser más fácil de determinar sumando áreas de elementos horizontales en lugar de elementos verticales. En el ejemplo siguiente, se determinará el área por ambos métodos. En cada caso, el elemento de área determina la forma de la integral.

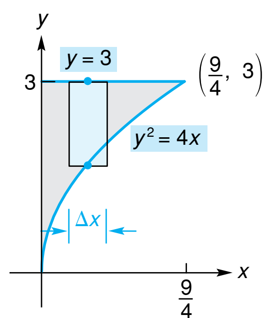


FIGURA 14.33 Elemento vertical de área.

EJEMPLO 4 Los métodos de elementos verticales y elementos horizontales

Encontrar el área de la región limitada para la curva $y^2 = 4x$ y las líneas $y = 3$ y $x = 0$ (el eje y).

Solución: en la figura 14.33 se da el esbozo de la región. Cuando las curvas $y = 3$ y $y^2 = 4x$ se intersecan, $9 = 4x$ por lo que $x = \frac{9}{4}$. Entonces el punto de intersección es $(\frac{9}{4}, 3)$. Como el ancho de la franja vertical es Δx, integramos con respecto a la variable x. De acuerdo con esto, y_{sup} y y_{inf} deben expresarse como funciones de x. Para la curva inferior $y^2 = 4x$ tenemos $y = \pm 2\sqrt{x}$. Pero $y \geq 0$ para la porción de esta curva que limita la región, por lo que usamos $y = 2\sqrt{x}$. La curva superior es $y = 3$. Entonces, la altura de la franja es

$$y_{\text{sup}} - y_{\text{inf}} = 3 - 2\sqrt{x}.$$

Por consiguiente, la franja tiene un área de $(3 - 2\sqrt{x})\ \Delta x$ y queremos sumar todas estas áreas entre $x = 0$ y $x = \frac{9}{4}$,

$$\text{área} = \int_0^{9/4} (3 - 2\sqrt{x})\, dx = \left(3x - \frac{4x^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^{9/4}$$

$$= \left[3\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2}\right] - (0)$$

$$= \frac{27}{4} - \frac{4}{3}\left[\left(\frac{9}{4}\right)^{1/2}\right]^3 = \frac{27}{4} - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{4} \text{ unidades cuadradas.}$$

Con elementos horizontales, el ancho es Δy, no Δx.

Consideremos ahora este problema desde el punto de vista de un **elemento horizontal de área** (o **franja horizontal**), como se muestra en la figura 14.34. El ancho del elemento es Δy. La longitud del elemento es el *valor x de la curva más a la derecha menos el valor x de la curva más a la izquierda*. El área del elemento es entonces

$$(x_{\text{der}} - x_{\text{izq}})\ \Delta y.$$

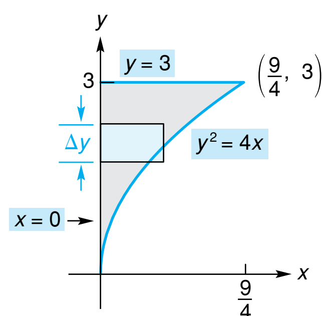


FIGURA 14.34 Elemento horizontal de área.

Queremos sumar todas estas áreas entre $y = 0$ y $y = 3$:

$$\sum (x_{\text{der}} - x_{\text{izq}})\ \Delta y \to \int_0^3 (x_{\text{der}} - x_{\text{izq}})\, dy.$$

Como la variable de integración es y, debemos expresar x_{der} y x_{izq} como funciones de y. La curva de más a la derecha es $y^2 = 4x$ o, en forma equivalente, $x = y^2/4$. La curva izquierda es $x = 0$. Así,

$$\text{área} = \int_0^3 (x_{\text{der}} - x_{\text{izq}})\, dy$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{y^2}{4} - 0\right) dy = \frac{y^3}{12}\bigg|_0^3 = \frac{9}{4} \text{ unidades cuadradas.}$$

Note que para esta región las franjas horizontales hacen más fácil la evaluación (y el planteamiento) de la integral definida que una integral con franjas verticales. En todo caso, recuerde que **los límites de integración son los límites para la variable de integración.**

EJEMPLO 5 Ventajas al emplear elementos horizontales

Encontrar el área de la región limitada por las gráficas de $y^2 = x$ y $x - y = 2$.

Solución: el esbozo de la región se da en la figura 14.35. Las curvas se intersecan cuando $y^2 - y = 2$. Así, $y^2 - y - 2 = 0$ o, en forma equivalente, $(y + 1)(y - 2) = 0$, de donde $y = -1$ o $y = 2$. Esto da los puntos de intersección $(1, -1)$ y $(4, 2)$. Consideremos elementos verticales de área [véase la fig. 14.35(a)]. Despejando a y de $y^2 = x$, obtenemos $y = \pm\sqrt{x}$. Como se ve en la figura 14.35(a), a la *izquierda* de $x = 1$, el extremo superior del elemento se encuentra sobre $y = \sqrt{x}$ y el extremo inferior sobre $y = -\sqrt{x}$. A la *derecha* de $x = 1$, la curva superior es $y = \sqrt{x}$ y la curva inferior es $x - y = 2$ (o $y = x - 2$). Entonces, con franjas verticales son necesarias *dos* integrales para evaluar el área:

$$\text{área} = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]\, dx + \int_1^4 [\sqrt{x} - (x - 2)]\, dx.$$

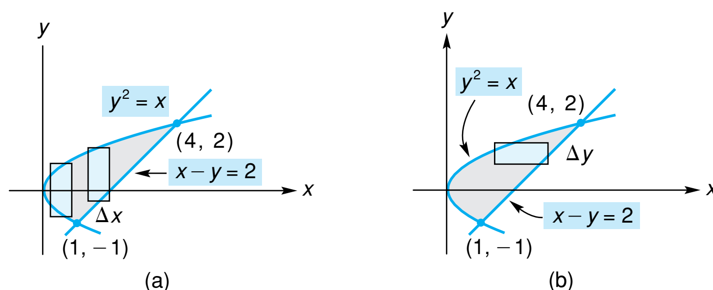


FIGURA 14.35 Región del ejemplo 5 con elementos verticales y horizontales.

Tal vez el uso de franjas horizontales pueda simplificar nuestro trabajo. En la figura 14.35(b), el ancho de la franja es Δy. La curva más a la derecha *siempre* es $x - y = 2$ (o $x = y + 2$) y la curva más a la izquierda siempre es $y^2 = x$ (o $x = y^2$). Por tanto, el área de la franja horizontal es $[(y + 2) - y^2]\Delta y$, por lo que el área total está dada por

$$\text{área} = \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)\, dy = \frac{9}{2} \text{ unidades cuadradas.}$$

Queda claro que usar franjas horizontales es la manera más conveniente de atacar este problema. Así sólo se requiere de una integral que es además mucho más sencilla de calcular.

Tecnología

Problema: estimar el área de la región limitada por las gráficas de

$$y = x^4 - 2x^3 - 2 \quad \text{y} \quad y = 1 + 2x - 2x^2.$$

Solución: en una calculadora TI-83, introducimos $x^4 - 2x^3 - 2$ como Y_1 y $1 + 2x - 2x^2$ como Y_2 y desplegamos sus gráficas. La región que nos ocupa se muestra sombreada en la figura 14.36; y_{sup} corresponde a Y_2 y y_{inf} a Y_1. Usando franjas verticales tenemos

$$\text{área} = \int_{A}^{B} (Y_2 - Y_1)\, dx,$$

donde A y B son los valores x de los puntos de intersección en los cuadrantes III y IV, respectivamente. Con la función de intersección encontramos A, como se indica en la figura 14.37. Este valor de x se almacena entonces como A (véase la fig. 14.38). De manera similar, encontramos el valor x del punto de intersección en el cuadrante IV, que almacenamos en B. Con el comando "fnInt(" (véase la fig. 14.38), estimamos que el área de la región es de 7.54 unidades cuadradas.

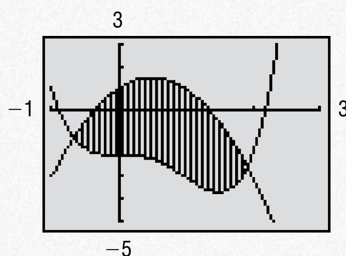


FIGURA 14.36 Gráficas de $Y_1(y_{inf})$ y $Y_2(y_{sup})$.

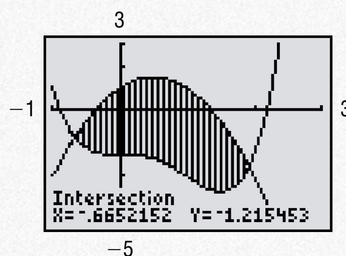


FIGURA 14.37 Punto de intersección en el tercer cuadrante.

```
X→A
        -.6652152497
X→B
         1.922807311
fnInt(Y₂-Y₁,X,A,
B)
         7.537172953
```

FIGURA 14.38 Almacenamiento de las abscisas de los puntos de intersección y estimación del área.

Ejercicio 14.9

En los problemas del 1 al 6 exprese en términos de una integral (o integrales) el área de la región sombreada. No evalúe su expresión.

1. Observe la figura 14.39.

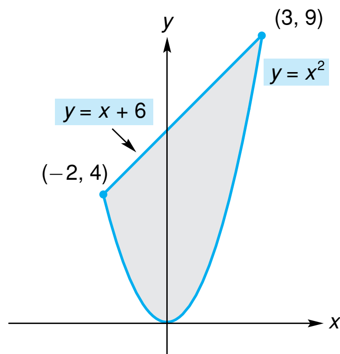


FIGURA 14.39 Región para el problema 1.

2. Observe la figura 14.40.

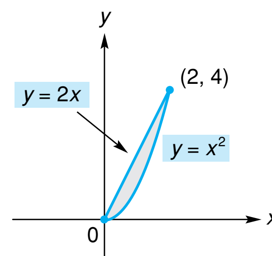


FIGURA 14.40 Región para el problema 2.

3. Observe la figura 14.41.

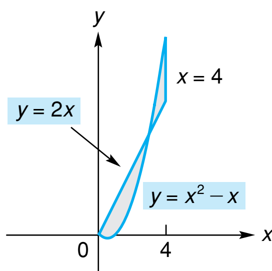


FIGURA 14.41 Región para el problema 3.

4. Observe la figura 14.42.

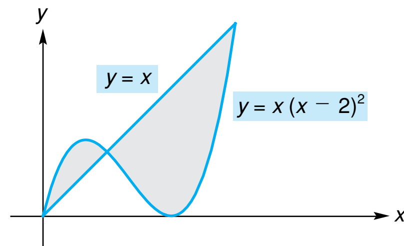


FIGURA 14.42 Región para el problema 4.

5. Observe la figura 14.43.

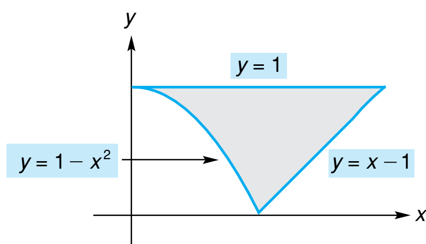


FIGURA 14.43 Región para el problema 5.

6. Observe la figura 14.44.

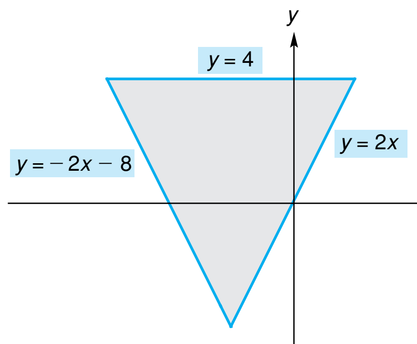


FIGURA 14.44 Región para el problema 6.

7. Exprese en términos de una sola integral el área total de la región a la izquierda de la recta $x = 2$, que se encuentra entre las curvas $y = x^2 - 4$ y $y = 11 - 2x^2$. *No* evalúe la integral.

8. Exprese en términos de una sola integral el área total de la región en el *cuarto* cuadrante, limitada por el eje x y las gráficas de $y^2 = x$ y $y = 2 - x$. *No* evalúe la integral.

En los problemas del 9 al 32 encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Asegúrese de encontrar los puntos de intersección requeridos. Considere si el uso de franjas horizontales hace más sencilla la integral que el uso de franjas verticales.

9. $y = x^2, \quad y = 2x.$

10. $y = x, \quad y = -x + 3, \quad y = 0.$

11. $y = x^2, \quad x = 0, \quad y = 4\ (x \geq 0).$

12. $y = x^2 + 1, \quad y = x + 3.$

13. $y = x^2 + 2, \quad y = 8.$

14. $y^2 = x + 1, \quad x = 1.$

15. $x = 8 + 2y, \quad x = 0, \quad y = -1, \quad y = 3.$

16. $y = x - 4, \quad y^2 = 2x.$

17. $y = 4 - x^2, \quad y = -3x.$

18. $x = y^2 + 2, \quad x = 6.$

19. $y^2 = x, \quad y = x - 2.$

20. $y = x^2, \quad y = x + 2.$

21. $2y = 4x - x^2, \quad 2y = x - 4.$

22. $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2.$

23. $y^2 = x, \quad 3x - 2y = 1.$

24. $y = 2 - x^2, \quad y = x.$

25. $y = 8 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = -1, \quad x = 1.$

26. $y^2 = 2 - x, \quad y = x + 4.$

27. $y = x^2, \quad y = 2, \quad y = 5.$

28. $y = x^3 - x$, eje x.

29. $y = x^3 - 1, \quad y = x - 1.$

30. $y = x^3, \quad y = \sqrt{x}.$

31. $4x + 4y + 17 = 0, \quad y = \dfrac{1}{x}.$

32. $y^2 = -x, \quad x - y = 4, \quad y = -1, \quad y = 2.$

---

33. Encuentre el área de la región entre las curvas

$$y = x - 1 \qquad \text{y} \qquad y = 5 - 2x$$

entre $x = 0$ y $x = 4$.

34. Encuentre el área de la región entre las curvas

$$y = x^2 - 4x + 4 \qquad \text{y} \qquad y = 10 - x^2$$

entre $x = 2$ y $x = 4$.

35. Curva de Lorentz Una *curva de Lorentz* se utiliza para estudiar las distribuciones de ingresos. Si x es el porcentaje acumulativo de receptores de ingresos, ordenados de más pobres a más ricos, y y es el porcentaje acumulativo de ingresos, entonces la igualdad de la distribución de ingresos está dada por la recta $y = x$, en la figura 14.45, donde x y y se expresan como decimales. Por ejemplo, 10% de la gente recibe 10% de los ingresos totales, 20% de la gente recibe 20% de los ingresos, etcétera. Suponga que la distribución real está dada por la curva de Lorentz definida por

$$y = \tfrac{20}{21}x^2 + \tfrac{1}{21}x.$$

Observe, por ejemplo, que 30% de la gente sólo recibe 10% de los ingresos totales. El grado de desviación de la igualdad se mide por el *coeficiente de desigualdad*[13] para una curva de Lorentz. Este coeficiente se define como el área entre la curva y la diagonal, dividida entre el área bajo la diagonal:

$$\frac{\text{área entre la curva y la diagonal}}{\text{área bajo la diagonal}}.$$

Por ejemplo, cuando todos los ingresos son iguales, el coeficiente de desigualdad es cero. Encuentre el coeficiente de desigualdad para la curva de Lorentz definida antes.

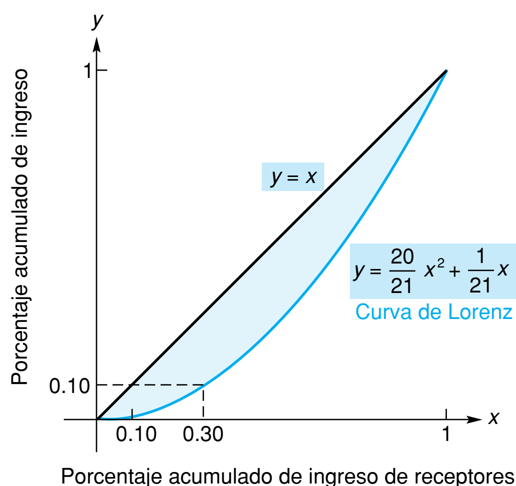


FIGURA 14.45 Diagrama para el problema 35.

36. Curva de Lorentz Encuentre el coeficiente de desigualdad en el problema 35, para la curva de Lorentz definida por $y = \frac{11}{12}x^2 + \frac{1}{12}x$.

37. Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $y^2 = 4x$ y $y = mx$, donde m es una constante positiva.

38. a. Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 - 1$ y $y = 2x + 2$.

b. ¿Qué porcentaje del área en la parte (a) se encuentra arriba del eje x?

39. La región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 4$ está dividida en dos partes de igual área por la recta $y = k$, donde k es una constante. Encuentre el valor de k.

---

[13]G. Stigler, *The Theory of Price*, tercera edición (Nueva York: The Macmillan Company, 1966), págs. 293-294.

En los problemas del 40 al 44 estime el área de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.

40. $y = 9x - 15 - x^2, \quad y = \dfrac{10}{x}.$

41. $y = \sqrt{25 - x^2}, \quad y = 7 - 2x - x^4.$

42. $y = x^3 - 8x + 1, \quad y = x^2 - 5.$

43. $y = x^5 - 3x^3 + 2x, \quad y = 3x^2 - 4.$

44. $y = x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30, \quad y = x^3 + x^2 - 20x.$

OBJETIVO Desarrollar los conceptos económicos de excedente de los consumidores y excedente de los productores, los que están representados por áreas.

14.10 Excedente de los consumidores y de los productores

La determinación del área de una región tiene aplicaciones en economía. La figura 14.46 muestra una curva de oferta para un producto. La curva indica el precio p por unidad al que un fabricante venderá (o suministrará) q unidades. El diagrama también muestra la curva de demanda para el producto. Esta curva indica el precio por unidad al que los consumidores comprarán (o demandarán) q unidades. El punto (q_0, p_0) en el que las curvas se intersecan se llama *punto de equilibrio*. Aquí, p_0 es el precio por unidad al que los consumidores comprarán la misma cantidad q_0 de un producto que los productores desean vender a ese precio. En resumen, p_0 es el precio en el que se presenta estabilidad en la relación productor-consumidor.

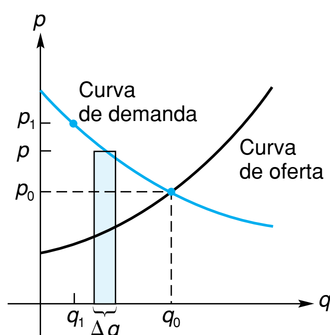


FIGURA 14.46 Curvas de oferta y demanda.

Supongamos que el mercado está en equilibrio y el precio por unidad del producto es p_0. De acuerdo con la curva de demanda, hay consumidores que estarían dispuestos a pagar *más* que p_0. Por ejemplo, al precio p_1 por unidad, los consumidores comprarían q_1 unidades. Estos consumidores están beneficiándose del menor precio, inferior al de equilibrio p_0.

La franja vertical en la figura 14.46 tiene un área de $p\,\Delta q$. Esta expresión puede también considerarse como la cantidad total de dinero que los consumidores gastarían comprando Δq unidades de producto, si el precio por unidad fuese p. Como el precio es en realidad p_0, esos consumidores sólo gastan $p_0\,\Delta q$ en esas Δq unidades y se benefician así en la cantidad $p\,\Delta q - p_0\,\Delta q$. Esto puede escribirse como $(p - p_0)\,\Delta q$, que es el área de un rectángulo de ancho Δq y altura $p - p_0$ (véase la fig. 14.47). Sumando las áreas de todos los rectángulos entre $q = 0$ y $q = q_0$, por medio de integración definida, tenemos

$$\int_0^{q_0} (p - p_0)\,dq.$$

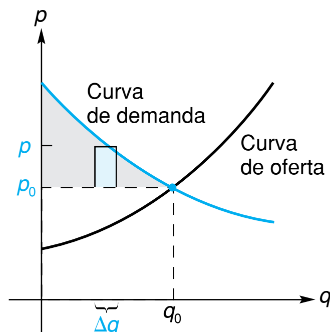


FIGURA 14.47 Beneficio para los consumidores por Δq unidades.

Esta integral, bajo ciertas condiciones, representa la ganancia total de los consumidores que están dispuestos a pagar más que el precio de equilibrio. Esta ganancia total se llama **excedente de los consumidores** y se abrevia EC. Si la función de demanda está dada por $p = f(q)$, entonces

$$\text{EC} = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\,dq.$$

De manera geométrica (véase la fig. 14.48), el excedente de los consumidores se representa por el área entre la recta $p = p_0$ y la curva de demanda $p = f(q)$ entre $q = 0$ y $q = q_0$.

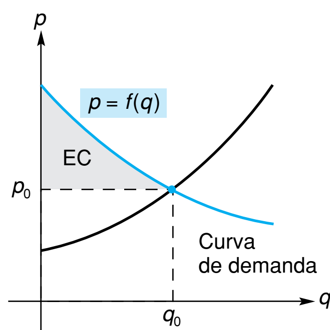


FIGURA 14.48 Excedente de los consumidores.

Algunos de los productores también se benefician del precio de equilibrio, ya que están dispuestos a suministrar el producto a precios *menores* que p_0. Bajo ciertas condiciones, la ganancia total de los productores se representa en forma geométrica en la figura 14.49, por el área entre la recta $p = p_0$ y la curva de oferta $p = g(q)$ entre $q = 0$ y $q = q_0$. Esta ganancia, llamada **excedente de los productores,** y abreviada EP, está dada por

$$\text{EP} = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\,dq.$$

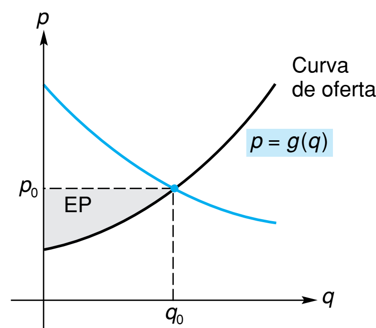


FIGURA 14.49 Excedente de los productores.

EJEMPLO 1 Determinación del excedente de los consumidores y de los productores

La función de demanda para un producto es

$$p = f(q) = 100 - 0.05q,$$

donde p es el precio por unidad (en dólares) de q unidades. La función de oferta es

$$p = g(q) = 10 + 0.1q.$$

Determinar el excedente de los consumidores y de los productores, bajo equilibrio del mercado.

Solución: primero debemos encontrar el punto de equilibrio (p_0, q_0) resolviendo el sistema formado por las funciones $p = 100 - 0.05q$ y $p = 10 + 0.1q$. Igualamos las dos expresiones para p y resolvemos:

$$\begin{aligned} 10 + 0.1q &= 100 - 0.05q, \\ 0.15q &= 90, \\ q &= 600. \end{aligned}$$

Cuando $q = 600$, $p = 10 + 0.1(600) = 70$. Así, $q_0 = 600$ y $p_0 = 70$. El excedente de los consumidores es

$$\begin{aligned} \text{EC} &= \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\,dq = \int_0^{600} (100 - 0.05q - 70)\,dq \\ &= \left(30q - 0.05\frac{q^2}{2}\right)\Bigg|_0^{600} = 9000. \end{aligned}$$

El excedente de los productores es

$$\begin{aligned} \text{EP} &= \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\,dq = \int_0^{600} [70 - (10 + 0.1q)]\,dq \\ &= \left(60q - 0.1\frac{q^2}{2}\right)\Bigg|_0^{600} = 18{,}000. \end{aligned}$$

Por tanto, el excedente de los consumidores es de \$9000 y el de los productores es de \$18,000.

EJEMPLO 2 Uso de franjas horizontales para encontrar el excedente de los consumidores y de los productores

La ecuación de demanda para un producto es

$$q = f(p) = \frac{90}{p} - 2$$

y la ecuación de oferta es $q = g(p) = p - 1$. *Determinar el excedente de los consumidores y de los productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.*

Solución: al determinar el punto de equilibrio, tenemos

$$\begin{aligned} p - 1 &= \frac{90}{p} - 2, \\ p^2 + p - 90 &= 0, \\ (p + 10)(p - 9) &= 0. \end{aligned}$$

Así, $p_0 = 9$, por lo que $q_0 = 9 - 1 = 8$ (véase la fig. 14.50). Observe que la ecuación de demanda expresa a q como una función de p. Ya que el exce-

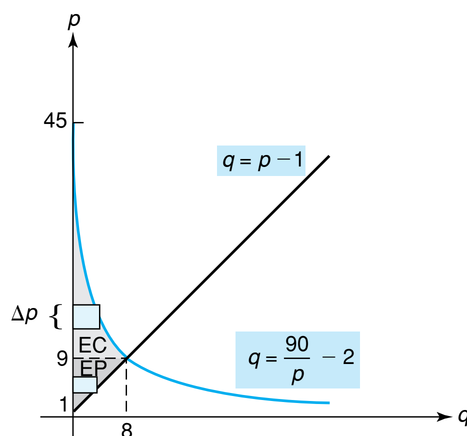


FIGURA 14.50 Diagrama para el ejemplo 2.

dente de los consumidores puede considerarse como un área, esta área puede determinarse por medio de franjas horizontales de ancho Δp y longitud $q = f(p)$. Las áreas de estas franjas se suman desde $p = 9$ hasta $p = 45$, por medio de integración con respecto a p:

$$\text{EC} = \int_9^{45} \left(\frac{90}{p} - 2\right) dp = (90 \ln |p| - 2p)\Big|_9^{45}$$

$$= 90 \ln 5 - 72 \approx 72.85.$$

Usando franjas horizontales para el excedente de los productores, se tiene

$$\text{EP} = \int_1^9 (p-1)\, dp = \frac{(p-1)^2}{2}\Big|_1^9 = 32.$$

Ejercicio 14.10

En los problemas del 1 al 6, la primera ecuación es una ecuación de demanda y la segunda es una ecuación de oferta de un producto. En cada caso, determine el excedente de los consumidores y de los productores, bajo equilibrio del mercado.

1. $p = 22 - 0.8q$,
$p = 6 + 1.2q$.

2. $p = 1100 - q^2$,
$p = 300 + q^2$.

3. $p = \dfrac{50}{q+5}$,
$p = \dfrac{q}{10} + 4.5$.

4. $p = 400 - q^2$,
$p = 20q + 100$.

5. $q = 100(10 - p)$,
$q = 80(p - 1)$.

6. $q = \sqrt{100 - p}$,
$q = \dfrac{p}{2} - 10$.

7. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = 10\sqrt{100 - p}.$$

Calcule el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado, que ocurre a un precio de $84.

8. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = 400 - p^2,$$

y la ecuación de oferta es

$$p = \frac{q}{60} + 5.$$

Encuentre el excedente de los productores y de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

9. La ecuación de demanda para un producto es $p = 2^{11-q}$, y la ecuación de oferta es $p = 2^{q+1}$, donde p es el precio por unidad (en cientos de dólares) cuando q unidades se demandan o se ofrecen. Determine, al millar de unidades más cercano, el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

10. La ecuación de demanda para un producto es

$$(p + 20)(q + 10) = 800,$$

y la ecuación de oferta es

$$q - 2p + 30 = 0.$$

a. Verifique, por sustitución, que el equilibrio del mercado ocurre cuando $p = 20$ y $q = 10$.
b. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.



11. La ecuación de demanda para un producto es

$$p = 60 - \frac{50q}{\sqrt{q^2 + 3600}},$$

y la ecuación de oferta es

$$p = 10\ln(q + 20) - 26.$$

Determine el excedente de los consumidores y de los productores bajo equilibrio del mercado. Redondee sus respuestas al entero más cercano.

14.11 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 14.1 antiderivada integral indefinida $\int f(x)\,dx$ signo de integral integrando variable de integración constante de integración

Sección 14.2 condición inicial

Sección 14.3 regla de la potencia para integración

Sección 14.5 $\sum$ índice de sumatoria límites de sumatoria

Sección 14.6 integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ límite inferior de integración límite superior de integración

Sección 14.7 teorema fundamental del cálculo integral $F(x)|_a^b$

Sección 14.8 elemento vertical de área (franja vertical)

Sección 14.9 elemento horizontal de área (franja horizontal)

Sección 14.10 excedente de los consumidores excedente de los productores

Resumen

Una antiderivada de una función f es una función F tal que $F'(x) = f(x)$. Dos antiderivadas cualesquiera de f difieren cuando mucho en una constante. La antiderivada más general de f se llama integral indefinida de f y se denota $\int f(x)\,dx$. Así,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

donde C se llama constante de integración.

Algunas fórmulas básicas de integración son

$$\int k\,dx = kx + C, \quad k \text{ es una constante},$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx, \quad k \text{ es una constante},$$

$$\text{y} \quad \int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Otra fórmula es la regla de la potencia para integración:

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{si } n \neq -1.$$

Aquí, u representa una función diferenciable de x y du es su diferencial. Al aplicar la regla de la potencia a una integral dada, es importante que la integral se escriba en forma que coincida con la de la regla. Otras fórmulas de integración son

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

$$\text{y} \quad \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C, \quad u \neq 0.$$

Si se conoce la razón de cambio de una función f, esto es, si f' se conoce, entonces f es una antiderivada de f'. Además, si sabemos que f satisface una condición inicial, entonces podemos encontrar la antiderivada particular. Por ejemplo, si nos dan una función de costo marginal dc/dq, por integración podemos encontrar la forma general de c. Esa forma implica una constante de integración. Sin embargo, si también nos dan los costos fijos (esto es, los costos implicados cuando $q = 0$), podremos determinar el valor de la constante de integración y así encontrar la función de costo particular c. De manera similar, si nos dan una función de ingreso marginal dr/dq, entonces por integración y usando el hecho de que $r = 0$ cuando $q = 0$, podemos determinar la función de ingreso particular r. Una vez conocida r, puede encontrarse la correspondiente ecuación de demanda usando la ecuación $p = r/q$.

La notación sigma es conveniente para representar sumas, y en particular es útil en la determinación de áreas. Para encontrar el área de la región limitada por $y = f(x)$ [donde $f(x) \geq 0$ y f es continua] y el eje x, entre $x = a$ y $x = b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud Δx. Si x_i es el extremo derecho de un subintervalo arbitrario, el producto $f(x_i)\,\Delta x$ es el área de un rectángulo. Si denotamos la suma de todas estas áreas de rectángulos para los n subintervalos por S_n, entonces el límite de S_n cuando $n \to \infty$ es el área de toda la región:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \text{área}.$$

Si se omite la restricción de que $f(x) \geq 0$, el límite anterior se define como la integral definida de f en $[a, b]$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En vez de evaluar integrales definidas usando límites, puede usarse el teorema fundamental del cálculo integral. En forma matemática,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f.

Algunas propiedades de la integral definida son

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx, \quad k \text{ es una constante,}$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$$

y

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Si se conoce la razón de cambio de una función f, entonces un cambio en los valores de una función de f puede encontrarse con facilidad por medio de la fórmula

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Si $f(x) \geq 0$ y es continua en $[a, b]$, entonces la integral definida puede usarse para encontrar el área de la región limitada por $y = f(x)$ y el eje x, entre $x = a$ y $x = b$. La integral definida puede usarse también para encontrar áreas de regiones más complicadas. En esos casos conviene dibujar un elemento de área de la región para plantear correctamente la integral definida. A veces conviene considerar elementos verticales y en otras es preferible usar elementos horizontales.

Una aplicación de la determinación de áreas tiene que ver con el excedente de los consumidores y de los productores. Suponga que el mercado para un producto está en equilibrio y que (q_0, p_0) es el punto de equilibrio (el punto de intersección de las curvas de demanda y oferta para el producto). El excedente de los consumidores, EC, corresponde al área entre $q = 0$ y $q = q_0$, limitada por arriba por la curva de demanda y abajo por la recta $p = p_0$. Entonces,

$$\text{EC} = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\,dq,$$

donde f es la función de demanda. El excedente de los productores, EP, corresponde al área, entre $q = 0$ y $q = q_0$, limitada por arriba por la recta $p = p_0$ y abajo por la curva de oferta. Así,

$$\text{EP} = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\,dq,$$

donde g es la función de oferta.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 40 determine las integrales.

1. $\int (x^3 + 2x - 7)\, dx.$
2. $\int dx.$
3. $\int_0^9 (\sqrt{x} + x)\, dx.$
4. $\int \frac{4}{5 - 3x}\, dx.$
5. $\int \frac{6}{(x + 5)^3}\, dx.$
6. $\int_4^{12} (y - 8)^{501}\, dy.$
7. $\int \frac{6x^2 - 12}{x^3 - 6x + 1}\, dx.$
8. $\int_0^2 xe^{4-x^2}\, dx.$
9. $\int_0^1 \sqrt[3]{3t + 8}\, dt.$
10. $\int \frac{5 - 3x}{9}\, dx.$
11. $\int y(y + 1)^2\, dy.$
12. $\int_0^1 10^{-8}\, dx.$
13. $\int \frac{\sqrt[4]{z} - \sqrt[3]{z}}{\sqrt{z}}\, dz.$
14. $\int \frac{(0.5x - 0.1)^4}{0.4}\, dx.$
15. $\int_1^2 \frac{t^2}{2 + t^3}\, dt.$
16. $\int \frac{4x^2 - x}{x}\, dx.$
17. $\int x^2\sqrt{3x^3 + 2}\, dx.$
18. $\int (2x^3 + x)(x^4 + x^2)^{3/4}\, dx.$
19. $\int (e^{2y} - e^{-2y})\, dy.$
20. $\int \frac{8x}{3\sqrt[3]{7 - 2x^2}}\, dx.$
21. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx.$
22. $\int_0^1 \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}\, dx.$
23. $\int_{-2}^1 10(y^4 - y + 1)\, dy.$
24. $\int_7^{70} dx.$
25. $\int_{\sqrt{3}}^2 7x\sqrt{4 - x^2}\, dx.$
26. $\int_0^1 (2x + 1)(x^2 + x)^4\, dx.$
27. $\int_0^1 \left[2x - \frac{1}{(x + 1)^{2/3}}\right] dx.$
28. $\int_2^8 3(\sqrt{2x} - x + 4)\, dx.$
29. $\int \frac{\sqrt{t} - 3}{t^2}\, dt.$
30. $\int \frac{2z^2}{z - 1}\, dz.$
31. $\int_{-1}^0 \frac{x^2 + 4x - 1}{x + 2}\, dx.$
32. $\int \frac{(x^2 + 4)^2}{x^2}\, dx.$
33. $\int 9\sqrt{x}\sqrt{x^{3/2} + 1}\, dx.$
34. $\int \frac{e^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{2x}}\, dx.$
35. $\int_1^e \frac{e^{\ln x}}{x^2}\, dx.$
36. $\int \frac{6x^2 + 4}{e^{x^3+2x}}\, dx.$
37. $\int \frac{(1 + e^{3x})^2}{e^{-3x}}\, dx.$
38. $\int \frac{3}{e^{3x}(6 + e^{-3x})^2}\, dx.$
39. $\int 3\sqrt{10^{3x}}\, dx.$
40. $\int \frac{3x^3 + 3x^2 + 11x + 1}{x^2 + x + 3}\, dx.$

En los problemas 41 y 42 encuentre, y sujeta a las condiciones dadas.

41. $y' = e^{2x} + 3, \quad y(0) = -\frac{1}{2}.$
42. $y' = \frac{x + 3}{x}, \quad y(1) = 5.$

En los problemas del 43 al 50 determine el área de la región limitada por la curva, el eje x y las rectas dadas.

43. $y = x^2 - 1, \quad x = 2 \quad (y \geq 0).$
44. $y = 4e^x, \quad x = 0, \quad x = 3.$
45. $y = \sqrt{x + 4}, \quad x = 0.$
46. $y = x^2 - x - 2, \quad x = -2, \quad x = 2.$
47. $y = 5x - x^2.$
48. $y = \sqrt[4]{x}, \quad x = 1, \quad x = 16.$
49. $y = \frac{1}{x} + 3, \quad x = 1, \quad x = 3.$
50. $y = x^3 - 1, \quad x = -1.$

En los problemas del 51 al 58 encuentre el área de la región limitada por las curvas dadas.

51. $y^2 = 4x, \quad x = 0, \quad y = 2.$
52. $y = 2x^2, \quad x = 0, \quad y = 2 \ (x \geq 0).$
53. $y = x^2 + 4x - 5, \quad y = 0.$
54. $y = 2x^2, \quad y = x^2 + 9.$

55. $y = x^2 - 2x, \quad y = 12 - x^2.$

56. $y = \sqrt{x}, \quad x = 0, \quad y = 3.$

57. $y = \ln x, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1.$

58. $y = 1 - x, \quad y = x - 2, \quad y = 0, \quad y = 1.$

59. Ingreso marginal Si el ingreso marginal está dado por

$$\frac{dr}{dq} = 100 - \frac{3}{2}\sqrt{2q},$$

determine la correspondiente ecuación de demanda.

60. Costo marginal Si el costo marginal está dado por

$$\frac{dc}{dq} = q^2 + 7q + 6,$$

y los costos fijos son de 2500, determine el costo total para producir 6 unidades. Suponga que los costos están en dólares.

61. Ingreso marginal Una función de ingreso marginal de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = 275 - q - 0.3q^2.$$

Si r está en dólares, encuentre el incremento en el ingreso total del fabricante si la producción se incrementa de 10 a 20 unidades.

62. Costo marginal Una función de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = \frac{500}{\sqrt{2q + 25}}.$$

Si c está en dólares, determine el costo implicado en incrementar la producción de 100 a 300 unidades.

63. Altas hospitalarias Para un grupo de personas hospitalizadas, suponga que la razón de altas está dada por

$$f(t) = 0.008e^{-0.008t},$$

donde $f(t)$ es la proporción de altas por día al final de t días de hospitalización. ¿Qué proporción del grupo es dada de alta al término de 100 días?

64. Gastos de un negocio Los gastos totales (en dólares) de un negocio para los próximos cinco años están dados por

$$\int_0^5 4000e^{0.05t}\, dt.$$

Evalúe los gastos.

65. Encuentre el área de la región entre las curvas $y = 9 - 2x$ y $y = x$ de $x = 0$ a $x = 4$.

66. Encuentre el área de la región entre las curvas $y = x^2$ y $y = 4 - 3x$ entre $x = -1$ y $x = 2$.

67. Excedente de los consumidores y de los productores Para un producto, la ecuación de demanda es

$$p = 0.01q^2 - 1.1q + 30,$$

y su ecuación de oferta es

$$p = 0.01q^2 + 8.$$

Determine el excedente de los consumidores y de los productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.

68. Excedente de los consumidores Para un producto, la ecuación de demanda es

$$p = (q - 5)^2,$$

y la ecuación de oferta es

$$p = q^2 + q + 3,$$

donde p (en miles de dólares) es el precio de 100 unidades cuando q cientos de unidades son demandadas u ofrecidas. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

69. Biología En un estudio sobre mutación de genes[14], se tiene la ecuación

$$\int_{q_0}^{q_n} \frac{dq}{q - \hat{q}} = -(u + v)\int_0^n dt$$

donde u y v son razones de mutación de genes, las q son frecuencias de genes y n es el número de generaciones. Suponga que todas las letras representan constantes, excepto q y t. Integre ambos miembros de la ecuación y luego utilice su resultado para demostrar que

$$n = \frac{1}{u + v}\ln\left|\frac{q_0 - \hat{q}}{q_n - \hat{q}}\right|.$$

70. Flujo de un fluido En el estudio del flujo de un fluido dentro de un tubo de radio constante, R, tal como el flujo de la sangre en ciertas partes del cuerpo, puede considerarse que el tubo consiste en tubos concéntricos de radio r, donde $0 \le r \le R$. La velocidad v del fluido es una función de r y está dada por[15]

$$v = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4\eta l},$$

donde P_1 y P_2 son las presiones en los extremos del tubo, η (letra griega "eta") es la viscosidad del fluido y l la longitud del tubo. La razón de volumen Q del fluido por el tubo está dado por

$$Q = \int_0^R 2\pi rv\, dr.$$

[14] W. B. Mather, *Principles of Quantitative Genetics* (Minneapolis: Burgess Publishing Company, 1964).

[15] R. W. Stacy et. al., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

Demuestre que $Q = \dfrac{\pi R^4(P_1 - P_2)}{8\eta l}$. Observe que R aparece como un factor elevado a la cuarta potencia. Así, duplicar el radio del tubo tiene por efecto incrementar el flujo por un factor de 16. La fórmula para la razón de volumen se llama *ley de Poiseuille*, en honor del fisiólogo francés Jean Poiseuille.

71. Inventario En un análisis de inventarios, Barbosa y Friedman[16] se refieren a la función

$$g(x) = \frac{1}{k}\int_1^{1/x} ku^r\, du,$$

donde k y r son constantes, $k > 0, r > -2$ y $x > 0$. Verifique la afirmación de que

$$g'(x) = -\frac{1}{x^{r+2}}.$$

[*Sugerencia:* considere dos casos: cuando $r \neq -1$ y cuando $r = -1$].

En los problemas del 72 al 74 estime el área de la región limitada por las curvas dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.

72. $y = 3x^3 + 6x^2 - 5x - 4, \quad y = 0.$

73. $y = x^3 - 2x - 3, \quad y = 4 + 2x - 3x^2.$

74. $y = x^3 - 2x - 3, \quad y = 2x^2 - x^3 - 4.$



75. La ecuación de demanda para un producto es

$$p = \frac{200}{\sqrt{q + 20}},$$

y la ecuación de oferta es

$$p = 2\ln(q + 10) + 5.$$

Determine el excedente de los consumidores y de los productores bajo equilibrio del mercado. Redondee sus respuestas al entero más cercano.

[16] L. C. Barbosa y M. Friedman, "Deterministic Inventory Lot Size Models —a General Root Law", *Management Science*, 24, núm. 8 (1978), 819-826.

Aplicación práctica

Precio de envío



Supongamos que usted es fabricante de un producto cuyas ventas tienen lugar dentro de R millas alrededor de su fábrica. Suponga que usted cobra a sus clientes a razón de s, en dólares por milla, por cada unidad de producto vendido. Si m es el precio unitario (en dólares) en la fábrica, entonces el precio unitario p de entrega a un cliente situado a x millas de la fábrica será el precio de la fábrica más el cargo por envío sx:

$$p = m + sx, \quad 0 \leq x \leq R. \quad \textbf{(1)}$$

El problema es determinar el precio promedio de entrega de las unidades vendidas.

Supongamos que existe una función f tal que $f(t) \geq 0$ en el intervalo $[0, R]$ y que el área bajo la gráfica de f y arriba del eje t, entre $t = 0$ y $t = x$, representa el número total de unidades Q vendidas a clientes dentro de un radio de x millas de la fábrica [véase la fig. 14.51(a)]. Podemos referirnos a f como la distribución de la demanda. Como Q es una función de x y se representa por un área,

$$Q(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

En particular, el número total de unidades vendidas dentro del área del mercado es

$$Q(R) = \int_0^R f(t)\, dt$$

[véase la fig. 14.51(b)]. Por ejemplo, si $f(t) = 10$ y $R = 100$, entonces el número total de unidades vendidas dentro del área del mercado es

$$Q(100) = \int_0^{100} 10\, dt = 10t\Big|_0^{100} = 1000 - 0 = 1000.$$

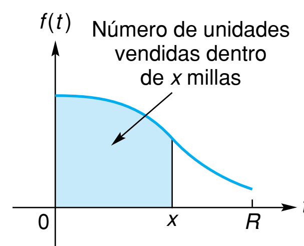
El precio de entrega promedio A está dado por

$$A = \frac{\text{ingreso total}}{\text{número total de unidades vendidas}}.$$

Como el denominador es $Q(R)$, A puede determinarse una vez que se conoce el ingreso total.

Para encontrar el ingreso total, consideremos primero el número de unidades vendidas en un intervalo. Si $t_1 < t_2$ [véase la fig. 14.52(a)], entonces el área bajo la gráfica de f y arriba del eje t, entre $t = 0$ y $t = t_1$, representa el número de unidades vendidas dentro de un radio de t_1 millas de la fábrica. De manera análoga, el área bajo la gráfica de f y arriba del eje t, entre $t = 0$ y $t = t_2$, representa el número de unidades vendidas dentro de t_2 millas de la fábrica. La diferencia entre esas áreas geométricamente es el área de la región sombreada en la figura 14.52(a), y representa el número de unidades vendidas entre t_1 y t_2 millas de la fábrica, lo cual es $Q(t_2) - Q(t_1)$. Así,

$$Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt.$$



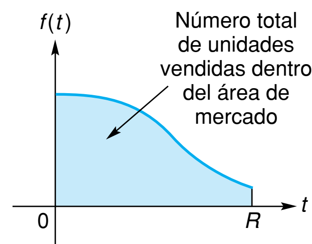


FIGURA 14.51 Número de unidades vendidas como un área.

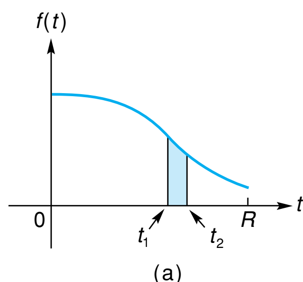
Por ejemplo, si $f(t) = 10$, entonces el número de unidades vendidas a clientes situados entre 4 y 6 millas de la fábrica es

$$Q(6) - Q(4) = \int_4^6 10\, dt = 10t\Big|_4^6 = 60 - 40 = 20.$$

El área de la región sombreada en la figura 14.52(a), puede aproximarse por el área de un rectángulo [véase la fig. 14.52(b)], cuya altura es $f(t)$ y ancho Δt, donde $\Delta t = t_2 - t_1$. Así, el número de unidades vendidas en el intervalo de longitud Δt es casi igual a $f(t)\Delta t$.

Como el precio de cada una de esas unidades es [de la ecuación (1)] casi $m + st$, el ingreso recibido es aproximadamente

$$(m + st)f(t)\,\Delta t.$$



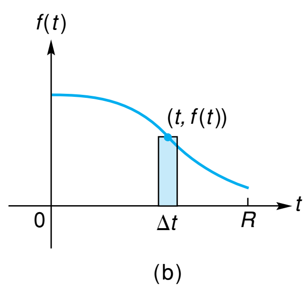


FIGURA 14.52 Número de unidades vendidas en un intervalo.

La suma de todos estos productos desde $t = 0$ hasta $t = R$, aproxima el ingreso total. La integración definida da

$$\sum (m + st)f(t)\,\Delta t \rightarrow \int_0^R (m + st)f(t)\,dt.$$

Así,

$$\text{ingreso total} = \int_0^R (m + st)f(t)\,dt.$$

En consecuencia, el precio promedio de envío A está dado por

$$A = \frac{\int_0^R (m + st)f(t)\,dt}{Q(R)}$$

o, en forma equivalente

$$A = \frac{\int_0^R (m + st)f(t)\,dt}{\int_0^R f(t)\,dt}.$$

Por ejemplo, si $f(t) = 10, m = 200, s = 0.25$ y $R = 100$, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^R (m + st)f(t)\,dt &= \int_0^{100} (200 + 0.25t)\cdot 10\,dt \\ &= 10\int_0^{100} (200 + 0.25t)\,dt \\ &= 10\left(200t + \frac{t^2}{8}\right)\Bigg|_0^{100} \\ &= 10\left[\left(20{,}000 + \frac{10{,}000}{8}\right) - 0\right] \\ &= 212{,}500.\end{aligned}$$

Pero ya teníamos que,

$$\int_0^R f(t)\,dt = \int_0^{100} 10\,dt = 1000.$$

Por tanto, el precio promedio de envío es de $212{,}500/1000 = \$212.50$.

Ejercicios

1. Si $f(t) = 50 - 2t$, determine el número de unidades vendidas a clientes localizados (a) dentro de un radio de 5 millas de la fábrica, y (b) entre 10 y 15 millas.

2. Si $f(t) = 40 - 0.5t$, $m = 50$, $s = 0.20$ y $R = 80$, determine (a) el ingreso total; (b) el número total de unidades vendidas, y (c) el precio promedio de envío.

3. Si $f(t) = 900 - t^2$, $m = 100$, $s = 1$ y $R = 30$, determine (a) el ingreso total; (b) el número total de unidades vendidas, y (c) el precio promedio de envío. Si desea, utilice una calculadora gráfica.

4. En la práctica, ¿cómo hacen los vendedores de cosas como libros o ropa, para determinar los cobros por envío de un pedido? (Visite a un comerciante en línea para determinarlo.) ¿Usted cómo podría calcular el precio promedio de envío de sus productos? ¿El procedimiento es fundamentalmente diferente del visto en está aplicación práctica?



CAPÍTULO 15

Métodos y aplicaciones de la integración

Ahora sabemos cómo determinar la derivada de una función, y en algunos casos conocemos cómo encontrar una función a partir de su derivada, por medio de la integración. Sin embargo, el proceso de integración no siempre es directo.

Suponga que modelamos la desaparición gradual de una sustancia química, usando las ecuaciones $M' = -0.004t$ y $M(0) = 3000$, en donde la cantidad M, en gramos, es una función del tiempo t en días. Este problema de condición inicial es resuelto con facilidad por medio de integración con respecto a t: $M = -0.002t^2 + 3000$. Pero, ¿qué pasa si, en lugar de lo anterior, la desaparición de la sustancia fuese modelada por medio de las ecuaciones $M' = -0.004M$ y $M(0) = 3000$? El simple reemplazo de t en la primera ecuación por M cambia el carácter del problema. Aún no hemos aprendido cómo encontrar una función cuando su derivada está descrita en términos de ella misma.

Si trabajó la aplicación práctica del capítulo 11, usted recordará una situación similar, que incluye una ecuación con P de un lado y la derivada de P en el otro. Allí usamos una aproximación para resolver el problema, En este capítulo aprenderemos un método que produce una solución exacta en muchos problemas de este tipo.

Las ecuaciones de la forma $y' = ky$, en donde k es constante, son especialmente comunes. Cuando y representa la cantidad de sustancia radiactiva, $y' = ky$ puede representar la tasa de su desaparición, a través de decaimiento radiactivo. Y si y es la temperatura de un pollo acabado de sacar del horno o que se acaba de meter al congelador, entonces una fórmula, conocida como ley de enfriamiento de Newton, puede utilizarse para describir el cambio en la temperatura interna del pollo a lo largo del tiempo. La ley de Newton, que se analizará en este capítulo, podría utilizarse para recomendar procedimientos en la cocina de un restaurante, de modo que los alimentos propensos a contaminación a través de crecimiento bacterial no permanezcan mucho tiempo en una zona de temperatura peligrosa (40 a 140° F). El crecimiento de bacterias, respecto a eso, ¡también se deduce de una ley tipo $y' = ky$!

OBJETIVO Desarrollar y aplicar la fórmula para integración por partes.

15.1 INTEGRACIÓN POR PARTES[1]

Muchas integrales no pueden encontrarse con los métodos que hemos visto hasta ahora. Sin embargo, hay maneras de cambiar ciertas integrales a formas más fáciles de integrar. Veremos dos de tales procedimientos: *la integración por partes* y (en la sección 15.2), *la integración por medio de fracciones parciales.*

Si u y v son funciones diferenciables de x, por la regla del producto tenemos

$$(uv)' = uv' + vu'.$$

Al ordenar nuevamente los términos resulta

$$uv' = (uv)' - vu'.$$

Integrando ambos miembros con respecto a x, obtenemos

$$\int uv'\,dx = \int (uv)'\,dx - \int vu'\,dx. \tag{1}$$

Para $\int (uv)'\,dx$ debemos encontrar una función cuya derivada con respecto a x sea $(uv)'$. Es claro que uv es esa función. Por tanto, $\int (uv)'\,dx = uv + C_1$ y la ecuación (1) queda como

$$\int uv'\,dx = uv + C_1 - \int vu'\,dx.$$

Al incluir a C_1 en la constante de integración para $\int vu'\,dx$ y reemplazar $v'dx$ por dv y $u'dx$ por du, obtenemos la *fórmula de integración por partes*:

Fórmula de integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{2}$$

Esta fórmula expresa una integral, $\int u\,dv$ en términos de otra integral, $\int v\,du$ que puede ser más fácil de integrar.

Para aplicar la fórmula a una integral dada $\int f(x)\,dx$ debemos escribir $f(x)\,dx$ como el producto de dos factores (o *partes*) escogiendo una función u y una diferencial dv tales que $f(x)\,dx = u\,dv$. Sin embargo, para que la fórmula sea útil, debemos ser capaces de integrar la parte seleccionada como dv. Para ilustrar esto consideremos

$$\int xe^x\,dx.$$

[1]Puede omitirse sin pérdida de continuidad.

Esta integral no puede determinarse con las fórmulas de integración previas. Una manera de escribir $xe^x\,dx$ en la forma $u\,dv$ es haciendo

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = e^x\,dx.$$

Para aplicar la fórmula de integración por partes, debemos encontrar du y v:

$$du = dx \quad \text{y} \quad v = \int e^x\,dx = e^x + C_1.$$

Por tanto,

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x\,dx}_{dv} = uv - \int v\,du$$

$$= x(e^x + C_1) - \int (e^x + C_1)\,dx$$

$$= xe^x + C_1x - e^x - C_1x + C$$

$$= xe^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.$$

La primera constante, C_1, no aparece en la respuesta final. Ésta es una característica de la integración por partes y de ahora en adelante esta constante no será escrita cuando encontremos v a partir de dv.

Cuando se usa la fórmula de integración por partes, algunas veces la "mejor selección" de u y dv puede no ser obvia. En algunos casos una selección puede ser tan buena como la otra; en otros, sólo una selección puede ser adecuada. La habilidad para hacer una buena selección (si ésta existe) se adquiere con la práctica y, desde luego, con el procedimiento de ensayo y error.

Principios en práctica 1
Integración por partes

Las ventas mensuales de un teclado para computadora se estima que van a disminuir a una tasa de $S'(t) = -4te^{0.1t}$ teclados por mes, en donde t es el tiempo, en meses y $S(t)$ es el número de teclados vendidos cada mes. Determine $S(t)$, si ahora se venden 5000 teclados $[S(0) = 5000]$.

EJEMPLO 1 Integración por partes

Encontrar $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ *utilizando integración por partes.*

Solución: ensayamos

$$u = \ln x \quad \text{y} \quad dv = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Entonces,

$$du = \frac{1}{x}\,dx \quad \text{y} \quad v = \int x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2}.$$

Así,

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\right)}_{dv} = uv - \int v\,du$$

$$= (\ln x)(2\sqrt{x}) - \int (2x^{1/2})\left(\frac{1}{x}\,dx\right)$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int x^{-1/2}\,dx$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2(2\sqrt{x}) + C \qquad (x^{1/2} = \sqrt{x})$$

$$= 2\sqrt{x}\,[\ln(x) - 2] + C.$$

El ejemplo 2 muestra cómo puede hacerse una mala elección de u y dv Si usted hace una elección que no funcione, no se frustre. En lugar de eso, haga otras elecciones hasta que encuentre una que funcione (si existe tal elección).

EJEMPLO 2 Integración por partes

Evaluar $\int_1^2 x \ln x \, dx.$

Solución: como la integral no se ajusta a una forma familiar, intentaremos la integración por partes. Sea $u = x$ y $dv = \ln x\, dx$. Entonces $du = dx$, pero $v = \int \ln x\, dx$ no es evidente por inspección. Por lo que haremos una selección diferente para u y dv. Sea

$$u = \ln x \qquad \text{y} \qquad dv = x\,dx.$$

Entonces,

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{y} \qquad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}.$$

Por tanto,

$$\int_1^2 x\ln x\,dx = (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{x}\,dx$$

$$= (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx$$

$$= \frac{x^2\ln x}{2}\Bigg|_1^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2$$

$$= (2\ln 2 - 0) - \left(1 - \tfrac{1}{4}\right) = 2\ln 2 - \tfrac{3}{4}.$$

EJEMPLO 3 Integración por partes cuando *u* es todo el integrando

Determinar $\int \ln y\, dy.$

Solución: no podemos integrar $\ln y$ con los métodos previos, por lo que trataremos de hacerlo con integración por partes. Sea $u = \ln y$ y $dv = dy$. Entonces $du = (1/y)dy$ y $v = y$. Así, tenemos

$$\int \ln y\,dy = (\ln y)(y) - \int y\left(\frac{1}{y}\,dy\right)$$

$$= y\ln y - \int dy = y\ln y - y + C$$

$$= y[\ln(y) - 1] + C.$$

Antes de intentar la integración por partes, debemos ver si este procedimiento es realmente necesario. A veces la integral puede resolverse con una fórmula básica, como se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Forma de integración básica

Determinar $\int xe^{x^2}\,dx$.

Solución: esta integral puede ajustarse a la forma $\int e^u\,du$.



Advertencia No olvide las formas de integración básicas. ¡La integración por partes no es necesaria aquí!

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(2x\,dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int e^u\,du \qquad \text{(donde } u = x^2\text{)}$$

$$= \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

En ocasiones la integración por partes debe usarse más de una vez, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Principios en práctica 2
Doble aplicación de integración por partes

Suponga que una población de bacterias crece a una tasa de

$$P'(t) = 0.1t(\ln t)^2.$$

Determine la forma general de $P(t)$.

EJEMPLO 5 Aplicación de la integración por partes

Determinar $\int x^2e^{2x+1}\,dx$.

Solución: sea $u = x^2$ y $dv = e^{2x+1}\,dx$. Entonces, $du = 2x\,dx$ y $v = e^{2x+1}/2$.

$$\int x^2e^{2x+1}\,dx = \frac{x^2e^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2}(2x\,dx)$$

$$= \frac{x^2e^{2x+1}}{2} - \int xe^{2x+1}\,dx.$$

Para encontrar $\int xe^{2x+1}\,dx$ usaremos de nuevo la integración por partes. Aquí, sea $u = x$, y $dv = e^{2x+1}\,dx$. Entonces $du = dx$ y $v = e^{2x+1}/2$, por lo que tenemos

$$\int xe^{2x+1}\,dx = \frac{xe^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2}\,dx$$

$$= \frac{xe^{2x+1}}{2} - \frac{e^{2x+1}}{4} + C_1.$$

Así,

$$\int x^2e^{2x+1}\,dx = \frac{x^2e^{2x+1}}{2} - \frac{xe^{2x+1}}{2} + \frac{e^{2x+1}}{4} + C \qquad \text{(donde } C = -C_1\text{)}$$

$$= \frac{e^{2x+1}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C.$$

Ejercicio 15.1

1. Al aplicar la integración por partes a

$$\int f(x)\,dx,$$

un estudiante encontró que $u = x$, $du = dx$, $dv = (x + 5)^{1/2}$ y $v = \frac{2}{3}(x + 5)^{3/2}$. Use esta información para encontrar $\int f(x)\,dx$.

2. Use integración por partes para encontrar

$$\int xe^{5x+2}\,dx$$

seleccionando $u = x$ y $dv = e^{5x+2}\,dx$.

En los problemas del 3 al 29 encuentre las integrales.

3. $\int xe^{-x}\,dx.$

4. $\int xe^{2x}\,dx.$

5. $\int y^3 \ln y\,dy.$

6. $\int x^2 \ln x\,dx.$

7. $\int \ln(4x)\,dx.$

8. $\int \frac{t}{e^t}\,dt.$

9. $\int 15x\sqrt{x + 1}\,dx.$

10. $\int \frac{12x}{\sqrt{1 + 4x}}\,dx.$

11. $\int \frac{x}{(2x + 1)^2}\,dx.$

12. $\int \frac{\ln(x + 1)}{2(x + 1)}\,dx.$

13. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$

14. $\int \frac{x + 1}{e^x}\,dx.$

15. $\int_1^2 4xe^{2x}\,dx.$

16. $\int_0^1 xe^{-x}\,dx.$

17. $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx.$

18. $\int \frac{3x^3}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx.$

19. $\int_1^2 \frac{3x}{\sqrt{4 - x}}\,dx.$

20. $\int (\ln x)^2\,dx.$

21. $\int 2(2x - 1)\ln(x - 1)\,dx.$

22. $\int \frac{xe^x}{(x + 1)^2}\,dx.$

23. $\int x^2e^x\,dx.$

24. $\int_1^e \sqrt{x}\ln(x^2)\,dx.$

25. $\int (x - e^{-x})^2\,dx.$

26. $\int x^2e^{-2x}\,dx.$

27. $\int x^3e^{x^2}\,dx.$

28. $\int x^5e^{x^3}\,dx.$

29. $\int (2^x + x)^2\,dx.$

---

30. Encuentre $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\,dx$. *Sugerencia:* demuestre que

$$\frac{d}{dx}[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

31. Encuentre el área de la región limitada por el eje x, la curva $y = \ln x$ y la recta $x = e^3$.

32. Encuentre el área de la región limitada por el eje x y la curva $y = xe^{-x}$ entre $x = 0$ y $x = 4$.

33. Encuentre el área de la región limitada por el eje x, la curva $y = x\sqrt{2x + 1}$ entre $x = 0$ y $x = 4$.

34. Excedente de los consumidores Suponga que la ecuación de demanda para el producto de un fabricante está dada por

$$p = 10(q + 10)e^{-(0.1q+1)},$$

donde p es el precio por unidad (en dólares) cuando se demandan q unidades. Suponga que el equilibrio de mercado ocurre cuando $q = 20$. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio de mercado.

35. Ingreso Suponga que el ingreso total r y el precio por unidad p son funciones diferenciables de la función de producción q.

a. Use integración por partes para demostrar que

$$\int p\,dq = r - \int q\frac{dp}{dq}\,dq.$$

b. Utilizando la parte (a), demuestre que

$$r = \int \left(p + q\frac{dp}{dq}\right)dq.$$

c. Utilizando la parte (b), demuestre que

$$r(q_0) = \int_0^{q_0} \left(p + q\frac{dp}{dq}\right)dq.$$

[*Sugerencia:* remítase a la sección 14.7.]

36. Suponga que f es una función diferenciable. Aplique la integración por partes a $\int f(x)e^x\,dx$ para demostrar que

$$\int f(x)e^x\,dx + \int f'(x)e^x\,dx = f(x)e^x + C.$$

$\left(\text{De aquí, } \int [f(x) + f'(x)]e^x\,dx = f(x)e^x + C.\right)$

OBJETIVO Mostrar cómo integrar una función racional propia, expresándola primero como una suma de sus fracciones parciales.

15.2 Integración por medio de fracciones parciales[2]

Factores lineales distintos

Consideraremos ahora la integral de una función racional (cociente de dos polinomios). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el numerador $N(x)$ y el denominador $D(x)$, no tienen factor polinomial común y que el grado de $N(x)$ es menor que el grado de $D(x)$. [Esto es, $N(x)/D(x)$ define una *función racional propia*.] Si el numerador no fuese de grado menor, podríamos dividir $N(x)$ entre $D(x)$:

$$D(x)\,\overline{)\,N(x)}^{\;P(x)};\qquad \vdots \qquad \overline{R(x)}$$

$$\text{así,}\qquad \frac{N(x)}{D(x)} = P(x) + \frac{R(x)}{D(x)}.$$

Aquí $P(x)$ sería un polinomio (fácilmente integrable) y $R(x)$ sería un polinomio de menor grado que el de $D(x)$. Por lo que, $R(x)/D(x)$ definiría una función racional propia. Por ejemplo,

$$\int \frac{2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 17x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\,dx = \int \left(2x + 1 + \frac{4x^2 - 14x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\right) dx$$

$$= x^2 + x + \int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\,dx.$$

Por tanto, consideremos

$$\int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\,dx.$$

Es esencial que el denominador se exprese como un producto de factores:

$$\int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x + 1)(x - 3)}\,dx.$$

Observe que el denominador consiste sólo en **factores lineales distintos** y que cada factor se presenta exactamente una vez. Puede demostrarse que a cada factor $x - a$, le corresponde entonces una *fracción parcial* de la forma

$$\frac{A}{x - a} \qquad (A \text{ es una constante})$$

tal que el integrando es la suma de las fracciones parciales. Si se tienen n factores lineales *distintos*, se tendrán n fracciones parciales, cada una de ellas fácilmente integrable. De acuerdo con esto, podemos escribir

$$\frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x + 1)(x - 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 3}. \tag{1}$$

Para determinar las constantes A, B y C, combinamos primero los términos en el miembro derecho:

$$\frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x + 1)(x - 3)} = \frac{A(x + 1)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(x + 1)}{x(x + 1)(x - 3)}.$$

[2] Puede omitirse sin pérdida de continuidad.

Como los denominadores de ambos miembros son iguales, podemos igualar sus numeradores:

$$4x^2 - 14x - 6 = A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1). \quad (2)$$

Aunque la ecuación (1) no está definida para $x = 0$, $x = -1$ y $x = 3$, queremos encontrar valores para A, B y C que hagan la ecuación (2) verdadera para todo valor de x. Esto es, se tendrá una identidad. Al hacer sucesivamente a x en la ecuación (2) igual a tres números cualesquiera diferentes, obtenemos un sistema de ecuaciones del que podemos despejar A, B y C. En particular, el trabajo puede simplificarse dándole a x los valores de las raíces de $D(x) = 0$, en nuestro caso, $x = 0$, $x = -1$ y $x = 3$. Usando la ecuación (2), tenemos, para $x = 0$,

$$-6 = A(1)(-3) + B(0) + C(0) = -3A, \quad \text{por lo que } A = 2.$$

Si $x = -1$,

$$12 = A(0) + B(-1)(-4) + C(0) = 4B, \quad \text{por lo que } B = 3.$$

Si $x = 3$,

$$-12 = A(0) + B(0) + C(3)(4) = 12C, \quad \text{por lo que } C = -1.$$

La ecuación (1) se convierte entonces en

$$\frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x+1)(x-3)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-3}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x+1)(x-3)}\,dx \\
&= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-3}\right) dx \\
&= 2\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x-3} \\
&= 2\ln|x| + 3\ln|x+1| - \ln|x-3| + C \\
&= \ln\left|\frac{x^2(x+1)^3}{x-3}\right| + C \quad \text{(usando propiedades de logaritmos).}
\end{aligned}$$

Para la integral *original*, ahora podemos establecer que

$$\int \frac{2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 17x - 6}{x^3 - 2x^2 - 3x}\,dx = x^2 + x + \ln\left|\frac{x^2(x+1)^3}{x-3}\right| + C.$$

Existe un método alternativo para determinar A, B y C. Éste implica desarrollar el miembro derecho de la ecuación (2) y agrupar términos semejantes:

$$\begin{aligned}
4x^2 - 14x - 6 &= A(x^2 - 2x - 3) + B(x^2 - 3x) + C(x^2 + x) \\
&= Ax^2 - 2Ax - 3A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 + Cx, \\
4x^2 - 14x - 6 &= (A + B + C)x^2 + (-2A - 3B + C)x + (-3A).
\end{aligned}$$

Para esta identidad, los coeficientes de las potencias correspondientes de x en ambos miembros de la ecuación deben ser iguales:

$$\begin{cases} 4 = A + B + C, \\ -14 = -2A - 3B + C, \\ -6 = -3A. \end{cases}$$

Principios en práctica 1
Factores lineales distintos

El ingreso marginal para una compañía que fabrica q radios por semana está dado por $r'(q) = \frac{5(q+4)}{q^2+4q+3}$, donde $r(q)$ es el ingreso en miles de dólares. Determine la ecuación para $r(q)$.

Resolviendo el sistema, se encuentra que $A = 2$, $B = 3$ y $C = -1$, igual que antes.

EJEMPLO 1 Factores lineales distintos

Determinar $\int \frac{2x+1}{3x^2-27}\,dx$ *usando fracciones parciales.*

Solución: como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, no es necesario dividir primero. La integral puede escribirse como

$$\frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2-9}\,dx.$$

Si expresamos $(2x + 1)(x^2 - 9)$ como una suma de fracciones parciales obtenemos

$$\frac{2x+1}{x^2-9} = \frac{2x+1}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}.$$

Al combinar términos e igualar los numeradores resulta

$$2x + 1 = A(x - 3) + B(x + 3).$$

Si $x = 3$, entonces

$$7 = 6B, \quad \text{por lo que} \quad B = \frac{7}{6};$$

Si $x = -3$, entonces

$$-5 = -6A, \quad \text{por lo que} \quad A = \frac{5}{6}.$$

Así,

$$\int \frac{2x+1}{3x^2-27}\,dx = \frac{1}{3}\left[\int \frac{\frac{5}{6}\,dx}{x+3} + \int \frac{\frac{7}{6}\,dx}{x-3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{5}{6}\ln|x+3| + \frac{7}{6}\ln|x-3|\right] + C$$

$$= \frac{1}{18}\ln|(x+3)^5(x-3)^7| + C.$$

Factores lineales repetidos

Si el denominador de $N(x)/D(x)$ sólo contiene factores lineales, algunos de los cuales están repetidos, entonces a cada factor $(x - a)^k$, donde k es el número máximo de veces que se presenta $x - a$ como factor, le corresponderá la suma de k fracciones parciales:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{K}{(x-a)^k}.$$

EJEMPLO 2 Factores lineales repetidos

Determinar $\int \frac{6x^2 + 13x + 6}{(x+2)(x+1)^2}\,dx$ *usando fracciones parciales.*

Solución: como el grado del numerador, a saber, 2, es menor que el denominador, 3, no es necesario dividir primero. En el denominador el factor lineal $x + 2$ aparece una vez y el factor lineal $x + 1$ aparece dos veces. Así, se tendrán que determinar tres fracciones parciales y tres constantes, y tenemos

$$\frac{6x^2 + 13x + 6}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2},$$

$$6x^2 + 13x + 6 = A(x+1)^2 + B(x+2)(x+1) + C(x+2).$$

Escogemos $x = -2$, $x = -1$ y, por conveniencia, $x = 0$. Para $x = -2$, tenemos

$$4 = A.$$

Si $x = -1$, entonces

$$-1 = C.$$

Si $x = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 6 &= A + 2B + 2C = 4 + 2B - 2 = 2 + 2B \\ 4 &= 2B, \\ 2 &= B. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2 + 13x + 6}{(x+2)(x+1)^2}\,dx &= 4\int \frac{dx}{x+2} + 2\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= 4\ln|x+2| + 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C \\ &= \ln[(x+2)^4(x+1)^2] + \frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

Factores cuadráticos irreducibles distintos

Suponga que un factor cuadrático $x^2 + bx + c$ ocurre en $D(x)$ y que no puede expresarse como un producto de dos factores lineales con coeficientes reales. Se dice que tal factor es un *factor cuadrático irreducible en los números reales*. A cada factor cuadrático irreducible distinto que ocurre sólo una vez en $D(x)$, le corresponderá una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}.$$

Observe que incluso después de que haya expresado una función racional en términos de fracciones parciales, todavía puede encontrar imposible integrar utilizando solamente el cálculo que ha aprendido hasta aquí.

EJEMPLO 3 Integral con un factor cuadrático irreducible distinto

Determinar $\int \frac{-2x - 4}{x^3 + x^2 + x}\, dx$ *usando fracciones parciales.*

Solución: como $x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$, tenemos el factor lineal x y el factor cuadrático $x^2 + x + 1$, que no parece factorizable a simple vista. Si fuese factorizable en $(x - r_1)(x - r_2)$, donde r_1 y r_2 fuesen reales, entonces r_1 y r_2 serían las raíces de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$. Por medio de la fórmula cuadrática, las raíces son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}.$$

Como no se tienen raíces reales, concluimos que $x^2 + x + 1$ es irreducible. Así, se tendrán dos fracciones parciales y *tres* constantes que determinar. Tenemos

$$\frac{-2x - 4}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1},$$

$$-2x - 4 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)x$$

$$= Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + Cx.$$

$$0x^2 - 2x - 4 = (A + B)x^2 + (A + C)x + A.$$

Al igualar los coeficientes de potencias iguales de x, obtenemos

$$\begin{cases} 0 = A + B, \\ -2 = A + C, \\ -4 = A. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene $A = -4$, $B = 4$ y $C = 2$. De aquí que,

$$\int \frac{-2x - 4}{x(x^2 + x + 1)}\, dx = \int \left(\frac{-4}{x} + \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1} \right) dx$$

$$= -4 \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx.$$

Ambas integrales tienen la forma $\int \frac{du}{u}$, por lo que

$$\int \frac{-2x - 4}{x(x^2 + x + 1)}\, dx = -4 \ln |x| + 2 \ln |x^2 + x + 1| + C$$

$$= \ln\left[\frac{(x^2 + x + 1)^2}{x^4} \right] + C.$$

Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Suponga que $D(x)$ contiene factores de la forma $(x^2 + bx + c)^k$, donde k es el número máximo de veces que ocurre el factor irreducible $x^2 + bx + c$. Entonces, a cada uno de tales factores le corresponde una suma de k fracciones parciales de la forma

$$\frac{A + Bx}{x^2 + bx + c} + \frac{C + Dx}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{M + Nx}{(x^2 + bx + c)^k}.$$

EJEMPLO 4 Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Determinar $\int \frac{x^5}{(x^2 + 4)^2}\,dx$ *usando fracciones parciales.*

Solución: como el numerador tiene grado 5 y el denominador grado 4, primero dividimos, lo que da

$$\frac{x^5}{x^4 + 8x^2 + 16} = x - \frac{8x^3 + 16x}{(x^2 + 4)^2}.$$

El factor cuadrático $x^2 + 4$ en el denominador de $(8x^3 + 16x)/(x^2 + 4)^2$ es irreducible y ocurre dos veces como factor. Así, a $(x^2 + 4)^2$ le corresponden dos fracciones parciales y tienen que ser determinados *cuatro* coeficientes. De acuerdo con esto, establecemos

$$\frac{8x^3 + 16x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 4)^2}$$

y obtener

$$8x^3 + 16x = (Ax + B)(x^2 + 4) + Cx + D,$$

$$8x^3 + 0x^2 + 16x + 0 = Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + 4B + D.$$

Al igualar los coeficientes de potencias iguales de x, obtenemos

$$\begin{cases} 8 = A, \\ 0 = B, \\ 16 = 4A + C, \\ 0 = 4B + D. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $A = 8$, $B = 0$, $C = -16$ y $D = 0$. Por tanto,

$$\int \frac{x^5}{(x^2 + 4)^2}\,dx = \int \left(x - \left[\frac{8x}{x^2 + 4} - \frac{16x}{(x^2 + 4)^2} \right] \right) dx$$

$$= \int x\,dx - 4\int \frac{2x}{x^2 + 4}\,dx + 8\int \frac{2x}{(x^2 + 4)^2}\,dx.$$

La segunda integral en la línea precedente tiene la forma $\int \frac{du}{u}$, y la tercera integral tiene la forma $\int \frac{du}{u^2}$. De modo que

$$\int \frac{x^5}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x^2}{2} - 4\ln(x^2 + 4) - \frac{8}{x^2 + 4} + C.$$

Principios en práctica 2

Integral que no requiere fracciones parciales

La tasa de cambio con respecto al tiempo (t en años) de la población que vota en una ciudad, se estima que es $V'(t) = \frac{300t^3}{t^2+6}$. Determine la forma general de $V(t)$.

De nuestros ejemplos, habrá usted deducido que el número de constantes necesarias para expresar $N(x)/D(x)$ por medio de fracciones parciales es igual al grado de $D(x)$, si se supone que $N(x)/D(x)$ define una función racional propia. Éste es, ciertamente, el caso. Observe también que la representación de una función racional propia por medio de fracciones parciales es única; esto es, sólo hay una posible opción para las constantes. Además, de manera independiente de la complejidad del polinomio $D(x)$, éste siempre puede expresarse (teóricamente) como un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

EJEMPLO 5 Integral que no requiere fracciones parciales

Ejercicio 15.2

En los problemas del 1 al 8 exprese la función racional dada en términos de fracciones parciales. Considere la posibilidad de tener primero que dividir.

1. $f(x) = \frac{10x}{x^2+7x+6}$.

2. $f(x) = \frac{x+5}{x^2-1}$.

3. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+6x+8}$.

4. $f(x) = \frac{2x^2-15}{x^2+5x}$.

5. $f(x) = \frac{4x-5}{x^2+2x+1}$.

6. $f(x) = \frac{2x+3}{x^2(x-1)}$.

7. $f(x) = \frac{x^2+3}{x^3+x}$.

8. $f(x) = \frac{3x^2+5}{(x^2+4)^2}$.

En los problemas del 9 al 30 determine las integrales.

9. $\int \frac{5x-2}{x^2-x}\,dx$.

10. $\int \frac{3x+8}{x^2+2x}\,dx$.

11. $\int \frac{x+10}{x^2-x-2}\,dx$.

12. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

13. $\int \frac{3x^3-3x+4}{4x^2-4}\,dx$.

14. $\int \frac{7(4-x^2)}{(x-4)(x-2)(x+3)}\,dx$.

15. $\int \frac{17x-12}{x^3-x^2-12x}\,dx$.

16. $\int \frac{4-x}{x^4-x^2}\,dx$.

17. $\int \frac{2(3x^5+4x^3-x)}{x^6+2x^4-x^2-2}\,dx$.

18. $\int \frac{x^4-3x^3-5x^2+8x-1}{x^3-2x^2-8x}\,dx$.

19. $\int \frac{2x^2-5x-2}{(x-2)^2(x-1)}\,dx$.

20. $\int \frac{-3x^3+2x-3}{x^2(x^2-1)}\,dx$.

21. $\int \frac{2(x^2+8)}{x^3+4x}\,dx$.

22. $\int \frac{2x^3-6x^2-10x-6}{x^4-1}\,dx$.

23. $\int \frac{-x^3+8x^2-9x+2}{(x^2+1)(x-3)^2}\,dx$.

24. $\int \frac{2x^4+9x^2+8}{x(x^2+2)^2}\,dx$.

25. $\int \frac{14x^3+24x}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$.

26. $\int \frac{12x^3+20x^2+28x+4}{3(x^2+2x+3)(x^2+1)}\,dx$.

27. $\int \frac{3x^3+x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

28. $\int \frac{3x^2-8x+4}{x^3-4x^2+4x-6}\,dx$.

29. $\int_0^1 \frac{2-2x}{x^2+7x+12}\,dx$.

30. $\int_1^2 \frac{2x^2+1}{(x+3)(x+2)}\,dx$.

31. Encuentre el área de la región limitada por la gráfica de

$$y = \frac{6(x^2+1)}{(x+2)^2}$$

y el eje x, de $x = 0$ a $x = 1$.

32. Excedente de los consumidores La ecuación de demanda para el producto de un fabricante está dada por

$$p = \frac{200(q+3)}{q^2+7q+6},$$

donde p es el precio por unidad (en dólares) cuando se demandan q unidades. Suponga que el equilibrio de mercado ocurre en el punto $(q, p) = (10, 325/22)$. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio de mercado.

OBJETIVO Ilustrar el uso de la tabla de integrales del apéndice C.

15.3 Integración por medio de tablas

Ciertas formas de integrales que aparecen con frecuencia pueden encontrarse en tablas estándar de fórmulas de integración.[3] Por ello, en el apéndice C se proporciona una tabla cuyo uso se ilustrará en esta sección.

Una integral dada puede tener que transformarse a una forma equivalente para que se ajuste o corresponda a una fórmula de la tabla. La forma equivalente debe concordar *exactamente* con la fórmula. En consecuencia, los pasos que dé usted al respecto *no* debe hacerlos mentalmente; ¡*escríbalos*! Si no lo hace, con facilidad podrá llegar a resultados incorrectos. Antes de empezar a resolver los ejercicios, asegúrese de que entiende *perfectamente* los ejemplos ilustrativos.

En los ejemplos siguientes, los números de las fórmulas se refieren a los de la tabla de integrales seleccionadas dadas en el apéndice C.

EJEMPLO 1 Integración con tablas

Encontrar $\int \frac{x\,dx}{(2+3x)^2}$.

Solución: al examinar la tabla, identificamos el integrando con la fórmula 7:

$$\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bu| + \frac{a}{a+bu}\right) + C.$$

Ahora veamos si podemos hacer coincidir de manera exacta el integrando dado con el de la fórmula. Si reemplazamos x por u, 2 por a y 3 por b, entonces $du = dx$ y por sustitución tenemos

$$\int \frac{x\,dx}{(2+3x)^2} = \int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bu| + \frac{a}{a+bu}\right) + C.$$

Volviendo a la variable x y reemplazando a por 2 y b por 3, obtenemos

$$\int \frac{x\,dx}{(2+3x)^2} = \frac{1}{9}\left(\ln|2+3x| + \frac{2}{2+3x}\right) + C.$$

Note que la respuesta debe darse en términos de x, la variable *original* de integración.

EJEMPLO 2 Integración con tablas

Encontrar $\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Solución: esta integral se identifica con la fórmula 24:

$$\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$$

En esta fórmula, si se usa el signo inferior del símbolo dual "±" en el miembro izquierdo, entonces deberá usarse también el signo inferior de los símbolos

[3] Véase por ejemplo, W. H. Beyer (ed.) *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 30 ed. (Boca Ratón, Florida: CRC Pres, 1996).

duales en el miembro derecho. En la integral original, hacemos $u = x$ y $a = 1$. Entonces, $du = dx$ y por sustitución, la integral que resulta es

$$\int x^2\sqrt{x^2 - 1}\, dx = \int u^2\sqrt{u^2 - a^2}\, du$$

$$= \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C.$$

Como $u = x$ y $a = 1$,

$$\int x^2\sqrt{x^2 - 1}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{8}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C.$$

Este ejemplo, así como los ejemplos 4, 5 y 7, muestran cómo ajustar una integral de modo que se adecue a una de la tabla.

EJEMPLO 3 Integración con tablas

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{16x^2 + 3}}$.

Solución: el integrando puede identificarse con la fórmula 28:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2 + a^2} - a}{u}\right| + C.$$

Si hacemos $u = 4x$ y $a = \sqrt{3}$, entonces $du = 4dx$. Observe cuidadosamente cómo al insertar 4 en el numerador y en el denominador, transformamos la integral dada a una forma equivalente que coincide con la fórmula 28:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{16x^2 + 3}} = \int \frac{(4\, dx)}{(4x)\sqrt{(4x)^2 + (\sqrt{3})^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}}$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2 + a^2} - a}{u}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{16x^2 + 3} - \sqrt{3}}{4x}\right| + C.$$

EJEMPLO 4 Integración con tablas

Encontrar $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(2 - 3x^2)^{1/2}}$.

Solución: el integrando se identifica con la fórmula 21:

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C.$$

Haciendo $u = \sqrt{3}x$ y $a^2 = 2$, tenemos $du = \sqrt{3}\, dx$. De aquí que al insertar dos factores de $\sqrt{3}$ en el numerador y en el denominador de la integral original, tenemos

$$\int \frac{dx}{x^2(2 - 3x^2)^{1/2}} = \sqrt{3}\int \frac{(\sqrt{3}\, dx)}{(\sqrt{3}x)^2[2 - (\sqrt{3}x)^2]^{1/2}} = \sqrt{3}\int \frac{du}{u^2(a^2 - u^2)^{1/2}}$$

$$= \sqrt{3}\left[-\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u}\right] + C = \sqrt{3}\left[-\frac{\sqrt{2 - 3x^2}}{2(\sqrt{3}x)}\right] + C$$

$$= -\frac{\sqrt{2 - 3x^2}}{2x} + C.$$

EJEMPLO 5 Integración con tablas

Encontrar $\int 7x^2 \ln(4x)\, dx.$

Solución: esta integral es similar a la de la fórmula 42 con $n = 2$:

$$\int u^n \ln u\, du = \frac{u^{n+1} \ln u}{n + 1} - \frac{u^{n+1}}{(n + 1)^2} + C.$$

Si hacemos $u = 4x$, entonces $du = 4\, dx$, Por tanto,

$$\int 7x^2 \ln(4x)\, dx = \frac{7}{4^3}\int (4x)^2 \ln(4x)(4\, dx)$$

$$= \frac{7}{64}\int u^2 \ln u\, du = \frac{7}{64}\left(\frac{u^3 \ln u}{3} - \frac{u^3}{9}\right) + C$$

$$= \frac{7}{64}\left[\frac{(4x)^3 \ln(4x)}{3} - \frac{(4x)^3}{9}\right] + C$$

$$= 7x^3\left[\frac{\ln(4x)}{3} - \frac{1}{9}\right] + C$$

$$= \frac{7x^3}{9}[3 \ln(4x) - 1] + C.$$

EJEMPLO 6 Integral en la que la tabla no se necesita

Encontrar $\int \frac{e^{2x}\, dx}{7 + e^{2x}}.$

Solución: a primera vista, el integrando no se identifica con ninguna forma de la tabla. Tal vez sea de utilidad escribir de nuevo la integral. Sea $u = 7 + e^{2x}$, entonces $du = 2e^{2x}\, dx$. De modo que

$$\int \frac{e^{2x}\, dx}{7 + e^{2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2e^{2x}\, dx)}{7 + e^{2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|7 + e^{2x}| + C = \frac{1}{2}\ln(7 + e^{2x}) + C.$$

Así, sólo tuvimos que usar nuestro conocimiento de las formas básicas de integración. En realidad, esta forma aparece como la fórmula 2 en la tabla.

EJEMPLO 7 Determinación de una integral definida con ayuda de las tablas

Evaluar $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2+2)^{3/2}}$.

Solución: usaremos la fórmula 32 para obtener primero la integral indefinida:

$$\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C.$$

Haciendo $u = 2x$ y $a^2 = 2$, tenemos $du = 2\,dx$. Entonces

$$\int \frac{dx}{(4x^2+2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2\,dx)}{[(2x)^2+2]^{3/2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u^2+2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u}{2\sqrt{u^2+2}}\right] + C.$$

Aquí determinamos los límites de integración con respecto a u.

En vez de sustituir los valores de x y evaluar la integral entre $x = 1$ y $x = 4$, podemos determinar los límites de integración correspondientes con respecto a u, y luego evaluar la última expresión entre esos límites. Como $u = 2x$, cuando $x = 1$, tenemos $u = 2$; cuando $x = 4$, tenemos $u = 8$. Así,

$$\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2+2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int_2^8 \frac{du}{(u^2+2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\sqrt{u^2+2}}\right)\Bigg|_2^8 = \frac{2}{\sqrt{66}} - \frac{1}{2\sqrt{6}}.$$



Advertencia Al cambiar la variable de integración x a la variable de integración u, asegúrese de cambiar los límites de integración de manera que concuerden con u. Esto es, en el ejemplo 7,

$$\int_1^4 \frac{dx}{(4x^2+2)^{3/2}} \neq \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{du}{(u^2+2)^{3/2}}.$$

Integración aplicada a las anualidades

Las tablas de integrales son útiles al manejar integrales asociadas con anualidades. Suponga que debe pagar \$100 al final de cada año, durante los siguientes dos años. Del capítulo 8, recuerde que una serie de pagos sobre un periodo, como en este caso, se denomina *anualidad*. Si en vez de en dos años, usted fuese a liquidar la deuda en este momento, pagaría el valor presente de los \$100 que vencen al final del primer año, más el valor presente de los \$100 que vencen al final del segundo año. La suma de esos valores presentes es el valor actual de la anualidad (el valor presente de una anualidad se vio en la sección 8.3). Ahora consideraremos el valor presente de pagos hechos de manera continua en el intervalo de tiempo que va de $t = 0$ a $t = T$, con t en años, cuando el interés se compone de manera continua a una tasa anual de r.

Suponga que se hace un pago en el tiempo t, de manera que según una base anual, este pago es $f(t)$. Si dividimos el intervalo $[0, T]$ en subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de longitud Δt (donde Δt es pequeño), entonces la cantidad total de todos los pagos en tal intervalo es aproximadamente igual a $f(t_i)\Delta t$ [por ejemplo, si $f(t) = 2000$ y Δt fuese de un día, la cantidad total de los pagos sería $2000(\frac{1}{365})$]. El valor presente de esos pagos es de aproximadamente $e^{-rt_i}f(t_i)\,\Delta t$

(véase la sección 9.3). En el intervalo $[0, T]$, el total de todos los valores presentes es

$$\sum e^{-rt_i} f(t_i)\,\Delta t.$$

Esta suma aproxima el valor actual A de la anualidad. Entre menor es Δt, mejor será la aproximación. Esto es, cuando $\Delta t \to 0$, el límite de la suma es el valor actual. Sin embargo, este límite es también una integral definida. Esto es,

$$A = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt. \qquad (1)$$

donde A es el **valor presente (actual) de una anualidad continua** a la tasa anual r (compuesta de manera continua) durante T años, si un pago en el tiempo t es a la tasa de $f(t)$ por año.

Decimos que la ecuación (1) da el **valor presente de un flujo continuo de ingreso.** La ecuación (1) puede usarse también para encontrar el valor presente de la utilidad futura de un negocio. En ese caso, $f(t)$ será la tasa anual de utilidad en el tiempo t.

Podemos considerar también el valor *futuro* de una anualidad en vez de su valor presente. Si se hace un pago en el tiempo t, entonces el mismo tiene un cierto valor al *final* del periodo de la anualidad, esto es $T - t$ años después. Este valor es

$$\begin{pmatrix}\text{monto del}\\ \text{pago}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{interés sobre este}\\ \text{pago durante } T - t \text{ años}\end{pmatrix}.$$

Si S es el total de esos valores para todos lo pagos, entonces S se llama *monto acumulado de una anualidad continua* el cual está dado por la fórmula:

$$S = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)}\,dt,$$

donde S es el **monto acumulado de una anualidad continua** al final de T años a la tasa anual r (compuesta de manera continua), cuando un pago al tiempo t es a la tasa $f(t)$ por año.

EJEMPLO 8 Valor presente de una anualidad continua

Encontrar el valor presente (al dólar más cercano) de una anualidad continua a un interés de 8% durante 10 años, si el pago en el tiempo t es a razón de t^2 dólares por año.

Solución: el valor presente está dado por

$$A = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt = \int_0^{10} t^2 e^{-0.08t}\,dt.$$

Utilizaremos la fórmula 39,

$$\int u^n e^{au}\,du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du.$$

Esta expresión se llama *fórmula de reducción,* ya que reduce una integral a una expresión que contiene una integral más fácil de determinar. Si $u = t$, $n = 2$ y $a = -0.08$, entonces $du = dt$, y tenemos

$$A = \frac{t^2e^{-0.08t}}{-0.08}\bigg|_0^{10} - \frac{2}{-0.08}\int_0^{10} te^{-0.08t}\,dt.$$

En la nueva integral el exponente de t se ha reducido a 1. Podemos identificar esta integral con la de la fórmula 38,

$$\int ue^{au}\,du = \frac{e^{au}}{a^2}(au - 1) + C,$$

haciendo $u = t$ y $a = -0.08$. Entonces $du = dt$ y

$$A = \int_0^{10} t^2e^{-0.08t}\,dt = \frac{t^2e^{-0.08t}}{-0.08}\bigg|_0^{10} - \frac{2}{-0.08}\left[\frac{e^{-0.08t}}{(-0.08)^2}(-0.08t - 1)\right]\bigg|_0^{10}$$

$$= \frac{100e^{-0.8}}{-0.08} - \frac{2}{-0.08}\left[\frac{e^{-0.8}}{(-0.08)^2}(-0.8 - 1) - \frac{1}{(-0.08)^2}(-1)\right]$$

$$\approx 185.$$

El valor presente es de \$185.

Ejercicio 15.3

En los problemas 1 y 2 utilice la fórmula 19 del apéndice C para determinar las integrales.

1. $\int \frac{dx}{(9 - x^2)^{3/2}}$.

2. $\int \frac{dx}{(25 - 4x^2)^{3/2}}$.

En los problemas 3 y 4 use la fórmula 30 del apéndice C para determinar las integrales.

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16x^2 + 3}}$.

4. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^4 - 4}}$.

En los problemas del 5 al 38 encuentre las integrales usando la tabla del apéndice C.

5. $\int \frac{dx}{x(6 + 7x)}$.

6. $\int \frac{x^2\,dx}{(1 + 2x)^2}$.

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 9}}$.

8. $\int \frac{dx}{(x^2 + 7)^{3/2}}$.

9. $\int \frac{x\,dx}{(2 + 3x)(4 + 5x)}$.

10. $\int 2^{5x}\,dx$.

11. $\int \frac{dx}{4 + 3e^{2x}}$.

12. $\int x^2\sqrt{1 + x}\,dx$.

13. $\int \frac{2\,dx}{x(1 + x)^2}$.

14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5 - 11x^2}}$.

15. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{2 + x}$.

16. $\int \frac{5x^2\,dx}{2 + 5x}$.

17. $\int \sqrt{x^2 - 3}\,dx$.

18. $\int \frac{dx}{(4 + 3x)(4x + 3)}$.

19. $\int_0^{1/12} xe^{12x}\,dx$.

20. $\int \sqrt{\frac{2 + 3x}{5 + 3x}}\,dx$.

21. $\int x^2e^x\,dx$.

22. $\int_1^2 \frac{4\,dx}{x^2(1 + x)}$.

23. $\int \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x^2}\,dx$.

24. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2 - x}}$.

25. $\int \frac{x\,dx}{(1 + 3x)^2}$.

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + 2x)(3 + 2x)}}$.

27. $\int \frac{dx}{7 - 5x^2}$.

28. $\int x^2\sqrt{2x^2 - 9}\,dx$.

29. $\int 36x^5\ln(3x)\,dx$.

30. $\int \frac{dx}{x^2(1 + x)^2}$.

31. $\int 270x\sqrt{1 + 3x}\,dx$.

32. $\int 9x^2\ln x\,dx$.

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 13}}$.

34. $\int \frac{dx}{x\ln(2x)}$.

35. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 - 4x^2}}$.

36. $\int \frac{\sqrt{2 - 3x^2}}{x}\,dx$.

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\pi + 7e^{4\sqrt{x}})}$.

38. $\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{1 + x^4}$.

En los problemas del 39 al 56 encuentre las integrales por cualquier método.

39. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

40. $\int \sqrt{x e^{x^{3/2}}}\,dx$.

41. $\int 6x\sqrt{2x^2+1}\,dx$.

42. $\int \frac{4x^2-\sqrt{x}}{x}\,dx$.

43. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

44. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}}\,dx$.

45. $\int x^3 \ln x\,dx$.

46. $\int_0^3 xe^{-x}\,dx$.

47. $\int 4xe^{2x}\,dx$.

48. $\int_1^2 35x^2\sqrt{3+2x}\,dx$.

49. $\int \ln^2 x\,dx$.

50. $\int_1^e \ln x\,dx$.

51. $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x}}$.

52. $\int_1^2 x\sqrt{1+2x}\,dx$.

53. $\int_0^1 \frac{2x\,dx}{\sqrt{8-x^2}}$.

54. $\int_0^{\ln 2} x^3e^{2x}\,dx$.

55. $\int_1^2 x\ln(2x)\,dx$.

56. $\int_1^2 dx$.

---

57. Biología En un análisis sobre frecuencia[4] de genes aparece la integral siguiente

$$\int_{q_0}^{q_n} \frac{dq}{q(1-q)},$$

donde las q representan frecuencias de genes. Evalúe esta integral.

58. Biología Bajo ciertas condiciones, el número n de generaciones requeridas para cambiar la frecuencia de un gen de 0.3 a 0.1 está dado por[5]

$$n = -\frac{1}{0.4}\int_{0.3}^{0.1} \frac{dq}{q^2(1-q)}.$$

Encuentre n (al entero más cercano).

59. Anualidad continua Encuentre el valor presente, al dólar más cercano, de una anualidad continua a un interés anual de r durante T años, si el pago en el tiempo t es a la tasa de $f(t)$ dólares por año, dado que

a. $r = 0.06$, $T = 10$, $f(t) = 5000$,
b. $r = 0.05$, $T = 8$, $f(t) = 200t$.

60. Si $f(t) = k$, donde k es una constante positiva, demuestre que el valor de la integral en la ecuación (1) de esta sección es

$$k\left(\frac{1-e^{-rT}}{r}\right).$$

61. Anualidad continua Encuentre el monto acumulado, al dólar más cercano, de una anualidad continua a un interés anual de r durante T años si el pago en el tiempo t es a razón de $f(t)$ dólares al año, dado que

a. $r = 0.06$, $T = 10$, $f(t) = 400$,
b. $r = 0.04$, $T = 5$, $f(t) = 40t$.

62. Valor de un negocio Durante los próximos 5 años, las utilidades de un negocio en el tiempo t se estiman igual a 20,000t dólares por año. El negocio va a ser vendido a un precio igual al valor presente de esas futuras utilidades. Si el interés se compone continuamente a una tasa anual del 10%, ¿a qué precio, a la decena de dólares más cercana, ha de venderse el negocio?

[4] W. B. Mather, *Principles of Quantitative Genetics* (Minneapolis: Burges Publishing Company, 1964).
[5] E. O. Wilson y W. H. Bossert, A *Primer of Population Biology* (Stamford, CT.: Sinauer Associates, Inc., 1971).

OBJETIVO Desarrollar el concepto de valor promedio de una función.

15.4 Valor promedio de una función

Si nos dan los tres números 1, 2 y 9, el valor promedio o *media* de ellos es su suma dividida entre 3. Si denotamos esta media por $\bar{y}$, tenemos

$$\bar{y} = \frac{1+2+9}{3} = 4.$$

Similarmente, supongamos que nos dan una función f definida en el intervalo $[a, b]$ y que los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están en el intervalo. Entonces, el valor promedio de los n valores correspondientes de la función $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ es

$$\bar{y} = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}. \quad (1)$$

Suponemos que x_1, x_2, etc., son los extremos derechos de los subintervalos.

Podemos ir un paso más adelante. Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud. Escogemos x_1 en el primer subintervalo, x_2 en el segundo, etc. Como $[a, b]$ tiene longitud $b - a$, cada subintervalo tiene longitud de $\frac{b-a}{n}$, que llamaremos Δx. Por lo que, la ecuación (1) puede escribirse como

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)}{n} = \frac{\frac{1}{\Delta x}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x}{n} = \frac{1}{n\,\Delta x}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x. \tag{2}$$

Como $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, entonces se deduce que $n\,\Delta x = b - a$. Así la expresión $\frac{1}{n\,\Delta x}$ en la ecuación (2), puede ser reemplazada por $\frac{1}{b-a}$. Además, cuando $n \to \infty$, el número de valores de la función usados para calcular $\bar{y}$ crece, y obtenemos así el *valor promedio de la función f*, denotado por $\bar{f}$:

$$\bar{f} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

Pero el límite de la derecha es justamente la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. Tenemos así la siguiente definición.

Definición

El ***valor promedio*** (o ***media***) ***de una función*** $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se denota con el símbolo $\bar{f}$ o $\bar{y}$ y está dado por

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

EJEMPLO 1 Valor promedio de una función

Encontrar el valor promedio de la función $f(x) = x^2$ *sobre el intervalo* $[1, 2]$.

Solución:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2-1}\int_1^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{7}{3}.$$

En el ejemplo 1 encontramos que el valor promedio de $y = f(x) = x^2$ en el intervalo $[1, 2]$ es $\frac{7}{3}$. Podemos interpretar este valor de manera geométrica. Como

$$\frac{1}{2-1}\int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3},$$

al calcular el valor de la integral tenemos

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3}(2-1).$$

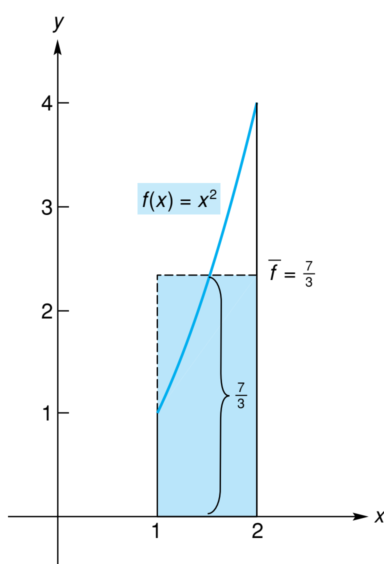


FIGURA 15.1 Interpretación geométrica del valor promedio de una función.

Sin embargo, esta integral da el área de la región limitada por $f(x) = x^2$ y el eje x, entre $x = 1$ y $x = 2$ (véase la fig. 15.1). De la ecuación anterior, esta área es $(\frac{7}{3})(2 - 1)$, que corresponde al área de un rectángulo cuya altura es el valor promedio $\overline{f} = \frac{7}{3}$ y cuyo ancho es $b - a = 2 - 1 = 1$.

EJEMPLO 2 Flujo sanguíneo promedio

Supóngase que el flujo sanguíneo en el tiempo t está dado por

$$F(t) = \frac{F_1}{(1 + \alpha t)^2}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

donde F_1 *y* α (la letra griega "alfa") *son constantes.*[6] *Encontrar el flujo promedio* $\overline{F}$ en el intervalo $[0, T]$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\overline{F} &= \frac{1}{T - 0}\int_0^T F(t)\,dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{F_1}{(1 + \alpha t)^2}\,dt = \frac{F_1}{\alpha T}\int_0^T (1 + \alpha t)^{-2}(\alpha\,dt) \\
&= \frac{F_1}{\alpha T}\left[\frac{(1 + \alpha t)^{-1}}{-1}\right]\Bigg|_0^T = \frac{F_1}{\alpha T}\left[-\frac{1}{1 + \alpha T} + 1\right] \\
&= \frac{F_1}{\alpha T}\left[\frac{-1 + 1 + \alpha T}{1 + \alpha T}\right] = \frac{F_1}{\alpha T}\left[\frac{\alpha T}{1 + \alpha T}\right] = \frac{F_1}{1 + \alpha T}
\end{aligned}$$

[6]W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1972).

Ejercicio 15.4

En los problemas del 1 al 8 encuentre el valor promedio de la función en el intervalo dado.

1. $f(x) = x^2$; $[0, 4]$.
2. $f(x) = 3x - 1$; $[1, 2]$.
3. $f(x) = 2 - 3x^2$; $[-1, 2]$.
4. $f(x) = x^2 + x + 1$; $[1, 3]$.
5. $f(t) = 4t^3$; $[-2, 2]$.
6. $f(t) = t\sqrt{t^2 + 9}$; $[0, 4]$.
7. $f(x) = 6\sqrt{x}$; $[1, 9]$.
8. $f(x) = 7/x$; $[2, 4]$.

9. Utilidad La utilidad (en dólares) de un negocio está dada por

$$P = P(q) = 369q - 2.1q^2 - 400,$$

donde q es el número de unidades del producto vendido. Encuentre la utilidad promedio sobre el intervalo de $q = 0$ a $q = 100$.

10. Costo Suponga que el costo c (en dólares) de producir q unidades de un producto está dado por

$$c = 4000 + 10q + 0.1q^2.$$

Encuentre el costo promedio sobre el intervalo de $q = 100$ a $q = 500$.

11. Inversión Una inversión de \$3000 gana interés a una tasa anual de 5% compuesto continuamente. Después de t años, su valor S (en dólares) está dado por $S = 3000e^{0.05t}$. Encuentre el valor promedio de una inversión a 2 años.

12. Medicina Suponga que se inyecta un líquido de contraste (tinte) en la corriente sanguínea a una razón R constante. En el tiempo t, sea

$$C(t) = \frac{R}{F(t)}$$

la concentración de tinte en un punto a cierta distancia (distal) del punto de inyección, donde $F(t)$ está dada en

el ejemplo 2. Demuestre que la concentración promedio en $[0, T]$ es

$$\overline{C} = \frac{R(1 + \alpha T + \frac{1}{3}\alpha^2 T^2)}{F_1}.$$

13. Ingreso Suponga que un fabricante recibe un ingreso r por la venta de q unidades de un producto. Demuestre que el valor promedio de la función de ingreso marginal sobre el intervalo $[0, q_0]$ es el precio por unidad cuando se han vendido q_0 unidades.

14. Encuentre el valor promedio de $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ en el intervalo $[0, 4]$. Redondee su respuesta a dos decimales.

OBJETIVO Estimar el valor de una integral definida por medio de la regla del trapecio o por la regla de Simpson.

15.5 Integración aproximada

Regla del trapecio

Al usar el teorema fundamental para evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$, usted puede encontrar sumamente difícil, o tal vez imposible, encontrar una antiderivada de f, aun con la ayuda de tablas. En tal caso, muchas calculadoras gráficas pueden estimar el valor de la integral definida siempre que se conozca el integrando. Además, existen métodos numéricos que pueden usarse para estimar la integral. Esos métodos numéricos usan sólo un número finito de valores de $f(x)$. Así, f no tiene que conocerse en todo el intervalo $[a, b]$. Esos métodos son, en especial, adecuados para las computadoras o calculadoras. Consideraremos dos métodos numéricos: la *regla del trapecio* y la *regla de Simpson*. En ambos casos supondremos que f es continua sobre $[a, b]$.

Al desarrollar la regla del trapecio, por conveniencia supondremos también que $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, para poder pensar en términos de áreas. Básicamente, esta regla implica aproximar la gráfica de f por medio de segmentos rectos.

En la figura 15.2, el intervalo $[a, b]$ está dividido en n subintervalos de igual longitud por los puntos $a = x_0, x_1, x_2, \ldots,$ y $x_n = b$. Como la longitud de $[a, b]$ es $b - a$, la longitud de cada subintervalo es $(b - a)/n$, a la cual llamaremos h.

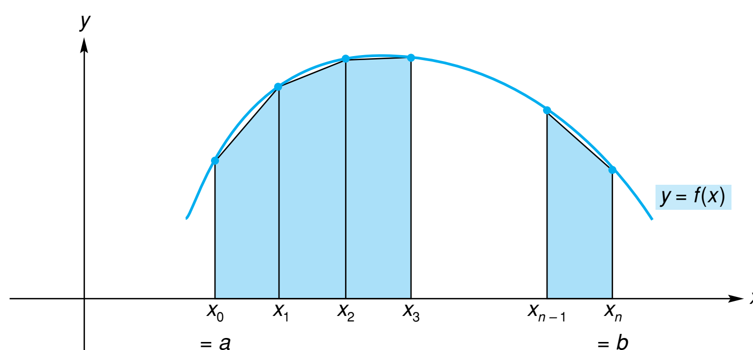


FIGURA 15.2 Aproximación de un área por medio de trapecios.

Es claro que,

$$x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \ldots, x_n = a + nh = b.$$

Podemos asociar un trapecio (figura de cuatro lados, dos de ellos paralelos) con cada subintervalo. El área A de la región limitada por la curva, el eje x y las líneas $x = a$ y $x = b$ es $\int_a^b f(x)\,dx$, la cual puede aproximarse por la suma de las áreas de los trapecios determinados por los subintervalos.

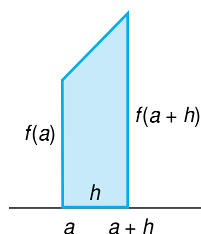


FIGURA 15.3
Primer trapecio.

Consideremos el primer trapecio, que se volvió a dibujar en la figura 15.3. Como el área de un trapecio es igual a la mitad de su base multiplicada por la suma de los lados paralelos, este trapecio tiene un área de

$$\tfrac{1}{2}h[f(a) + f(a + h)].$$

En forma similar, el segundo trapecio tiene área

$$\tfrac{1}{2}h[f(a + h) + f(a + 2h)].$$

El área A bajo la curva es aproximada por la suma de las áreas de n trapecios:

$$A \approx \tfrac{1}{2}h[f(a) + f(a + h)] + \tfrac{1}{2}h[f(a + h) + f(a + 2h)] +$$

$$\tfrac{1}{2}h[f(a + 2h) + f(a + 3h)] + \cdots + \tfrac{1}{2}h[f(a + (n - 1)h) + f(b)].$$

Como $A = \int_a^b f(x)\,dx$, al simplificar la expresión anterior obtenemos la regla del trapecio:

> **Regla del trapecio**
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\{f(a) + 2f(a + h) + 2f(a + 2h) +$$
>
> $$\ldots + 2f[a + (n - 1)h] + f(b)\},$$
>
> donde $h = (b - a)/n$.

El patrón de los coeficientes dentro de las llaves es 1, 2, 2, ... , 2, 1. Por lo regular, entre más subintervalos se consideren, mejor será la aproximación. En nuestro desarrollo supusimos por conveniencia que $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$. Sin embargo, la regla del trapecio es válida sin esta restricción.

> ***Principios en práctica 1***
> **Regla del trapecio**
>
> Un tanque derrama aceite a una velocidad de $R'(t) = \dfrac{60}{\sqrt{t^2 + 9}}$, en donde t es el tiempo en minutos y $R(t)$ es el radio de la mancha de aceite, en pies. Utilice la regla del trapecio, con $n = 5$ para aproximar $\int_0^5 \dfrac{60}{\sqrt{t^2 + 9}}\,dt$, el tamaño del radio después de cinco segundos.

EJEMPLO 1 Regla del trapecio

Usar la regla del trapecio para estimar el valor de

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx$$

usando $n = 5$. Calcular cada término con cuatro decimales y redondear su respuesta a tres decimales.

Solución: aquí, $f(x)= 1/(1 + x^2)$, $n = 5$, $a = 0$ y $b = 1$. Entonces,

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{5} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Los términos a sumar son

$$\begin{aligned} f(a) &= \quad f(0) &&= 1.0000 \\ 2f(a + h) &= 2f(0.2) &&= 1.9231 \\ 2f(a + 2h) &= 2f(0.4) &&= 1.7241 \\ 2f(a + 3h) &= 2f(0.6) &&= 1.4706 \end{aligned}$$

$$2f(a+4h) = 2f(0.8) = 1.2195$$
$$f(b) = f(1) = \underline{0.5000} \qquad (a + nh = b)$$
$$7.8373 = \text{suma}$$

Por tanto, nuestra estimación de la integral es

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{0.2}{2}(7.8373) \approx 0.784.$$

El valor real de la integral es aproximadamente 0.784.

Regla de Simpson

Otro método para estimar $\int_a^b f(x)\,dx$ está dado por la regla de Simpson, que implica aproximar la gráfica de f por medio de segmentos parabólicos. Omitiremos su deducción.

> **Regla de Simpson**
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\{f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 4f[a+(n-1)h] + f(b)\},$$
>
> donde $h = (b-a)/n$ y n es un número par.

El patrón de coeficientes dentro de las llaves es 1, 4, 2, 4, 2, ... , 2, 4, 1, lo cual requiere que ***n* sea par.** Usemos esta regla para evaluar la integral del ejemplo 1.

> ***Principios en práctica 2***
> **Regla de Simpson**
>
> Un cultivo de levadura está creciendo a la velocidad de $A'(t) = 0.3e^{0.2t^2}$, en donde t es el tiempo en horas y $A(t)$ es la cantidad en gramos. Utilice la regla de Simpson con $n = 8$ para aproximar $\int_0^4 0.3e^{0.2t^2}\,dt$, la cantidad de cultivo que creció durante las primeras cuatro horas.

EJEMPLO 2 Regla de Simpson

Usar la regla de Simpson para estimar el valor de $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ *con* $n = 4$. *Calcular cada término con cuatro decimales y redondear la respuesta a tres decimales.*

Solución: aquí, $f(x) = 1/(1+x^2,)$ $n = 4$, $a = 0$ y $b = 1$. Así, $h = (b-a)/n = 1/4 = 0.25$. Los términos por sumar son:

$$f(a) = f(0) = 1.0000$$
$$4f(a+h) = 4f(0.25) = 3.7647$$
$$2f(a+2h) = 2f(0.5) = 1.6000$$
$$4f(a+3h) = 4f(0.75) = 2.5600$$
$$f(b) = f(1) = \underline{0.5000}$$
$$9.4247 = \text{suma}$$

Por tanto, por la regla de Simpson,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{0.25}{3}(9.4247) \approx 0.785.$$

Ésta es una aproximación mejor que la que obtuvimos en el ejemplo 1 usando la regla del trapecio.

Tanto la regla de Simpson como la regla del trapecio pueden usarse si sólo conocemos $f(a)$, $f(a + h)$, etc.; no tenemos que conocer f. El ejemplo 3 ilustrará esto.

En el ejemplo 3, se estima una integral definida a partir de puntos de datos; la función no es conocida.

EJEMPLO 3 Demografía

Una función usada a menudo en demografía (el estudio de nacimientos, matrimonios, mortalidad, etc., en una comunidad) es la ***función de la tabla de vida,*** *denotada por l. En una población con 100,000 nacimientos en cualquier año, $l(x)$ representa el número de personas que alcanzan la edad x en cualquier año. Por ejemplo, si $l(20) = 98{,}857$, entonces el número de personas que llegan a los 20 años en cualquier año es 98,857. Suponga que la función l se aplica a toda la gente nacida en un intervalo largo de tiempo. Puede demostrarse que en cualquier tiempo, el número esperado de personas en la población que tienen exactamente entre x y $x + m$ años inclusive, está dado por*

$$\int_x^{x+m} l(t)\, dt.$$

La siguiente tabla da valores de $l(x)$ para hombres y mujeres de Estados Unidos.[7] Aproximar el número de mujeres en el grupo de 20 a 35 años de edad usando la regla del trapecio con $n = 3$.

Tabla de vida

	$l(x)$			$l(x)$	
Edad, x	**Hombres**	**Mujeres**	**Edad, x**	**Hombres**	**Mujeres**
0	100,000	100,000	45	93,717	96,582
5	99,066	99,220	50	91,616	95,392
10	98,967	99,144	55	88,646	93,562
15	98,834	99,059	60	84,188	90,700
20	98,346	98,857	65	77,547	86,288
25	97,648	98,627	70	68,375	79,926
30	96,970	98,350	75	56,288	70,761
35	96,184	97,964	80	42,127	58,573
40	95,163	97,398			

Solución: queremos estimar

$$\int_{20}^{35} l(t)\, dt.$$

Tenemos $h = \dfrac{b - a}{n} = \dfrac{35 - 20}{3} = 5$. Los términos que deben sumarse de acuerdo con la regla del trapecio son

[7] *National Vital Statistics Report,* vol. 48, núm. 18, febrero 7, 2001.

$$
\begin{aligned}
l(20) &= 98{,}857\\
2l(25) = 2(98{,}627) &= 197{,}254\\
2l(30) = 2(98{,}350) &= 196{,}700\\
l(35) &= \underline{97{,}964}\\
& \quad 590{,}775 = \text{suma}
\end{aligned}
$$

Según la regla del trapecio,

$$\int_{20}^{35} l(t)\,dt \approx \frac{5}{2}(590{,}775) = 1{,}476{,}937.5.$$

Existen fórmulas que se usan para determinar la exactitud de las respuestas obtenidas al usar la regla del trapecio o la regla de Simpson, las cuales pueden encontrarse en textos comunes sobre análisis numérico.

Ejercicio 15.5

En los ejercicios 1 y 2 use la regla del trapecio o la regla de Simpson (*con los datos indicados*) *y el valor dado de n para estimar la integral.*

1. $\displaystyle\int_{-2}^{4} \frac{170}{1+x^2}\,dx$; regla del trapecio, $n = 6$.

2. $\displaystyle\int_{-1}^{5} \frac{170}{1+x^2}\,dx$; regla de Simpson, $n = 6$.

En los problemas del 3 al 8 use la regla del trapecio o la regla de Simpson (según se indique) y el valor dado de n, para estimar la integral. Calcule cada término con cuatro decimales y redondee su respuesta a tres decimales. En los problemas del 3 al 6 evalúe también la integral por antidiferenciación (teorema fundamental del cálculo integral).

3. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\,dx$; regla del trapecio, $n = 5$.

4. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\,dx$; regla de Simpson, $n = 4$.

5. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{dx}{x}$; regla de Simpson, $n = 6$.

6. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{dx}{x}$; regla del trapecio, $n = 6$.

7. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x\,dx}{x+1}$; regla del trapecio, $n = 4$.

8. $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{dx}{x+x^2}$; regla de Simpson, $n = 4$.

En los problemas 9 y 10 use la tabla de vida del ejemplo 3 para estimar las integrales dadas, por medio de la regla del trapecio.

9. $\displaystyle\int_{15}^{40} l(t)\,dt$, hombres, $n = 5$.

10. $\displaystyle\int_{35}^{55} l(t)\,dt$, mujeres, $n = 4$.

En los problemas 11 y 12 suponga que la gráfica de una función continua f, donde $f(x) \geq 0$, contiene los puntos dados. Use la regla de Simpson y todos los puntos dados para aproximar el área entre la gráfica y el eje x en el intervalo dado. Redondee su respuesta a un decimal.

11. $(1, 0.4), (2, 0.6), (3, 1.2), (4, 0.8), (5, 0.5)$; $[1, 5]$.

12. $(2, 0), (2.5, 3.6), (3, 10), (3.5, 19.9), (4, 34)$; $[2, 4]$.

13. Usando toda la información dada en la figura 15.4, estime $\displaystyle\int_{1}^{3} f(x)\,dx$ por medio de la regla de Simpson. Dé su respuesta en forma de fracción.

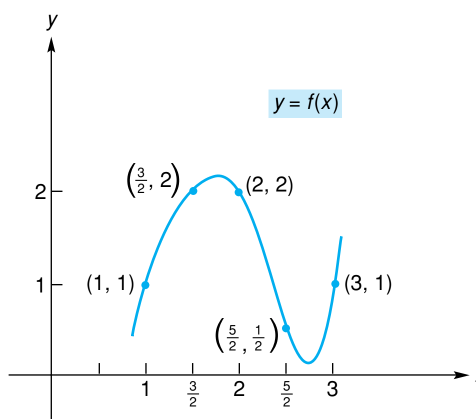


FIGURA 15.4 Gráfica de *f* para el problema 13.

En los problemas 14 y 15 use la regla de Simpson y el valor dado de n para estimar la integral. Calcule cada término con cuatro decimales y redondee sus respuestas a tres decimales.

14. $\int_4^6 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx, n = 4$. Evalúe también la integral usando el teorema fundamental del cálculo integral.

15. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx; n = 4$.

---

16. Ingreso Use la regla de Simpson para aproximar el ingreso total recibido por la producción y venta de 80 unidades de un producto, si los valores de la función de ingreso marginal dr/dq son los siguientes:

***q* (unidades)**	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\frac{dr}{dq}$ **($ por unidad)**	10	9	8.5	8	8.5	7.5	7	6.5	7

17. Área de un lago Un tramo recto de autopista corre a lo largo de un lago. Un topógrafo que desea conocer el área aproximada del lago, mide la distancia desde varios puntos de la carretera a las orillas cercana y lejana del lago y obtiene los siguientes valores:

Distancia a lo largo de la autopista (km)	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
Distancia a la orilla cercana (km)	0.5	0.3	0.7	1.0	0.5	0.2	0.5	0.8	1.0
Distancia a la orilla lejana (km)	0.5	2.3	2.2	3.0	2.5	2.2	1.5	1.3	1.0

Dibuje un croquis de la posición geográfica. Luego use la regla de Simpson para estimar la mejor aproximación del área del lago. Dé su respuesta en forma de fracción.

18. Excedente de los productores La función de oferta para un producto está dada por la siguiente tabla, donde p es el precio por unidad (en dólares) al que se suministran q unidades al mercado:

q	0	10	20	30	40	50
p	38	59	69	75	80	84

Utilice la regla del trapecio para estimar el excedente de los productores, si el precio de venta es de $80.

19. Fabricación Un fabricante estimó su costo marginal (CM) y su ingreso marginal (IM) para varios niveles de producción (q). Esas estimaciones se muestran en la siguiente tabla:

***q* (unidades)**	0	20	40	60	80	100	120
CM ($ por unidad)	260	255	240	240	245	250	255
IM ($ por unidad)	415	360	320	290	270	260	255

a. Con la regla del trapecio, estime los costos totales variables de producción para 120 unidades.
b. Con la regla de Simpson, estime el ingreso total en la venta de 120 unidades.
c. Si se supone que la utilidad máxima ocurre cuando IM = CM (esto es, cuando $q = 120$), estime la utilidad máxima si los costos fijos son de $1500.

OBJETIVO Resolver una ecuación diferencial por medio del método de separación de variables. Analizar soluciones particulares y soluciones generales. Desarrollar el concepto de interés compuesto de manera continua en términos de una ecuación diferencial. Estudiar el crecimiento y el decaimiento exponenciales.

15.6 ECUACIONES DIFERENCIALES

En algunas ocasiones, usted tendrá que resolver una ecuación que contenga la derivada de una función desconocida. Tal ecuación se llama **ecuación diferencial.** Un ejemplo es

$$y' = xy^2. \tag{1}$$

Con mayor precisión, la ecuación (1) se llama **ecuación diferencial de primer orden,** ya que incluye una derivada de primer orden y ninguna de orden superior. Una solución de la ecuación (1), es cualquier función $y = f(x)$ que esté definida en un intervalo y satisfaga la ecuación para toda x en el intervalo.

Para resolver $y' = xy^2$, o de manera equivalente,

$$\frac{dy}{dx} = xy^2, \tag{2}$$

consideramos a dy/dx como un cociente de diferenciales, y "separamos variables" algebraicamente al escribir de nuevo la ecuación de manera que cada miembro contenga sólo una variable, y no aparezcan diferenciales en los denominadores:

$$\frac{dy}{y^2} = x\,dx.$$

Al integrar ambos miembros y combinar las constantes de integración, obtenemos

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int x\,dx,$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2 + 2C_1}{2}.$$

Como $2C_1$ es una constante arbitraria, la reemplazamos por C.

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2 + C}{2}. \tag{3}$$

Despejando a y de la ecuación (3), se tiene

$$y = -\frac{2}{x^2 + C}. \tag{4}$$

Podemos verificar por sustitución que y es una solución de la ecuación diferencial (2):

$$\frac{dy}{dx} = xy^2?$$

$$\frac{4x}{(x^2 + C)^2} = x\left[-\frac{2}{x^2 + C}\right]^2?$$

$$\frac{4x}{(x^2 + C)^2} = \frac{4x}{(x^2 + C)^2}.$$

Observe en la ecuación (4), que para *cada* valor de C, obtuvimos una solución diferente. Llamamos a la ecuación (4) la *solución general* de la ecuación diferencial. El método que usamos para encontrarla se llama *separación de variables*.

En el ejemplo anterior, suponga que nos dan la condición de que $y = -\frac{2}{3}$ cuando $x = 1$; esto es $y(1) = -\frac{2}{3}$. Entonces, la función *particular* que satisface a la ecuación (2) y a esta condición, puede encontrarse sustituyendo los valores $x = 1$ y $y = -\frac{2}{3}$ en la ecuación (4) y despejando a C:

$$-\frac{2}{3} = -\frac{2}{1^2 + C},$$

$$C = 2.$$

Por tanto, la solución para $dy/dx = xy^2$, tal que $y(1) = -\frac{2}{3}$ es

$$y = -\frac{2}{x^2 + 2}. \tag{5}$$

Llamamos a la ecuación (5) una **solución particular** de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 1 Separación de variables

Resolver $y' = -\frac{y}{x}$ si $x, y > 0$.

Principios en práctica 1
Separación de variables
Para un líquido claro, la intensidad de la luz disminuye a una razón de $\frac{dI}{dx} = -kI$, en donde I es la intensidad de la luz y x es el número de pies debajo de la superficie del líquido. Si $k = 0.0085$ y $I = I_0$, cuando $x = 0$, determine I como una función de x.

Solución: al escribir y' como dy/dx, separar variables e integrar, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x}\,dx,$$

$$\ln|y| = C_1 - \ln|x|.$$

Como $x, y > 0$, podemos omitir las barras de valor absoluto:

$$\ln y = C_1 - \ln x. \qquad (6)$$

Para despejar a y, convertimos la ecuación (6) a una forma exponencial:

$$y = e^{C_1 - \ln x}.$$

Por lo que,

$$y = e^{C_1}e^{-\ln x} = \frac{e^{C_1}}{e^{\ln x}}.$$

Reemplazando e^{C_1} por C, donde $C > 0$, y al escribir $e^{\ln x}$ como x, obtenemos

$$y = \frac{C}{x}, \quad C, x > 0.$$

En el ejemplo 1, note que la ecuación (6) expresa la solución de manera implícita, mientras que la ecuación final ($y = C/x$) nos da la solución para y en forma explícita, en términos de x. Usted encontrará que las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales suelen expresarse en forma implícita por conveniencia (o necesidad, debido a la dificultad de obtener una forma explícita).

Crecimiento y decaimiento exponenciales

En la sección 9.3 desarrollamos el concepto del interés compuesto en forma continua. Veamos ahora este tema desde un punto de vista diferente que implica una ecuación diferencial. Supongamos una inversión de P dólares a una tasa anual r compuesta n veces por año. Sea la función $S = S(t)$ la cantidad compuesta S (o la cantidad total presente) después de t años, contados desde la fecha de inversión inicial. Entonces, el capital inicial es $S(0) = P$. Además, como se tienen n periodos de interés por año, cada periodo tiene una duración de $1/n$ años, lo que denotaremos por Δt. Al final del primer periodo, el interés acumulado se suma al capital y la suma actúa como el capital para el segundo periodo, y así sucesivamente. Por tanto, si el principio de un periodo de interés ocurre en el tiempo t, entonces el incremento en la cantidad presente al final de un periodo Δt será $S(t + \Delta t) - S(t)$, que escribimos como ΔS. Este incremento, ΔS, es también el interés ganado en el periodo. En forma equivalente, el interés ganado es el capital por la tasa y por el tiempo:

$$\Delta S = S \cdot r \cdot \Delta t.$$

Dividiendo ambos miembros entre Δt, obtenemos

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = rS. \qquad (7)$$

Cuando $\Delta t \to 0$, entonces $n = \dfrac{1}{\Delta t} \to \infty$ y, en consecuencia, el interés es *compuesto continuamente;* esto es, el capital está sometido a un crecimiento continuo en cada instante. Sin embargo, cuando $\Delta t \to 0$, entonces $\Delta S/\Delta t \to dS/dt$ y la ecuación (7) toma la forma

$$\frac{dS}{dt} = rS. \tag{8}$$

Esta ecuación diferencial significa que *cuando el interés es compuesto en forma continua, la razón de cambio de la cantidad de dinero presente en el tiempo t es proporcional a la cantidad presente en el tiempo t.* La constante de proporcionalidad es r.

Para determinar la función S, resolvemos la ecuación diferencial (8) por el método de separación de variables:

$$\frac{dS}{dt} = rS,$$

$$\frac{dS}{S} = r\,dt,$$

$$\int \frac{1}{S}\,dS = \int r\,dt,$$

$$\ln|S| = rt + C_1.$$

Suponemos que $S > 0$, por lo que $\ln|S| = \ln S$. Entonces,

$$\ln S = rt + C_1.$$

Para obtener una forma explícita, podemos despejar S convirtiendo la ecuación a una forma exponencial.

$$S = e^{rt+C_1} = e^{C_1}e^{rt}$$

Por simplicidad e^{C_1} puede reemplazarse por C para obtener la solución general

$$S = Ce^{rt}.$$

La condición $S(0) = P$ nos permite encontrar el valor de C:

$$P = Ce^{r(0)} = C \cdot 1.$$

Por tanto, $C = P$, y entonces

$$S = Pe^{rt}. \tag{9}$$

La ecuación (9) da el valor total después de t años de una inversión inicial de P dólares compuesta continuamente a una tasa anual r (véase la fig. 15.5).

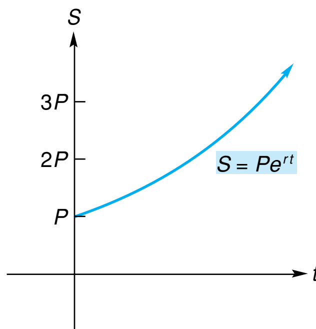


FIGURA 15.5 Capitalización continua.

En nuestro análisis del interés compuesto, vimos en la ecuación (8) que la razón de cambio en la cantidad presente era proporcional a la cantidad presente. Hay muchas cantidades naturales, tales como la población, cuya tasa de crecimiento o decaimiento en cualquier tiempo se considera proporcional a la magnitud de la cantidad presente. Si N denota la magnitud de tal cantidad en el tiempo t, entonces esta razón de crecimiento significa que

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

donde k es una constante. Si separamos variables y despejamos N, como lo hicimos para la ecuación (8), obtenemos

$$N = N_0e^{kt}, \tag{10}$$

donde N_0 es una constante. En particular, si $t = 0$, entonces $N = N_0e^0 = N_0 \cdot 1 = N_0$. Así, la constante N_0 es simplemente $N(0)$. Debido a la forma de la ecuación (10), decimos que la cantidad sigue una **ley exponencial de crecimiento** si k es positiva y una **ley de decaimiento exponencial** si k es negativa.

EJEMPLO 2 Crecimiento de la población

En cierta ciudad, la razón a la que la población crece en cualquier tiempo es proporcional al tamaño de la población. Si la población era de 125,000 *habitantes en* 1970 *y de* 140,000 *en* 1990, *¿cuál es la población esperada en el año* 2010?

Solución: sea N el tamaño de la población en el tiempo t. Como es aplicable la ley de crecimiento exponencial,

$$N = N_0e^{kt}.$$

Para encontrar la población en el año 2010, primero debemos encontrar la ley particular del crecimiento implicada, determinando los valores de N_0 y k. Sea el año 1970 el correspondiente a $t = 0$. Entonces $t = 20$ en 1990 y $t = 40$ en 2010. Tenemos,

$$N_0 = N(0) = 125{,}000.$$

Así,

$$N = 125{,}000e^{kt}.$$

Para encontrar k, usamos la condición de que $N = 140{,}000$ cuando $t = 20$:

$$140{,}000 = 125{,}000e^{20k}.$$

Así,

$$e^{20k} = \frac{140{,}000}{125{,}000} = 1.12,$$

$$20k = \ln(1.12) \quad \text{(forma logarítmica),}$$

$$k = \tfrac{1}{20}\ln(1.12).$$

Por tanto, la ley de crecimiento es

$$N = 125{,}000e^{(t/20)\ln 1.12} \tag{11}$$

$$= 125{,}000[e^{\ln 1.12}]^{t/20},$$

o

$$N = 125{,}000(1.12)^{t/20}. \tag{12}$$

Haciendo $t = 40$, obtenemos la población esperada para 2010:

$$N = 125{,}000(1.12)^2 = 156{,}800.$$

Observamos que podemos escribir la ecuación (11) en forma diferente a la de la ecuación (12). Como $\ln(1.12)/20 \approx 0.0057$, tenemos

$$N \approx 125{,}000e^{0.0057t}.$$

En el capítulo 5, analizamos el decaimiento radiactivo. Consideraremos ahora ese tema desde el punto de vista de una ecuación diferencial. La razón a la que un elemento radiactivo decae en un tiempo cualquiera se sabe que es proporcional a la cantidad presente de ese elemento. Si N es la cantidad de sustancia radiactiva en el tiempo t, entonces la tasa de decaimiento está dado por

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N. \tag{13}$$

La cantidad positiva λ (letra griega "lambda") se llama **constante de decaimiento,** y el signo menos indica que N decrece cuando t crece. Tenemos así un decaimiento exponencial. De acuerdo con la ecuación (10), la solución de esta ecuación diferencial es

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad \textbf{(14)}$$

Si $t = 0$, entonces $N = N_0 \cdot 1 = N_0$, por lo que, N_0 representa la cantidad de sustancia radiactiva presente cuando $t = 0$.

El tiempo que se requiere para que una sustancia radiactiva se reduzca a la mitad se llama **vida media** de la sustancia. En la sección 5.2 vimos que la vida media está dada por

$$\text{vida media} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.69315}{\lambda}. \quad \textbf{(15)}$$

Note que la vida media depende de λ. En el capítulo 5, la figura 5.13 muestra la gráfica del decaimiento radiactivo.

EJEMPLO 3 Determinación de la constante de decaimiento y de la vida media

Si después de 50 días queda el 60% de una sustancia radiactiva, encontrar la constante de decaimiento y la vida media del elemento.

Solución: de la ecuación (14),

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

donde N_0 es la cantidad del elemento presente en $t = 0$. Cuando $t = 50$, $N = 0.6N_0$ y tenemos

$$0.6N_0 = N_0 e^{-50\lambda},$$

$$0.6 = e^{-50\lambda},$$

$$-50\lambda = \ln(0.6) \quad \text{(forma logarítmica)},$$

$$\lambda = -\frac{\ln(0.6)}{50} \approx 0.01022.$$

Así, $N \approx N_0 e^{-0.01022t}$. La vida media, de la ecuación (15), es

$$\frac{\ln 2}{\lambda} \approx 67.85 \text{ días}.$$

La radiactividad es útil en el fechado de restos de plantas fósiles y restos arqueológicos de origen orgánico. Las plantas y otros organismos vivos contienen una pequeña cantidad de carbono 14 radiactivo (^{14}C), además del carbono ordinario (^{12}C). Los átomos de ^{12}C son estables, pero los de ^{14}C decaen exponencialmente. Sin embargo, el ^{14}C se forma en la atmósfera debido al efecto de los rayos cósmicos. Este ^{14}C es absorbido por las plantas durante el proceso de fotosíntesis y reemplaza al que ha decaído. En consecuencia, la razón de átomos de ^{14}C a ^{12}C se considera constante durante un periodo largo. Cuando una planta muere, deja de absorber ^{14}C y los átomos restantes de ^{14}C decaen. Comparando la proporción de ^{14}C a ^{12}C en una planta fósil con la de una planta actual, podemos estimar la edad del fósil. La vida media del ^{14}C es aproximadamente de 5600 años. Así, por ejemplo, si se encuentra que un fósil tiene una relación ^{14}C a ^{12}C que es la mitad de la de una sustancia similar que existe en la actualidad, estimaríamos que el fósil tiene 5600 años de antigüedad.

EJEMPLO 4 Determinación de la edad de una herramienta antigua

Se encontró que una herramienta de madera hallada en una excavación en el Medio Oriente tiene una relación de ^{14}C a ^{12}C igual a 0.6 de la relación correspondiente a la de un árbol actual. Estimar la edad de la herramienta al ciento de años más cercano.

Solución: sea N la cantidad de ^{14}C presente en la madera t años después de que se fabricó la herramienta. Entonces $N = N_0 e^{-\lambda t}$, donde N_0 es la cantidad de ^{14}C cuando $t = 0$. Como la relación de ^{14}C a ^{12}C es igual a 0.6 de la relación correspondiente a la de un árbol actual, esto significa que debemos encontrar el valor de t para el cual $N = 0.6N_0$. Así, tenemos

$$0.6N_0 = N_0 e^{-\lambda t},$$

$$0.6 = e^{-\lambda t},$$

$$-\lambda t = \ln(0.6) \qquad \text{(forma logarítmica)},$$

$$t = -\frac{1}{\lambda}\ln(0.6).$$

De la ecuación (15), la vida media es $(\ln 2)/\lambda$, que es igual a 5600, por lo que, $\lambda = (\ln 2)/5600$. En consecuencia,

$$t = -\frac{1}{(\ln 2)/5600}\ln(0.6)$$

$$= -\frac{5600\ln(0.6)}{\ln 2}$$

$$\approx 4100 \text{ años}.$$

Ejercicio 15.6

En los problemas del 1 al 8 resuelva las ecuaciones diferenciales.

1. $y' = 2xy^2$.
2. $y' = x^3y^3$.
3. $\frac{dy}{dx} - 3x\sqrt{x^2+1} = 0$.
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$.
5. $\frac{dy}{dx} = y, y > 0$.
6. $y' = e^x y^2$.
7. $y' = \frac{y}{x}, x, y > 0$.
8. $\frac{dy}{dx} + xe^x = 0$.

En los problemas del 9 al 18 resuelva cada una de las ecuaciones diferenciales sujetas a las condiciones dadas.

9. $y' = \frac{1}{y}$; $y > 0,\ y(2) = 2$.
10. $y' = e^{x-y}$; $y(0) = 0$. [*Sugerencia*: $e^{x-y} = e^x/e^y$.]
11. $e^y y' - x^2 = 0$; $y = 0$ cuando $x = 0$.
12. $x^2y' + \frac{1}{y^2} = 0$; $y(1) = 2$.
13. $(4x^2+3)^2y' - 4xy^2 = 0$; $y(0) = \frac{3}{2}$.
14. $y' + x^2y = 0$; $y > 0,\ y = 1$ cuando $x = 0$.
15. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x\sqrt{1+y^2}}{y}$; $y > 0,\ y(1) = \sqrt{8}$.
16. $2y(x^3+2x+1)\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+2}{\sqrt{y^2+9}}$; $y(0) = 0$.
17. $2\frac{dy}{dx} = \frac{xe^{-y}}{\sqrt{x^2+3}}$; $y(1) = 0$.
18. $x(y^3+4)^{3/2}\,dx = 3e^{x^2}y^2\,dy$; $y(0) = 0$.

---

19. **Costo** Encuentre la función de costo $c = f(q)$ de un fabricante, dado que

$$(q+1)^2\frac{dc}{dq} = cq$$

y que el costo fijo es e.

20. Encuentre $f(2)$, dado que $f(1) = 0$ y que $y = f(x)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xe^{x-y}.$$

21. Circulación de dinero Un país tiene 900 millones de dólares de papel moneda en circulación. Cada semana, 45 millones se llevan a depositar a los bancos y la misma cantidad es pagada. El gobierno decide reimprimir papel moneda nuevo; siempre que el papel moneda viejo llega a los bancos, es destruido y reemplazado por nuevo. Sea y la cantidad de papel viejo (en millones de dólares) en circulación en el tiempo t (en semanas). Entonces y satisface la relación

$$\frac{dy}{dt} = -0.05y.$$

¿Qué tiempo se requerirá para que el 90% del papel moneda en circulación quede reemplazado por papel nuevo? Redondee su respuesta a la semana más cercana. [*Sugerencia:* si el 90% del papel es nuevo, entonces y es 10% de 900.]

22. Ingreso marginal y demanda Suponga que la función de ingreso marginal de un monopolista está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{dq} = (50 - 4q)e^{-r/5}.$$

Encuentre la ecuación de demanda para el producto del monopolista.

23. Crecimiento de la población En cierta ciudad, la población en cualquier tiempo cambia a una razón proporcional a la población existente. Si en 1985 había 40,000 habitantes y en 1995 había 48,000, encuentre una ecuación para la población en el tiempo t, donde t es el número de años contados a partir de 1985. Escriba su respuesta en dos formas, una de ellas que contenga e. Puede suponer que $\ln 1.2 = 0.18$. ¿Cuál es la población esperada en el año 2005?

24. Crecimiento de la población La población de un pueblo se incrementa por crecimiento natural a una razón proporcional al número N de personas presentes. Si la población en el tiempo $t = 0$ es de 50,000, encuentre dos expresiones para la población N, t años después, si la población se duplica en 50 años. Suponga que $\ln 2 = 0.69$. Encuentre también N para $t = 100$.

25. Crecimiento de la población Suponga que la población del mundo en 1930 era de 2000 millones y que en 1960 era de 3000 millones de habitantes. Si se supone una ley de crecimiento exponencial, ¿cuál es la población esperada en el año 2010? Proporcione su respuesta en términos de e.

26. Crecimiento de la población Si se supone crecimiento exponencial, ¿en cuántos años aproximadamente se triplicará una población, si se duplica en 50 años? [*Sugerencia:* sea N_0 la población en $t = 0$.]

27. Radiactividad Si después de 100 segundos queda el 30% de la cantidad inicial de una muestra radiactiva, encuentre la constante de decaimiento y la vida media del elemento.

28. Radiactividad Si después de 100 segundos una muestra de radiactividad ha *decaído* el 30% de la cantidad inicial, encuentre la constante de decaimiento y la vida media del elemento.

29. Fechado con carbono Se encontró que un rollo de papiro egipcio tiene una relación ^{14}C a ^{12}C igual a 0.7 de la relación correspondiente a la de un material similar actual. Estime la edad del rollo al ciento de años más cercano.

30. Fechado con carbono Un espécimen arqueológico recientemente descubierto tiene una relación ^{14}C a ^{12}C igual a 0.2 de la relación correspondiente a la de un material orgánico similar actual. Estime la edad del espécimen al ciento de años más cercano.

31. Crecimiento de la población Suponga que una población tiene un crecimiento exponencial dado por $dN/dt = kN$ para $t \geq t_0$. También suponga que $N = N_0$ cuando $t = t_0$. Encuentre el tamaño, N, de la población en el tiempo t.

32. Radiactividad El radón tiene una vida media de 3.82 días. (a) Encuentre la constante de decaimiento en términos de ln 2. (b) ¿Qué fracción de la cantidad original queda después de $2(3.82) = 7.64$ días?

33. Radiactividad Los isótopos radiactivos se usan en los diagnósticos médicos como indicadores para determinar las anormalidades que puedan existir en un órgano. Por ejemplo, si se ingiere yodo radiactivo, éste es absorbido después de cierto tiempo por la glándula tiroides. Usando un detector, puede medirse la razón a la que el yodo se absorbe y determinarse si ésta es la razón normal. Suponga que se va a usar tecnecio-99m radiactivo que tiene una vida media de 6 horas en un estudio de cerebro dentro de 2 horas. ¿Cuál debe ser su actividad ahora, si su actividad cuando se use debe ser de 10 unidades? Dé su respuesta con un decimal. [*Sugerencia:* en la ecuación (14), haga $N =$ actividad dentro de t horas y $N_0 =$ actividad ahora.]

34. Radiactividad Una sustancia radiactiva que tiene una vida media de 8 días va a ser implantada temporalmente en un paciente de un hospital hasta que queden 3/5 partes de la cantidad originalmente presente. ¿Cuánto tiempo permanecerá la sustancia implantada en el paciente?

35. Ecología En un bosque ocurre el depósito natural de basura, tal como hojas y ramas caídas, animales muertos, etc.[8] Sea $A(t)$ la cantidad de basura presente en el tiempo t, donde $A(t)$ se expresa en gramos por metro cuadrado y t está en años. Suponga que no hay basura en $t = 0$. Así, $A(0) = 0$. Suponga que

a. La basura cae al suelo continuamente a razón constante de 200 gramos por metro cuadrado cada año.

b. La basura acumulada se descompone continuamente a razón del 50% de la cantidad presente por año (que es $0.50A$).

La diferencia de las dos tasas es la razón de cambio de la cantidad presente de basura con respecto al tiempo:

$$\begin{pmatrix}\text{tasa de cambio de}\\ \text{la basura presente}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{tasa de caída}\\ \text{al suelo}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{tasa de}\\ \text{decomposición}\end{pmatrix}.$$

[8]R. W. Poole, *An Introduction to Quantitative Ecology* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1974).

Por tanto,

$$\frac{dA}{dt} = 200 - 0.50A.$$

Despeje A. Al gramo más cercano, determine la cantidad de basura por metro cuadrado después de un año.

36. Utilidad y publicidad Una empresa determina que la razón de cambio de la utilidad neta mensual P en función del gasto publicitario mensual x, es proporcional a la diferencia entre una cantidad fija, \$110,000 y P; esto es, dP/dx es proporcional a \$110,000 $-$ P. Además, si no se gasta en publicidad mensual, la utilidad neta mensual es de \$10,000; si se gastan \$1000 en publicidad mensual, la utilidad neta mensual es de \$60,000. ¿Cuál sería la utilidad neta mensual si se gastaran \$2000 en publicidad cada mes?

37. Valor de un automóvil El valor de cierto modelo de automóvil se deprecia un 30% en el primer año después de su compra. La razón de la depreciación posterior es proporcional a su valor. Suponga que un automóvil se compró nuevo el 1 de julio de 1999 en \$30,000, y se valuó en \$18,900 el 1 de enero de 2001.

a. Determine una fórmula que exprese el valor V del automóvil en términos de t, el número de años después del 1 de julio de 2000.

b. Use la fórmula en la parte (a) para determinar el año y mes en que el automóvil tiene un valor de exactamente \$14,000.

OBJETIVO Desarrollar la función logística como una solución de una ecuación diferencial. Modelar el esparcimiento de un rumor. Analizar y aplicar la ley de enfriamiento de Newton.

15.7 Más aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

Crecimiento logístico

En la sección anterior encontramos que si el número N de individuos en una población en el tiempo t sigue una ley de crecimiento exponencial, entonces $N = N_0e^{kt}$ donde $k > 0$ y N_0 es la población cuando $t = 0$. Esta ley supone que en el tiempo t la razón de crecimiento dN/dt de la población es proporcional al número de individuos en la población. Esto es, $dN/dt = kN$.

Bajo crecimiento exponencial, una población llegaría a ser infinita con el paso del tiempo. Sin embargo, en realidad, cuando una población llega a ser suficientemente grande existen factores ambientales que hacen más lenta la razón de crecimiento. Ejemplos son la disponibilidad de alimentos, los depredadores, la población en exceso, etc. Esos factores ocasionan que dN/dt decrezca finalmente. Es razonable suponer que el tamaño de la población está limitado a cierto número máximo M, donde $0 < N < M$ y que cuando $N \to M$, entonces $dN/dt \to 0$ y el tamaño de la población tiende a estabilizarse.

En resumen, queremos un modelo de población que tenga inicialmente crecimiento exponencial, pero que también incluya los efectos de la resistencia ambiental a grandes crecimientos de la población. Tal modelo se obtiene multiplicando el miembro derecho de $dN/dt = kN$ por el factor $(M - N)/M$:

$$\frac{dN}{dt} = kN\left(\frac{M - N}{M}\right).$$

Observe que si N es pequeño, entonces $(M - N)/M$ es cercano a 1 y tenemos un crecimiento que es aproximadamente exponencial. Cuando $N \to M$, entonces $M - N \to 0$ y $dN/dt \to 0$, como lo queremos en nuestro modelo. Como k/M es una constante, podemos reemplazarla por K. Así,

$$\frac{dN}{dt} = KN(M - N). \quad (1)$$

Esto establece que la razón de crecimiento es proporcional al producto del tamaño de la población y la diferencia entre el tamaño máximo y el tamaño de la población actual. Podemos determinar N en la ecuación diferencial (1) con el método de separación de variables:

$$\frac{dN}{N(M - N)} = K\,dt,$$

$$\int \frac{1}{N(M - N)}\,dN = \int K\,dt. \quad (2)$$

La integral en el miembro izquierdo puede encontrarse usando la fórmula 5 de la tabla de integrales del apéndice C. Así, la ecuación (2) conduce a

$$\frac{1}{M}\ln\left|\frac{N}{M-N}\right| = Kt + C,$$

o

$$\ln\left|\frac{N}{M-N}\right| = MKt + MC.$$

Como $N > 0$ y $M - N > 0$, podemos escribir

$$\ln\frac{N}{M-N} = MKt + MC.$$

En forma exponencial, tenemos

$$\frac{N}{M-N} = e^{MKt+MC} = e^{MKt}e^{MC}.$$

Reemplazando la constante positiva e^{MC} *por* A y despejando N se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{N}{M-N} &= Ae^{MKt},\\
N &= (M-N)Ae^{MKt},\\
N &= MAe^{MKt} - NAe^{MKt},\\
NAe^{MKt} + N &= MAe^{MKt},\\
N(Ae^{MKt}+1) &= MAe^{MKt},\\
N &= \frac{MAe^{MKt}}{Ae^{MKt}+1}.
\end{aligned}$$

Al dividir el numerador y el denominador entre Ae^{MKt}, tenemos

$$N = \frac{M}{1+\dfrac{1}{Ae^{MKt}}} = \frac{M}{1+\dfrac{1}{A}e^{-MKt}}.$$

Al reemplazar $1/A$ por b y MK por c se obtiene la llamada *función logística:*

Función logística

La función definida por

$$N = \frac{M}{1+be^{-ct}} \tag{3}$$

se llama **función logística** o **función logística de Verhulst-Pearl.**

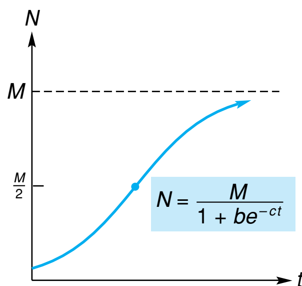


FIGURA 15.6 Curva logística.

La gráfica de la ecuación (3), llamada *curva logística*, tiene forma de S, como se muestra en la figura 15.6. Observe que la recta $N = M$ es una asíntota horizontal; esto es,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M}{1+be^{-ct}} = \frac{M}{1+b(0)} = M.$$

Además, de la ecuación (1), la razón de crecimiento es

$$KN(M-N),$$

que puede considerarse como una función de N. Para encontrar cuándo ocurre la máxima razón de crecimiento, resolvemos $\frac{d}{dN}[KN(M-N)] = 0$ para N:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dN}[KN(M-N)] &= \frac{d}{dN}[K(MN-N^2)]\\ &= K[M-2N] = 0.\end{aligned}$$

Así, $N = M/2$. En otras palabras, la razón de crecimiento aumenta hasta que el tamaño de la población es $M/2$ y después decrece. La razón máxima de crecimiento ocurre cuando $N = M/2$ y corresponde a un punto de inflexión en la gráfica de N. Para encontrar el valor de t en que ocurre esto, sustituimos $M/2$ por N en la ecuación (3) y despejamos t:

$$\begin{aligned}\frac{M}{2} &= \frac{M}{1+be^{-ct}},\\ 1+be^{-ct} &= 2,\\ e^{-ct} &= \frac{1}{b},\\ e^{ct} &= b,\\ ct &= \ln b \qquad \text{(forma logarítmica)},\\ t &= \frac{\ln b}{c}.\end{aligned}$$

Por tanto, la razón máxima de crecimiento ocurre en el punto $([\ln b]/c, M/2)$.

Observamos que en la ecuación (3) podemos reemplazar e^{-c} por C y entonces la función logística tiene la siguiente forma:

Forma alternativa de la función logística

$$N = \frac{M}{1+bC^t}.$$

EJEMPLO 1 Crecimiento logístico de la membresía de un club

Supóngase que el número máximo de socios en un club nuevo será de 800 personas debido a las limitaciones de espacio. Hace un año, el número inicial de socios era de 50, pero ahora es de 200. Si el número de socios crece como una función logística, ¿cuántos socios habrá dentro de 3 años?

Solución: sea N el número de socios inscritos t años después de la formación del club. Entonces, de la ecuación (3).

$$N = \frac{M}{1+be^{-ct}}.$$

Aquí, $M = 800$ y cuando $t = 0$, tenemos $N = 50$. De este modo,

$$50 = \frac{800}{1+b},$$

$$1 + b = \frac{800}{50} = 16,$$
$$b = 15.$$

Así,

$$N = \frac{800}{1 + 15e^{-ct}}. \quad (4)$$

Cuando $t = 1$, entonces $N = 200$, así tenemos

$$200 = \frac{800}{1 + 15e^{-c}},$$
$$1 + 15e^{-c} = \frac{800}{200} = 4,$$
$$e^{-c} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

Por consiguiente, $c = -\ln\frac{1}{5} = \ln 5$. En vez de sustituir este valor de c en la ecuación (4), es más conveniente sustituir ahí el valor de e^{-c}:

$$N = \frac{800}{1 + 15(\frac{1}{5})^t}.$$

Dentro de tres años, a partir de ahora, t será 4. Por tanto,

$$N = \frac{800}{1 + 15(\frac{1}{5})^4} \approx 781$$

Modelado de la difusión de un rumor

Consideremos ahora un modelo simplificado de cómo se difunde un rumor en una población del tamaño M. Una situación similar sería la difusión de una epidemia o de una nueva moda.

Sea $N = N(t)$ el número de personas que conocen el rumor en el tiempo t. Supondremos que aquellos que conocen el rumor lo difunden en forma aleatoria entre la población, y que quienes lo oyen se convierten en difusores del mismo. Más aún, supondremos que cada conocedor del rumor lo comunica a k individuos por unidad de tiempo (algunos de esos individuos pueden conocer ya el rumor). Buscamos una expresión para la razón de crecimiento de conocedores del rumor. En una unidad de tiempo, casi cada una de N personas comunicarán el rumor a k personas. Así, el número total de personas que oyen el rumor en un tiempo unitario es (aproximadamente) Nk. Sin embargo, estamos interesados sólo en *nuevos* conocedores. La proporción de la población que no conoce el rumor es $(M - N)/M$. De aquí que el número total de nuevos conocedores del rumor es

$$Nk\left(\frac{M - N}{M}\right),$$

que puede escribirse $(k/M)N(M - N)$. Por tanto,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k}{M}N(M - N)$$
$$= KN(M - N), \qquad \text{donde } K = \frac{k}{M}.$$

Esta ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (1), por lo que su solución, de acuerdo con la ecuación (3), es una *función logística:*

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}.$$

EJEMPLO 2 Rumor en un campus

En una gran universidad de 45,000 *estudiantes, una estudiante de sociología está investigando la difusión de un rumor en el campus. Cuando comienza su investigación, ella determina que* 300 *estudiantes conocen el rumor. Después de una semana, determina que* 900 *lo conocen. Estimar el número de estudiantes que lo conocen después de* 4 *semanas de comenzada la investigación, suponiendo un crecimiento logístico. Dar la respuesta al millar más cercano.*

Solución: sea N el número de estudiantes que conocen el rumor t semanas después de que comienza la investigación. Entonces,

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}.$$

Aquí, el tamaño de la población M es de 45,000 y cuando $t = 0, N = 300$. Así, tenemos

$$300 = \frac{45{,}000}{1 + b},$$

$$1 + b = \frac{45{,}000}{300} = 150,$$

$$b = 149.$$

Por tanto,

$$N = \frac{45{,}000}{1 + 149e^{-ct}}.$$

Cuando $t = 1$, entonces $N = 900$. De aquí que

$$900 = \frac{45{,}000}{1 + 149e^{-c}},$$

$$1 + 149e^{-c} = \frac{45{,}000}{900} = 50.$$

Por tanto, $e^{-c} = \frac{49}{149}$ por lo que

$$N = \frac{45{,}000}{1 + 149(\frac{49}{149})^t}.$$

Cuando $t = 4$,

$$N = \frac{45{,}000}{1 + 149(\frac{49}{149})^4} \approx 16{,}000.$$

Después de 4 semanas, aproximadamente 16,000 estudiantes conocerán el rumor.

Ley del enfriamiento de Newton

Concluimos esta sección con una interesante aplicación de una ecuación diferencial. Si se comete un homicidio, la temperatura del cuerpo de la víctima

disminuirá gradualmente de 37°C (temperatura normal del cuerpo) a la temperatura ambiente. En general, la temperatura del cuerpo en proceso de enfriamiento cambia a una razón proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente. Este enunciado se conoce como **ley de enfriamiento de Newton.** Así, si $T(t)$ es la temperatura del cuerpo en el tiempo t y la del medio ambiente es a, entonces

$$\frac{dT}{dt} = k(T - a),$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Por tanto, la ley de enfriamiento de Newton es una ecuación diferencial. Puede aplicarse para determinar el tiempo en que se cometió un homicidio, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Tiempo del crimen

Un rico industrial fue encontrado asesinado en su casa. La policía llegó a la escena a las 11:00 P.M. *La temperatura del cadáver en ese momento era de* 31°C *y una hora después era de* 30°C*. La temperatura de la habitación en que se encontró el cadáver era de* 22°C*. Estime la hora en que ocurrió el asesinato.*

Solución: sean t el número de horas después de que fue descubierto el cadáver y $T(t)$ la temperatura (en grados Celsius) de éste en el tiempo t. Queremos encontrar el valor de t para el cual $T = 37$ (temperatura normal del cuerpo humano). Este valor de t será, por supuesto, negativo. Por la ley de enfriamiento de Newton,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - a),$$

donde k es una constante y a (la temperatura del ambiente) es 22. Así,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 22).$$

Separando variables, tenemos

$$\frac{dT}{T - 22} = k\,dt,$$

$$\int \frac{dT}{T - 22} = \int k\,dt,$$

$$\ln|T - 22| = kt + C.$$

Ya que $T - 22 > 0$,

$$\ln(T - 22) = kt + C.$$

Cuando $t = 0$, entonces $T = 31$. Por tanto,

$$\ln(31 - 22) = k \cdot 0 + C,$$

$$C = \ln 9.$$

De aquí que,

$$\ln(T - 22) = kt + \ln 9,$$

$$\ln(T - 22) - \ln 9 = kt,$$

$$\ln\frac{T - 22}{9} = kt \qquad \left(\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}\right).$$

Cuando $t = 1$, entonces $T = 30$, por lo que

$$\ln\frac{30-22}{9} = k\cdot 1,$$

$$k = \ln\frac{8}{9}.$$

Por tanto,

$$\ln\frac{T-22}{9} = t\ln\frac{8}{9}.$$

Ahora encontramos T cuando $T = 37$:

$$\ln\frac{37-22}{9} = t\ln\frac{8}{9},$$

$$t = \frac{\ln(15/9)}{\ln(8/9)} \approx -4.34.$$

De acuerdo con esto, el crimen ocurrió aproximadamente 4.34 horas *antes* del tiempo en que fue descubierto el cadáver (11:00 P.M.). Como 4.34 horas son (aproximadamente) 4 horas 20 minutos, el industrial fue asesinado alrededor de las 6:40 P.M.

Ejercicio 15.7

1. **Población** La población de una ciudad sigue un crecimiento logístico y está limitada a 80,000. Si la población en 1995 era de 40,000 y en 2000 de 50,000, ¿cuál será la población en el año 2005? Dé su respuesta al ciento más cercano.

2. **Producción** Una empresa cree que la producción de cierto artículo con sus instalaciones actuales tendrá un crecimiento logístico. Actualmente se producen 200 unidades diarias y esta cantidad crecerá a 300 por día en un año. Si la producción está limitada a 500 unidades por día, ¿cuál es la producción diaria prevista para dentro de 2 años? Dé su respuesta a la unidad más cercana.

3. **Difusión de un rumor** En un país de 6 millones de habitantes, el primer ministro sufre un ataque cardiaco, que el gobierno no publica oficialmente. Al principio, 100 personas del gobierno saben del ataque, pero están difundiendo esta información como un rumor. Al final de la semana, 10,000 personas conocen el rumor. Suponiendo un crecimiento logístico, encuentre cuánta gente conocerá el rumor después de 2 semanas. Dé su respuesta al millar más cercano.

4. **Difusión de una moda** Una moda nueva ha llegado a un campus de 30,000 estudiantes. El periódico de la universidad piensa que sus lectores estarían interesados en un artículo sobre la nueva moda. A un reportero se le encarga el artículo cuando el número de estudiantes que la han adoptado es de 400. Una semana después la están practicando 1200 estudiantes. Suponiendo un crecimiento logístico, encuentre una fórmula para el número N que seguirán la moda t semanas después del encargo al reportero.

5. **Brote de gripe** En una ciudad de 100,000 habitantes ocurre un brote de gripe. Cuando el departamento de salud comienza a registrar casos, hay sólo 500 personas infectadas. Una semana después hay 1000 infectados. Suponiendo un crecimiento logístico, estime el número de personas infectadas dos semanas después de que comenzó el registro.



6. **Población** Se estima que la curva logística para la población de Estados Unidos de 1790 a 1910 es[9]

$$N = \frac{197.30}{1 + 35.60e^{-0.031186t}},$$

donde N es la población en millones y t está en años contados desde 1800. Si esta función logística fuese válida para los años después de 1910, ¿en qué año ocurriría el punto de inflexión? Redondee su respuesta a un decimal.

[9] N. Keyfitz, *Introduction to the Mathematics of Population* (Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1968).

7. Biología En un experimento,[10] cinco *Paramecia* se colocaron en un tubo de ensayo que contenía un medio nutritivo. El número N de *Paramecia* en el tubo al final de t días está dado, en forma aproximada, por

$$N = \frac{375}{1 + e^{5.2-2.3t}}.$$

a. Demuestre que esto puede escribirse como

$$N = \frac{375}{1 + 181.27e^{-2.3t}}$$

por lo que es una función logística.

b. Encontrar $\lim_{t\to\infty} N$.

8. Biología En el estudio del crecimiento de una colonia de organismos[11] unicelulares se obtuvo la siguiente ecuación

$$N = \frac{0.2524}{e^{-2.128x} + 0.005125}, \qquad 0 \le x \le 5,$$

donde N es el área estimada del crecimiento en centímetros cuadrados y x es la edad de la colonia en días después de la primera observación.

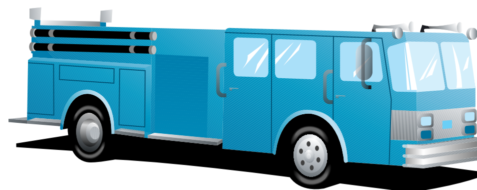
a. Ponga esta ecuación en forma de una ecuación logística.

b. Encuentre el área cuando la edad de la colonia es 0.

9. Tiempo de un crimen Se cometió un homicidio y la policía descubrió el cuerpo de la víctima a las 3:15 A.M. En ese momento la temperatura del cadáver era de 32°C. Una hora después su temperatura era de 30°C. Después de consultar con la oficina meteorológica, se determinó que la temperatura en el lugar del crimen era de 10°C entre las 10:00 P.M. y las 5:00 A.M. ¿A qué hora ocurrió el homicidio?

10. Formación de enzimas Una enzima es una proteína que actúa como catalizador para incrementar la velocidad de una reacción que ocurre en las células. En cierta reacción, una enzima A se convierte en otra enzima B. La enzima B actúa como catalizador en su propia formación. Sean p la cantidad de enzima B en el tiempo t, e I la cantidad total de ambas enzimas cuando $t = 0$. Suponga que la razón de formación de B es proporcional a $p(I - p)$. Sin usar el cálculo en forma directa, encuentre el valor de p para el cual la razón de formación será un máximo.

11. Colecta Una ciudad pequeña decide efectuar una colecta para comprar un camión de bomberos que cuesta $70,000. La cantidad inicial en la colecta es de $10,000. Con base en colectas anteriores, se determinó que t meses después del inicio de esta colecta, la razón dx/dt con que se recibe dinero es proporcional a la diferencia entre la cantidad deseada de $70,000 y la cantidad total x en el fondo en ese momento. Después de un mes se tienen $40,000. ¿Cuánto se tendrá después de 3 meses?



12. Tasa de nacimientos En un análisis de las propiedades inesperadas de modelos matemáticos de población, Bailey[12] considera el caso en que la tasa de nacimientos por *individuo* es proporcional al tamaño N de la población en el tiempo t. Como la tasa de crecimiento por individuo es $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$, esto significa que

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = kN,$$

o

$$\frac{dN}{dt} = kN^2 \qquad (\text{sujeto a } N = N_0 \text{ en } t = 0),$$

donde $k > 0$. Demuestre que

$$N = \frac{N_0}{1 - kN_0t}.$$

Use este resultado para demostrar que

$$\lim N = \infty \quad \text{cuando} \quad t \to \left(\frac{1}{kN_0}\right)^-.$$

Esto significa que en un intervalo finito de tiempo hay una cantidad infinita de crecimiento. Tal modelo podría ser útil sólo para un crecimiento rápido en un intervalo corto de tiempo.

13. Población Suponga que la razón de crecimiento de una población es proporcional a la diferencia entre algún tamaño máximo M y el número N de individuos en la población en el tiempo t. Suponga que cuando $t = 0$, el tamaño de la población es N_0. Encuentre una fórmula para N.

---

[10] G. F. Gause, *The Struggle for Existence* (Nueva York: Hafner Publishing Co., 1964).

[11] A. J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology* (Nueva York: Dover Publicatios, Inc., 1956).

[12] N. T. J. Bailey, *The Mathematical Approach to Biology and Medicine* (Nueva York: John Wiley & Sons, Inc., 1967).

15.8 Integrales impropias

OBJETIVO Definir y evaluar integrales impropias.

Suponga que $f(x)$ es continua y no negativa para $a \leq x < \infty$ (véase la fig. 15.7). Sabemos que la integral $\int_a^r f(x)\,dx$ es el área de la región entre la

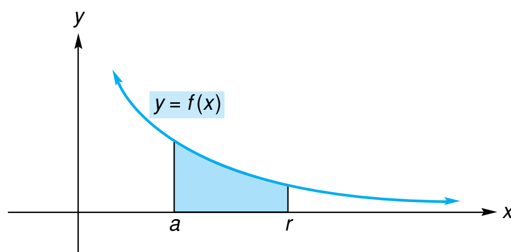


FIGURA 15.7 Área de a a r.

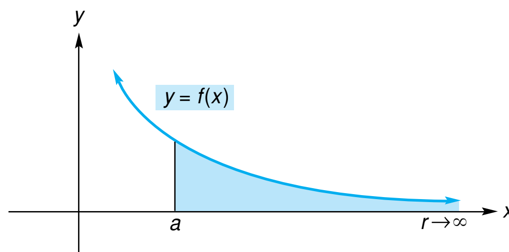


FIGURA 15.8 Área de a a r cuando $r \to \infty$.

curva $y = f(x)$ y el eje x, de $x = a$ a $x = r$. Cuando $r \to \infty$, podemos considerar que

$$\lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\,dx$$

es el área de la región no acotada y que aparece sombreada en la figura 15.8. Este límite que se abrevia como

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx, \tag{1}$$

se llama **integral impropia.** Si este límite existe, $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ se dice que es **convergente** o que *converge* a ese límite. En este caso, la región no acotada se considera que tiene un área finita, y esta área es representada por $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$. Si el límite no existe, se dice que la integral impropia es **divergente** y la región no tiene un área finita.

Podemos quitar la restricción de que $f(x) \geq 0$. En general, la integral impropia $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ está definida por

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\,dx.$$

Otros tipos de integrales impropias son

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \tag{2}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{3}$$

En cada uno de los tres tipos de integrales impropias [(1), (2) y (3)], el intervalo en el cual la integral se evalúa tiene longitud infinita. La integral impropia en (2) se define como

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{b} f(x)\,dx.$$

Si este límite existe, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ se dice que es convergente. En caso contrario, se dice que es divergente. Definiremos la integral impropia en (3) después del ejemplo siguiente.

Principios en práctica 1

Integrales impropias de la forma $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

La razón a la que el cuerpo humano elimina cierta droga de su sistema, puede ser aproximado por $R(t) = 3e^{-0.1t} - 3e^{-0.3t}$, donde $R(t)$ está en mililitros por minuto y t es el tiempo en minutos desde que se tomó la droga. Determine $\int_{0}^{\infty} (3e^{-0.1t} - 3e^{-0.3t})\,dt$, la cantidad total de droga que se elimina.

EJEMPLO 1 Integrales impropias de la forma $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

Determinar si las siguientes integrales impropias son convergentes o divergentes. Para las que sean convergentes, calcular el valor de la integral.

a. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx.$

Solución:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{1}^{r} x^{-3}\,dx = \lim_{r\to\infty} -\frac{x^{-2}}{2}\bigg|_{1}^{r}$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left[-\frac{1}{2r^2} + \frac{1}{2}\right] = -0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ converge a $\frac{1}{2}$.

b. $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx.$

Solución:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} e^x\,dx = \lim_{r\to-\infty} e^x\bigg|_{r}^{0}$$

$$= \lim_{r\to-\infty} (1 - e^r) = 1 - 0 = 1 \qquad (e^0 = 1).$$

(Aquí usamos el hecho de que cuando $r \to -\infty$, la gráfica de $y = e^r$ se aproxima al eje r, por lo que $e^r \to 0$). Por tanto, $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$ converge a 1.

c. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$

Solución:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{1}^{r} x^{-1/2}\,dx = \lim_{r\to\infty} 2x^{1/2}\bigg|_{1}^{r}$$

$$= \lim_{r\to\infty} 2(\sqrt{r} - 1) = \infty$$

Por tanto, la integral impropia diverge.

La integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ se define en términos de integrales impropias de las formas (1) y (2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx. \quad (4)$$

Si *ambas* integrales en el miembro derecho de la ecuación (4) son convergentes, se dice entonces que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente; de otra manera es divergente.

EJEMPLO 2 Integral impropia de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Determinar si $\int_{-\infty}^{\infty} e^x\,dx$ es convergente o divergente.

Solución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx + \int_{0}^{\infty} e^x\,dx.$$

Por el ejemplo 1(b), $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = 1$. Por otra parte,

$$\int_{0}^{\infty} e^x\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{0}^{r} e^x\,dx = \lim_{r\to\infty} e^x\Big|_0^r = \lim_{r\to\infty}(e^r - 1) = \infty.$$

Como $\int_{0}^{\infty} e^x\,dx$ es divergente, $\int_{-\infty}^{\infty} e^x\,dx$ también es divergente.

EJEMPLO 3 Función de densidad

En estadística, una función se llama función de densidad si $f(x) \geq 0$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Suponga que

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x}, & \text{para } x \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una función de densidad. Encontrar k.

Solución: escribimos la ecuación $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ como

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Como $f(x) = 0$ para $x < 0$, $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = 0$. Por lo que,

$$\int_0^\infty ke^{-x}\,dx = 1,$$

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^r ke^{-x}\,dx = 1,$$

$$\lim_{r\to\infty} -ke^{-x}\Big|_0^r = 1,$$

$$\lim_{r\to\infty}(-ke^{-r}+k) = 1,$$

$$0 + k = 1 \qquad \left(\lim_{r\to\infty} e^{-r} = 0\right),$$

$$k = 1.$$

Ejercicio 15.8

En los problemas del 1 al 12 determine las integrales en caso de que existan. Indique cuáles son divergentes.

1. $\int_3^\infty \frac{1}{x^2}\,dx.$

2. $\int_2^\infty \frac{1}{(2x-1)^3}\,dx.$

3. $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx.$

4. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$

5. $\int_1^\infty e^{-x}\,dx.$

6. $\int_0^\infty (5+e^{-x})\,dx.$

7. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$

8. $\int_4^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}.$

9. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)^3}\,dx.$

10. $\int_{-\infty}^{3} \frac{1}{\sqrt{7-x}}\,dx.$

11. $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx.$

12. $\int_{-\infty}^\infty (5-3x)\,dx.$

13. Función de densidad La función de densidad para la vida en horas x, de un componente electrónico en un aparato de medición, está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^2}, & \text{para } x \geq 800, \\ 0, & \text{para } x < 800. \end{cases}$$

a. Si k satisface la condición de que $\int_{800}^\infty f(x)\,dx = 1$, encuentre k.

b. La probabilidad de que el componente dure por lo menos 1200 horas está dada por $\int_{1200}^\infty f(x)\,dx$. Evalúe esta integral.

14. Función de densidad Dada la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-4x}, & \text{para } x \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Encuentre k. [*Sugerencia:* véase el ejemplo 3.]

15. Utilidades futuras Para un negocio, el valor presente de todas las utilidades futuras a un interés anual r compuesto continuamente, está dada por

$$\int_0^\infty p(t)e^{-rt}\,dt,$$

donde $p(t)$ es la utilidad anual en dólares en el tiempo t. Con $p(t) = 240{,}000$ y $r = 0.06$, evalúe la integral anterior.

16. Psicología En un modelo psicológico para la detección de señales,[13] la probabilidad α (letra griega "alfa") de reportar una señal cuando ninguna señal está presente está dada por

$$\alpha = \int_{x_c}^\infty e^{-x}\,dx, \quad x \geq 0.$$

La probabilidad β (letra griega "beta") de detectar una señal cuando una está presente es

$$\beta = \int_{x_c}^\infty ke^{-kx}\,dx, \; x \geq 0.$$

[13] D. Laming, *Mathematical Psychology* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1973).

En ambas integrales x_c es una constante (llamada valor de criterio en este modelo). Encuentre α y β si $k = \frac{1}{8}$.

17. Encuentre el área de la región en el primer cuadrante limitada por la curva $y = e^{-2x}$ y el eje x.

18. Economía En el análisis de la entrada de una empresa a una industria, Stigler[14] utiliza la ecuación

$$V = \pi_0 \int_0^{\infty} e^{\theta t} e^{-\rho t}\, dt,$$

donde π_0, θ (letra griega "theta"), y ρ (letra griega "rho") son constantes. Demuestre que $V = \pi_0/(\rho - \theta)$ si $\theta < \rho$.

19. Población La predicción de la tasa de crecimiento por año de la población de cierta ciudad pequeña, está dada por

$$\frac{40{,}000}{(t+2)^2},$$

donde t es el número de años, contados a partir de ahora. A largo plazo (esto es, cuando $t \to \infty$), ¿cuál es el cambio esperado en la población a partir del nivel actual?

[14]G. Stigler, *The Theory of Price,* 3ra. ed. (Nueva York: Macmillan Publishing Company, 1966), p. 344.

15.9 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 15.1 integración por partes

Sección 15.2 función racional propia fracciones parciales

Sección 15.3 valor presente de una anualidad continua monto acumulado de una anualidad continua

Sección 15.4 valor promedio de una función

Sección 15.5 regla del trapecio regla de Simpson

Sección 15.6 ecuación diferencial de primer orden separación de variables crecimiento exponencial decaimiento exponencial constante de decaimiento vida media

Sección 15.7 función logística ley de enfriamiento de Newton

Sección 15.8 integral impropia, $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Resumen

En ocasiones, podemos determinar con facilidad una integral cuya forma es $u\,dv$, donde u y v son funciones de la misma variable, aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Una función racional propia puede integrarse aplicando la técnica de las fracciones parciales. Según este procedimiento, la función racional se expresa como una suma de fracciones, cada una de las cuales es más fácil de integrar que la fracción original.

Para determinar una integral que no tiene una forma familiar, a veces es posible hacerla coincidir con una fórmula de una tabla de integrales.

Sin embargo, puede ser necesario transformarla en una forma equivalente antes de poder aplicar la fórmula.

Una anualidad es una serie de pagos en un periodo. Suponga que los pagos se hacen continuamente durante T años, de manera que un pago en el tiempo t es a la tasa de $f(t)$ por año. Si la tasa anual de interés es r, compuesta de manera continua, entonces el valor presente (actual) de la anualidad continua está dado por

$$A = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt,$$

y el monto acumulado S está dado por

$$S = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)}\,dt.$$

El valor promedio $\bar{f}$ de una función f en un intervalo $[a, b]$ está dado por

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Existen fórmulas que nos permiten aproximar el valor de una integral definida. Una de ellas es la regla del trapecio:

Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) +$$

$$\cdots + 2f[a + (n-1)h] + f(b)],$$

donde $h = (b - a)/n$.

Otra fórmula es la regla de Simpson:

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) +$$

$$\cdots + 4f[a + (n-1)h] + f(b)],$$

donde $h = (b - a)/n$ y n es un número par.

Una ecuación que contiene la derivada de una función desconocida se llama ecuación diferencial. Si la derivada de mayor orden que se tiene es la primera, la ecuación se llama ecuación diferencial de primer orden. Algunas ecuaciones diferenciales de primer orden pueden resolverse por el método de separación de variables. En ese método, considerando la derivada como un cociente de diferenciales, escribimos la ecuación de manera que cada miembro contenga sólo una variable y ninguna diferencial en el denominador. Integrando ambos miembros de la ecuación resultante se obtiene la solución. Esta solución incluye una constante de integración y se llama solución general de la ecuación diferencial. Si la función desconocida debe satisfacer la condición de que tenga un valor específico para un valor dado de la variable independiente, entonces puede encontrarse una solución particular.

Las ecuaciones diferenciales surgen cuando conocemos una relación que implica la razón de cambio de una función. Por ejemplo, si una cantidad N en el tiempo t es tal que cambia a una razón proporcional a la cantidad presente, entonces

$$\frac{dN}{dt} = kN, \quad \text{donde } k \text{ es una constante.}$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$N = N_0 e^{kt},$$

donde N_0 es la cantidad presente en $t = 0$. El valor de k puede determinarse cuando se conoce el valor de N para un valor dado de t (que no sea $t = 0$). Si k es positiva, entonces N sigue una ley exponencial de crecimiento; si k es negativa, N sigue una ley exponencial de decaimiento. Si N representa una cantidad de un elemento radiactivo, entonces

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad \text{donde } \lambda \text{ es una constante positiva.}$$

Así, N sigue una ley exponencial de decaimiento, por lo que

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

La constante λ se llama constante de decaimiento. El tiempo para que la mitad del elemento decaiga es la vida media del elemento:

$$\text{vida media} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0.69315}{\lambda}.$$

Una cantidad N puede seguir una razón de crecimiento dada por

$$\frac{dN}{dt} = KN(M - N), \text{ donde } K \text{ y } M \text{ son constantes.}$$

Al resolver esta ecuación diferencial resulta una función de la forma

$$N = \frac{M}{1 + be^{-ct}}, \quad \text{donde } b \text{ y } c \text{ son constantes,}$$

que se llama función logística. Muchos tamaños de poblaciones pueden describirse por medio de una función logística. En este caso, M representa el límite del tamaño de la población. Una función logística se usa también en el análisis de la difusión de un rumor.

La ley de enfriamiento de Newton establece que la temperatura T de un cuerpo que se enfría en el tiempo t, cambia a una razón proporcional a la diferencia $T - a$, donde a es la temperatura del medio ambiente. Así,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - a), \quad \text{donde } k \text{ es una constante.}$$

La solución de esta ecuación diferencial puede usarse, por ejemplo, para determinar la hora a la que se cometió un homicidio.

Una integral de la forma

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx, \quad \text{o} \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$$

se llama integral impropia. Las primeras dos integrales se definen como sigue:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\,dx,$$

y

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{r\to-\infty} \int_r^b f(x)\,dx.$$

Si $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ (o $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$) es un número finito, decimos que la integral es convergente, de otra manera, que es divergente. La integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ está definida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Si ambas integrales en el miembro derecho son convergentes, se dice que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, de otra manera, es divergente.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 22 determine las integrales.

1. $\int x \ln x\,dx.$ **2.** $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx.$ **3.** $\int_0^2 \sqrt{4x^2+9}\,dx.$ **4.** $\int \frac{16x}{3-4x}\,dx.$

5. $\int \frac{21x\,dx}{(2+3x)(3+x)}.$ **6.** $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\,dx.$ **7.** $\int \frac{dx}{x(x+2)^2}.$ **8.** $\int \frac{dx}{x^2-1}.$

9. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-16x^2}}.$ **10.** $\int x^{1/3} \ln \sqrt{x}\,dx.$ **11.** $\int \frac{9\,dx}{x^2-9}.$ **12.** $\int \frac{27x}{\sqrt{1+3x}}\,dx.$

13. $\int 49xe^{7x}\,dx.$ **14.** $\int \frac{dx}{2+3e^{4x}}.$ **15.** $\int \frac{dx}{2x \ln 2x}.$ **16.** $\int \frac{dx}{x(2+x)}.$

17. $\int \frac{2x}{3+2x}\,dx.$ **18.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}.$ [15]**19.** $\int \frac{5x^2+2}{x^3+x}\,dx.$

[15]**20.** $\int \frac{3x^3+5x^2+4x+3}{x^4+x^3+x^2}\,dx.$ [16]**21.** $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx.$ [16]**22.** $\int (\ln x)^3\,dx.$

23. Encuentre el valor promedio de $f(x) = 3x^2 + 2x$ en el intervalo $[2, 4]$.

24. Encuentre el valor promedio de $f(t) = te^{t^2}$ en el intervalo $[2, 5]$.

En los problemas 25 y 26 use (a) la regla del trapecio y (b) la regla de Simpson para estimar la integral con el valor dado de n. Redondee sus respuestas a tres decimales.

25. $\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx,\ n = 6.$ **26.** $\int_0^1 \frac{1}{2-x^2}\,dx,\ n = 4.$

En los problemas 27 y 28 resuelva las ecuaciones diferenciales.

27. $y' = 3x^2y + 2xy, \quad y > 0.$ **28.** $y' - 2xe^{x^2-y+3} = 0, \quad y(0) = 3.$

En los problemas del 29 al 32 determine las integrales impropias, en caso de que existan.[17] *Indique cuáles son divergentes.*

29. $\int_3^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx.$ **30.** $\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx.$ **31.** $\int_1^{\infty} \frac{1}{2x}\,dx.$ **32.** $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{1-x^2}\,dx.$

33. Población La población de una ciudad en 1985 era de 100,000 habitantes y en 2000 fue de 120,000. Suponiendo un crecimiento exponencial, estime la población para el año 2015.

34. Población La población de una ciudad se duplica cada 10 años debido a un crecimiento exponencial. En cierto tiempo, la población es de 40,000 habitantes. Encuentre una expresión para el número N de personas t años después. Dé su respuesta en términos de ln 2.

35. Radiactividad Si después de 100 años queda el 95% de una sustancia radiactiva, encuentre la constante de decaimiento y, al por ciento más cercano, dé el porcentaje de la cantidad original presente después de 200 años.

36. Medicina Suponga que q es la cantidad de penicilina en el cuerpo en el tiempo t y sea q_0 la cantidad en $t = 0$. Suponga que la razón de cambio de q con respecto a t es proporcional a q y que q decrece cuando t crece. Entonces tenemos $dq/dt = -kq$, donde $k > 0$. Despeje q. ¿Qué porcentaje de la cantidad original se tiene cuando $t = 2/k$?

[15]Revise la sección 15.2.

[16]Revise la sección 15.1.

[17]Revise la sección 15.8.

37. Biología Dos organismos se colocan inicialmente en un medio y empiezan a multiplicarse. El número N de organismos presentes después de t días se registra sobre una gráfica cuyo eje horizontal es el eje t y el eje vertical es el eje N. Se observa que los puntos caen sobre una curva logística. El número de organismos presentes después de 6 días es de 300 y después de 10 días el número tiende al límite de 450. Encuentre la ecuación logística.

38. Matrícula La matrícula de un colegio sigue un crecimiento logístico. El año pasado, la matrícula fue de 1000 y este año de 1100. Si el colegio puede recibir un máximo de 2000 estudiantes, ¿cuál es la matrícula esperada para el año próximo? Dé su respuesta al ciento más cercano.

39. Hora de un crimen Un médico forense es llamado a la escena de un crimen. Él llega a las 6:00 P.M. y encuentra que la temperatura de la víctima es de 35°C. Una hora después, la temperatura del cadáver es de 34°C. La temperatura en la habitación es de 25°C. Aproximadamente, ¿a qué hora se cometió el crimen? (Suponga que la temperatura normal del cuerpo humano es de 37°C.)

40. Anualidad Encuentre el valor actual, al dólar más cercano, de una anualidad continua con tasa anual de 5% durante 10 años, si el pago en el tiempo t es a razón anual de $f(t) = 40t$ dólares.

[18]**41. Altas de hospital** Para un grupo de individuos hospitalizados, suponga que la proporción que ha sido dada de alta al término de t días está dada por

$$\int_0^t f(x)\ dx,$$

donde $f(x) = 0.008e^{-0.01x} + 0.00004e^{-0.0002x}$. Evalúe

$$\int_0^\infty f(x)\ dx.$$

[18]**42. Consumo de un producto** Suponga que $A(t)$ es la cantidad de un producto que se consume en el tiempo t y que A sigue una ley de crecimiento exponencial. Si $t_1 < t_2$, y en el tiempo t_2 la cantidad consumida $A(t_2)$ es el doble de la cantidad consumida en el tiempo t_1, $A(t_1)$, entonces $t_2 - t_1$, se llama periodo de duplicación. En un análisis de crecimiento exponencial, Shonle[19] establece que en condiciones de crecimiento exponencial, "la cantidad de un producto consumido durante un periodo de duplicación, es igual al total utilizado en todo el tiempo hasta el principio del periodo de duplicación en cuestión". Para justificar esta afirmación, reproduzca la argumentación de Shonle de la manera siguiente. La cantidad del producto consumido hasta el tiempo t_1 está dada por

$$\int_{-\infty}^{t_1} A_0e^{kt}\,dt, \quad k > 0,$$

donde A_0 es la cantidad cuando $t = 0$. Demuestre que esto es igual a $(A_0/k)\,e^{kt_1}$. Entonces, la cantidad consumida durante el intervalo de t_1 a t_2 es

$$\int_{t_1}^{t_2} A_0e^{kt}\,dt.$$

Demuestre que esto es igual a

$$\frac{A_0}{k}e^{kt_1}[e^{k(t_2-t_1)} - 1]. \quad \textbf{(1)}$$

Si el intervalo $[t_1, t_2]$ es un periodo de duplicación, entonces

$$A_0e^{kt_2} = 2A_0e^{kt_1}.$$

Demuestre que esta relación implica que $e^{k(t_2-t_1)} = 2$. Sustituya lo anterior en la ecuación (1); su resultado debe ser el mismo que el total consumido durante todo el tiempo hasta t_1, esto es $(A_0/k)e^{kt_1}$.

43. Ingreso, costo y utilidad La tabla siguiente da los valores de las funciones de ingreso marginal (IM) y de costo marginal (CM) de una empresa:

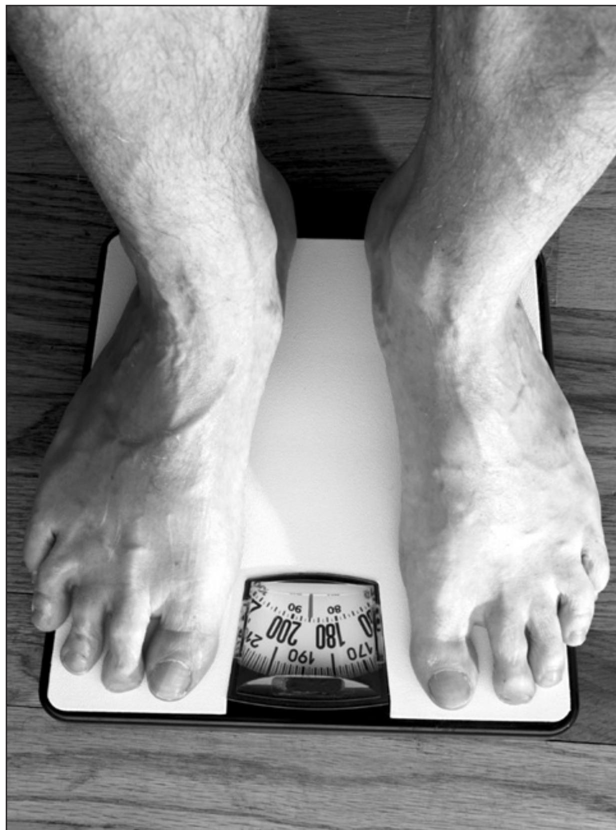
q	0	3	6	9	12	15	18
IM	25	22	18	13	7	3	0
CM	15	14	12	10	7	4	2

El costo fijo de la empresa es 25. Suponga que la utilidad es máxima cuando IM = CM y que esto ocurre cuando $q = 12$. Además, suponga que la producción de la empresa se escoge en forma tal que maximice la utilidad. Utilice la regla del trapecio y la regla de Simpson en cada una de las siguientes partes.

a. Estime el ingreso total usando tantos datos como sea posible.
b. Estime el costo total usando los menos datos posibles.
c. Determine cómo está relacionada la utilidad máxima con el área encerrada por la línea $q = 0$ y las curvas IM y CM; use esta relación para estimar la utilidad máxima tan exactamente como sea posible.

[18]Revise la sección 15.8.
[19]J. I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading, MA: Addison—Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

Aplicación práctica
Dietas



En la actualidad existe un gran interés sobre las dietas y la pérdida de peso. Algunas personas quieren perder peso para "verse bien". Otras por razones de salud o condición física. De hecho, algunas lo hacen por presión de las amistades. Con frecuencia aparecen anuncios publicitarios en televisión, periódicos y revistas sobre programas para control de peso. En muchas librerías, secciones enteras se dedican a las dietas y al control de peso.

Suponga que quiere determinar un modelo matemático para saber el peso de una persona sometida a una dieta baja en calorías.[20] El peso de una persona depende tanto de la tasa diaria de energía ingerida, digamos C calorías diarias, como de la tasa diaria de energía consumida, que típicamente tiene un valor de entre 15 y 20 calorías por día por cada libra de peso del cuerpo. El consumo depende de la edad, sexo, razón metabólica, etc. Para un valor promedio de 17.5 calorías por libra y por día, una persona que pese w libras consume $17.5w$ calorías por día. Si $C = 17.5w$, entonces su peso permanece constante; de otra manera, se tiene una ganancia o pérdida de peso según si C es mayor o menor que $17.5w$.

¿Qué tan rápido ocurrirá la ganancia o pérdida de peso? La hipótesis fisiológica más plausible es que dw/dt es proporcional al exceso neto (o déficit) $C - 15.5w$ en el número de calorías por día. Esto es,

$$\frac{dw}{dt} = K(C - 17.5w),$$

donde K es una constante. El miembro izquierdo de la ecuación tiene unidades de libras por día y $C - 17.5w$ tiene unidades de calorías por día. De aquí que las unidades de K son libras por caloría. Por tanto, se requiere conocer cuántas libras, por cada exceso o déficit de calorías, se agregan o quitan al peso. El factor de conversión dietético que generalmente se usa es que 3500 calorías equivalen a 1 libra. Así, $K = 1/3500$ libras por caloría.

Ahora, la ecuación diferencial que modela la ganancia o pérdida de peso es

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{3500}(C - 17.5w). \tag{1}$$

[20]Adaptado de A. C. Segal, "A. Linear Diet Model", *The College Mathematics Journal*, 18, núm. 1 (1987), 44-45. Con permiso de la Mathematical Association of America.

Si C es constante, la ecuación es separable y su solución es

$$w(t) = \frac{C}{17.5} + \left(w_0 - \frac{C}{17.5}\right)e^{-0.005t}, \tag{2}$$

donde w_0 es el peso inicial y t está en días. A la larga, note que el peso de equilibrio (esto es, el peso cuando $t \to \infty$) es $w_{\text{eq}} = C/17.5$.

Por ejemplo, si alguien que pese inicialmente 180 lb adopta una dieta de 2500 calorías por día, entonces $w_{eq} = 2500/17.5 \approx 143$ lb y la función del peso es

$$\begin{aligned} w(t) &\approx 143 + (180 - 143)e^{-0.005t} \\ &= 143 + 37e^{-0.005t}. \end{aligned}$$

La figura 15.9 muestra la gráfica de $w(t)$. Observe cuánto tiempo toma estar cerca del peso de equilibrio de 143 libras. La vida media para el proceso es $(\ln 2)/0.005 \approx 138.6$ días, alrededor de 20 semanas (tomaría casi 584 días, es decir, 83 semanas, para llegar a las 145 libras). Esto pudiera ser la causa por la que muchas personas abandonan frustradas la dieta.

Ejercicios

1. Si una persona que pesa 200 lb adopta una dieta de 2000 calorías por día, determine a la libra más cercana el peso de equilibrio w_{eq}. Al día más cercano, ¿después de cuántos días, esta persona tendrá un peso de 175 libras?

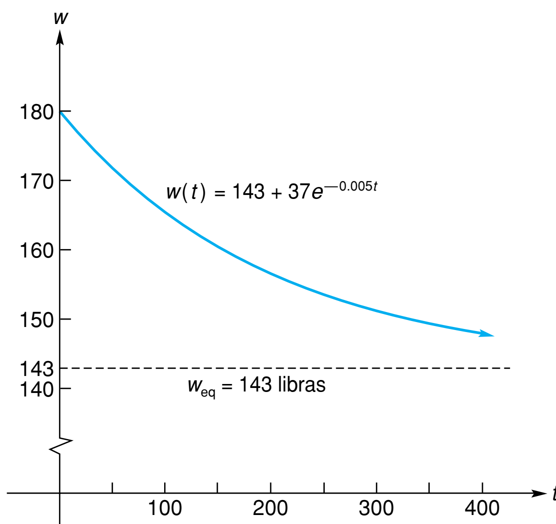


FIGURA 15.9 El peso como una función del tiempo.

2. Demuestre que la solución de la ecuación (1) está dada por la ecuación (2).

3. El peso de una persona sometida a una dieta restringida en calorías está dado, en el tiempo t, por $w(t)$. [Véase la ecuación (2).] La diferencia entre este peso y el peso de equilibrio w_{eq} es $w(t) - w_{eq}$. Suponga que se requieren d días para que la persona pierda la mitad de esta diferencia de peso. Entonces

$$w(t + d) = w(t) - \tfrac{1}{2}[w(t) - w_{\text{eq}}].$$

Despeje d de esta ecuación y demuestre que $d = \dfrac{\ln 2}{0.005}$.

4. Idealmente, la meta de la pérdida de peso debe establecerse en una consulta con un médico. Sin embargo, en general, un peso ideal está relacionado con la altura de uno por el índice de masa del cuerpo (IMC), que es igual al peso en kilogramos dividido entre la altura, en metros, al cuadrado. El rango óptimo de IMC es de 18.5 a 24.9.

   ¿Cuántas libras necesitaría perder una mujer de 5′6″ de altura y de 180 libras de peso, para estar en el rango ideal de IMC? (Sea cuidadoso con las unidades cuando calcule la respuesta.) Al día más cercano, ¿cuánto tardaría ella en perder este exceso de peso con una dieta de 2200 calorías por día?

   Mayor información sobre peso y dietas puede encontrarse en `www.consumer.gov/weightloss/setgoals.htm`.

5. ¿Cuáles son los pros y los contras de “romper” una dieta, la cuál tiene como base cambios drásticos en los hábitos alimenticios para lograr una pérdida de peso rápida?



CAPÍTULO 16

Cálculo de varias variables

Del capítulo 13, sabemos cómo maximizar la utilidad de una compañía, cuando tanto los ingresos como los costos están escritos como funciones de una sola cantidad, a saber, el número de unidades producidas. Pero, por supuesto, el nivel de producción en sí, está determinado por otros factores, y en general, ninguna variable sola puede representarlo.

Por ejemplo, la cantidad de petróleo que se bombea cada semana desde un campo petrolero depende del número de bombas y del número de horas que las bombas están funcionando. El número de bombas en el campo dependerá de la cantidad de capital disponible originalmente para construir las bombas, así como del tamaño y forma del campo. El número de horas que las bombas pueden ser operadas depende de la mano de obra disponible para hacer funcionar y dar mantenimiento a las bombas. Además, la cantidad de petróleo que se deseará bombear desde el campo petrolero dependerá de la demanda actual del petróleo, que está relacionada con el precio del petróleo.

La maximización de la utilidad semanal de un campo petrolero requerirá de un balance entre el número de bombas y la cantidad de tiempo que cada bomba pueda ser operada. La utilidad máxima no se alcanzará construyendo más bombas de las que puedan ser operadas ni poniendo a trabajar pocas bombas todo el tiempo.

Éste es un ejemplo del problema general de maximización de utilidades cuando la producción depende de varios factores. La solución incluye un análisis de la función de producción, que relaciona la producción con la asignación de recursos para la misma. En general, como son necesarias varias variable para describir la asignación de recursos, la asignación que da mayores utilidades no puede encontrarse por medio de la diferenciación con respecto a una sola variable, como en los capítulos anteriores. En este capítulo se estudiarán.

OBJETIVO Estudiar funciones de varias variables y calcular valores funcionales. Analizar coordenadas en tres dimensiones y hacer bosquejos de superficies simples.

16.1 Funciones de varias variables

Suponga que un fabricante hace dos productos, X y Y. Entonces, el costo total depende de los niveles de producción *tanto* de X *como* de Y. La tabla 16.1 muestra el costo total para diferentes niveles. Por ejemplo, cuando se producen 5 unidades de X y 6 de Y, el costo total c es 17. En esta situación parece natural asociar el número 17 con el *par ordenado* (5, 6):

$$(5, 6) \rightarrow 17.$$

TABLA 16.1

Número de unidades de X producidas, x	Número de unidades de Y producidas, y	Costo total de producción, c
5	6	17
5	7	19
6	6	18
6	7	20

El primer elemento del par ordenado, 5, representa el número de unidades de X producidas, mientras que el segundo elemento, 6, representa el número de unidades producidas de Y. Para las otras situaciones de producción tenemos

$$(5, 7) \rightarrow 19,$$

$$(6, 6) \rightarrow 18,$$

y

$$(6, 7) \rightarrow 20.$$

Esta correspondencia puede considerarse como una relación entrada-salida donde las entradas son los pares ordenados. Con cada entrada asociamos exactamente una salida. Así, la correspondencia define una función f en la que el dominio consiste en (5, 7), (5, 7), (6, 6), (6, 7) y el rango consiste en 17, 19, 18 y 20. En notación funcional,

$$f(5, 6) = 17, \quad f(5, 7) = 19,$$

$$f(6, 6) = 18, \quad f(6, 7) = 20.$$

Decimos que la lista de costo total puede describirse por $c = f(x, y)$, que es una función de las dos variables independientes x y y. La letra c es la variable dependiente.

Veamos otra función de dos variables. La ecuación

$$z = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

define a z como función de x y y:

$$z = f(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}.$$

El dominio de f es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x, y) para los cuales la ecuación tiene sentido, cuando el primero y segundo elementos de (x, y) se sustituyen por x y y, respectivamente, en la ecuación. Así, el dominio de f es el conjunto de todos los pares ordenados excepto (0, 0). Por ejemplo, para encontrar $f(2, 3)$, sustituimos $x = 2$ y $y = 3$ en la expresión $2/(x^2 + y^2)$. Obtenemos, $f(2, 3) = 2/(2^2 + 3^2) = 2/13$.

■ ***Principios en práctica 1***
Funciones de dos variables

El costo por día para la fabricación de tazas de 12 y 20 onzas para café, está dado por $c = 160 + 2x + 3y$, en donde x es el número de tazas de 12 onzas e y es el número de tazas de 20 onzas. ¿Cuál es el costo por día de la fabricación de

a. 500 tazas de 12 onzas y 700 tazas de 20 onzas?

b. 1000 tazas de 12 onzas y 750 tazas de 20 onzas?

EJEMPLO 1 Funciones de dos variables

a. $f(x, y) = \dfrac{x+3}{y-2}$ es una función de dos variables. Como el denominador es cero cuando $y = 2$, el dominio de f son todos los (x, y) tales que $y \neq 2$. Algunos valores de la función son

$$f(0,3) = \frac{0+3}{3-2} = 3,$$

$$f(3,0) = \frac{3+3}{0-2} = -3.$$

Note que $f(0,3) \neq f(3,0)$.

b. $h(x, y) = 4x$ define a h como función de x y y. El dominio son todos los pares ordenados de números reales. Algunos valores de la función son

$$h(2,5) = 4(2) = 8,$$

$$h(2,6) = 4(2) = 8.$$

Observe que los valores de la función son independientes del valor de y.

c. Si $z^2 = x^2 + y^2$ y $x = 3$ y $y = 4$, entonces $z^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. En consecuencia, $z = \pm 5$. Entonces, con el par ordenado $(3, 4)$ *no podemos* asociar exactamente un solo número de salida. Por tanto, z *no* es una función de x y y.

EJEMPLO 2 Índice temperatura-humedad

En días húmedos y cálidos, mucha gente tiende a sentirse incómoda. El grado de incomodidad está dado numéricamente por el índice temperatura-humedad, ITH, *que es una función de dos variables,* t_d y t_w:

$$\text{ITH} = f(t_d, t_w) = 15 + 0.4(t_d + t_w),$$

donde t_d, *es la temperatura de bulbo seco (en grados Fahrenheit)* y t_w *la temperatura de bulbo húmedo (en grados Fahrenheit) del aire. Evaluar el* ITH *cuando* $t_d = 90$ *y* $t_w = 80$.

Solución: queremos encontrar $f(90, 80)$:

$$f(90,80) = 15 + 0.4(90 + 80) = 15 + 68 = 83.$$

Cuando el ITH es mayor que 75, la mayoría de la gente se siente incómoda. De hecho, el ITH solía llamarse antes "índice de incomodidad". Muchos dispositivos eléctricos responden a este índice y pueden anticipar la demanda de aire acondicionado en sus sistemas.

Si $y = f(x)$ es una función de una variable, el dominio de f puede representarse de manera geométrica por puntos en la recta numérica. La función misma puede representarse por medio de su gráfica en un plano de coordenadas, algunas veces llamado un sistema de coordenadas de dos dimensiones. Sin embargo, para una función de dos variables, $z = f(x, y)$, el dominio (que consiste en parejas ordenadas de números reales) puede representarse de manera geométrica por medio de una *región* en el plano. La función misma puede representarse geométricamente en un **sistema coordenado rectangular *tri*dimensional.**

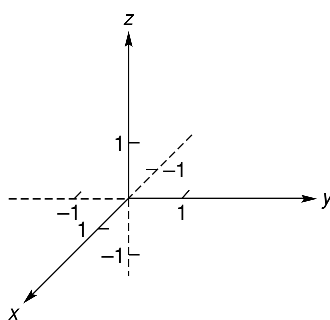


FIGURA 16.1 Sistema de coordenadas rectangulares de tres dimensiones.

Tal sistema se forma cuando tres ejes de números reales mutuamente perpendiculares en el espacio, se intersecan en el origen de cada eje como en la figura 16.1. Los tres ejes se llaman eje x, eje y y eje z y su punto de intersección recibe el nombre de origen del sistema. Las flechas indican las direcciones positivas de los ejes y las porciones negativas de los ejes se muestran con líneas punteadas.

A cada punto P en el espacio podemos asignar una terna ordenada única de números, llamada *coordenadas* de P. Para hacerlo [véase la fig. 16.2(a)], desde P construimos una perpendicular al plano x, y, esto es, al plano determinado por lo ejes x y y. Sea Q el punto donde la línea interseca a este plano. Desde Q trazamos líneas perpendiculares a los ejes x y y, las cuales intersecan a los ejes x y y en x_0 y y_0, respectivamente. Desde P trazamos una perpendicular al eje z que lo interseca en z_0. Así, hemos asignado a P la terna ordenada (x_0, y_0, z_0). Debe ser también evidente que a cada terna ordenada le podemos asignar un punto único en el espacio. Debido a esta correspondencia uno a uno entre puntos en el espacio y ternas ordenadas, una terna ordenada puede denominarse como punto. En la figura 16.2(b) se muestran los puntos $(2, 0, 0)$, $(2, 3, 0)$ y $(2, 3, 4)$. Note que el origen corresponde a $(0, 0, 0)$. Por lo general, las porciones negativas de los ejes no se muestran más que en caso necesario.

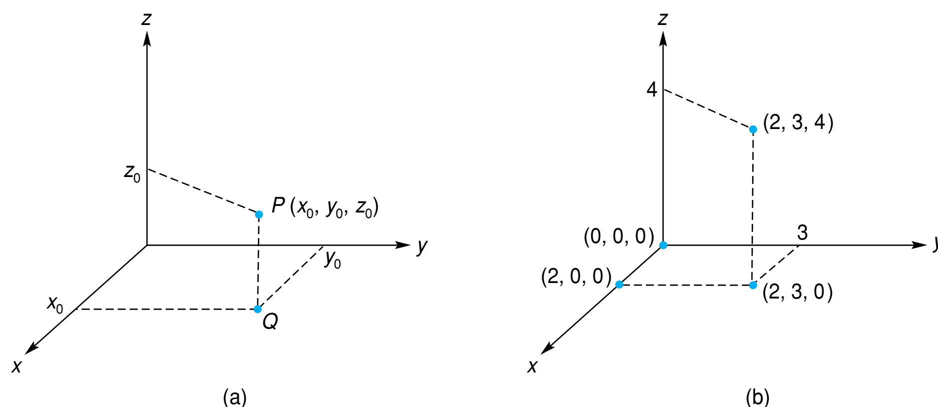


FIGURA 16.2 Puntos en el espacio.

Podemos representar geométricamente una función de dos variables, $z = f(x, y)$. A cada par ordenado (x, y) en el dominio de f, le asignamos el punto $(x, y, f(x, y))$. El conjunto de todos estos puntos se llama *gráfica* de f. Tal gráfica se muestra en la figura 16.3. Se puede considerar que $z = f(x, y)$ representa una superficie en el espacio.[1]

En el capítulo 9, estudiamos la continuidad de funciones de una variable. Si $y = f(x)$ es continua en $x = x_0$, entonces los puntos cercanos a x_0 tendrán sus valores funcionales cerca de $f(x_0)$. Al extender este concepto a una función de dos variables, decimos que la función $z = f(x, y)$ es continua en (x_0, y_0) cuando los puntos cercanos a (x_0, y_0) tienen sus valores funcionales cercanos a $f(x_0, y_0)$. Hablando en general y sin profundizar demasiado en este concepto, decimos que una función de dos variables es continua en su dominio (esto es, continua en cada punto de su dominio) si su gráfica es una "superficie ininterrumpida".

Hasta ahora sólo hemos considerado funciones de una o de dos variables. En general, una **función de *n* variables** es aquella cuyo dominio consiste en

[1]Usaremos libremente el término "superficie" en sentido intuitivo.

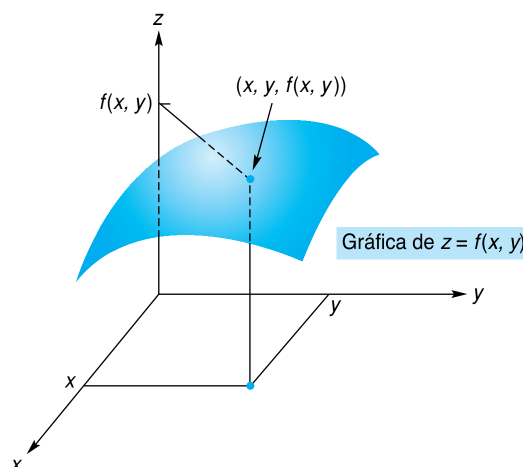


FIGURA 16.3 Gráfica de una función de dos variables.

n-adas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Por ejemplo, $f(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$ es una función de tres variables con un dominio que consiste en todas las ternas ordenadas. La función $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4$ es una función de cuatro variables con un dominio que consiste en todas las 4-adas ordenadas. Aunque las funciones de varias variables son sumamente importantes y útiles, no podemos representar geométricamente funciones de más de dos variables.

Daremos ahora una breve explicación de cómo esbozar superficies en el espacio. Comenzamos con planos que son paralelos a un plano coordenado. Con "plano coordenado" queremos decir un plano que contiene dos ejes coordenados. Por ejemplo, el plano determinado por los ejes x y y es el **plano *x, y*.** Similarmente, hablamos del **plano *x, z*** y del **plano *y, z*.** Los planos coordenados dividen el espacio en ocho parte llamadas *octantes*. En particular, la parte que contiene todos los puntos (x, y, z) donde x, y y z son positivos se llama **primer octante.**

A los restantes octantes no se les asignan nombres.

Supongamos que S es un plano paralelo al plano x, y y pasa por el punto $(0, 0, 5)$. [Véase la fig. 16.4(a).] Entonces, el punto (x, y, z) estará en S si y sólo si, $z = 5$; esto es, x y y pueden ser cualesquiera números reales, pero z debe ser igual a 5. Por esta razón decimos que $z = 5$ es una ecuación de S. En forma análoga, una ecuación del plano paralelo al plano x, z y que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ es $y = 2$ [véase la fig. 16.4(b)]. La ecuación $x = 3$ es una ecuación del plano que pasa por $(3, 0, 0)$ y es paralelo al plano y, z [véase la fig. 16.4(c)]. Veamos ahora los planos en general.

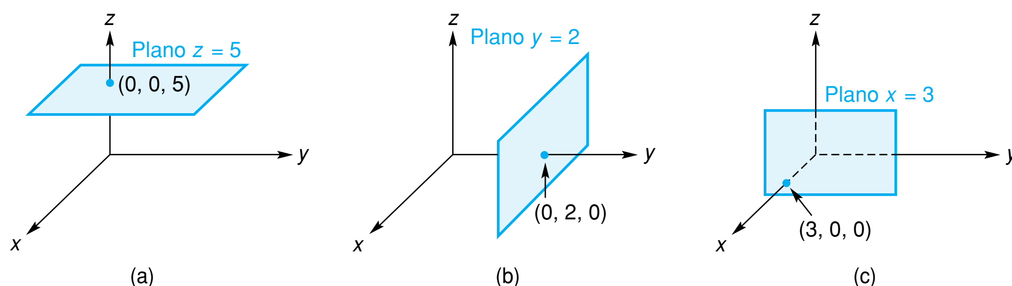


FIGURA 16.4 Planos paralelos a los planos coordenados.

En el espacio, la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

donde D es una constante y A, B y C son constantes sin que todas sean iguales a cero, es un plano. Como tres puntos distintos (no todos en la misma recta) determinan un plano, una manera conveniente de esbozar un plano es encontrar primero los puntos, en caso de que existan, en que el plano interseca los ejes x, y y z. Esos puntos se llaman *intersecciones*.

EJEMPLO 3 Graficación de un plano

Esbozar el plano $2x + 3y + z = 6$.

Solución: el plano interseca el eje x cuando $y = 0$ y $z = 0$, Así, $2x = 6$, lo que da $x = 3$. Similarmente, si $x = z = 0$, $y = 2$; si $x = y = 0$, $z = 6$. Las intersecciones son entonces $(3, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 6)$. Después de marcar estos puntos se pasa un plano por ellos. La porción del plano en el primer octante se muestra en la figura 16.5(a); sin embargo, debe quedar claro que el plano se extiende indefinidamente en el espacio.

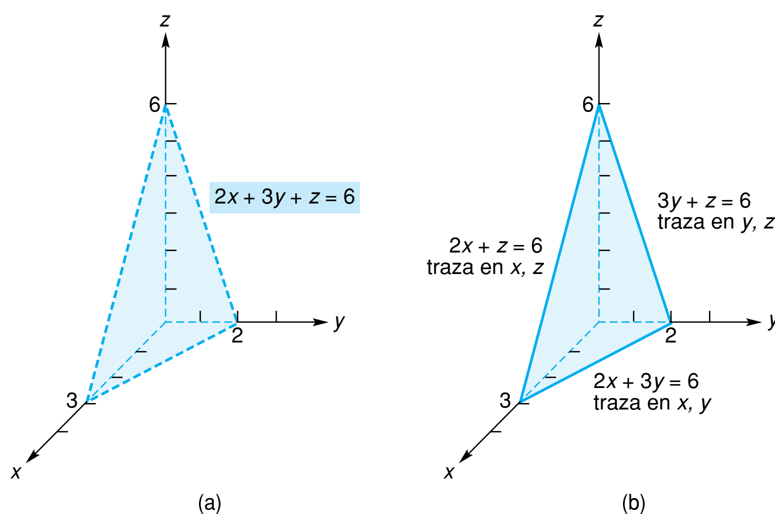


FIGURA 16.5 El plano $2x + 3y + z = 6$ y sus trazas.

Una superficie puede esbozarse con ayuda de sus **trazas.** Éstas son las intersecciones de la superficie con los planos coordenados. Como ilustración, para el plano $2x + 3y + z = 6$ del ejemplo 3, la traza en el plano x, y se obtiene haciendo $z = 0$. Esto da $2x + 3y = 6$, que es la ecuación de una *recta* en el plano x, y. En forma análoga, hacer $x = 0$ da la traza en el plano y, z: la recta $3y + z = 6$. La traza x, z es la recta $2x + z = 6$ [véase la fig. 16.5(b)].

Observe que esta ecuación no pone restricción sobre y.

EJEMPLO 4 Esbozo de una superficie

Esbozar la superficie $2x + z = 4$.

Solución: esta ecuación tiene la forma de un plano. Las intersecciones x y z son $(2, 0, 0)$ y $(0, 0, 4)$ y no hay intersección y, porque x y z no pueden ser ambas cero. Haciendo $y = 0$ obtenemos la traza x, z $2x + z = 4$, que es una recta en

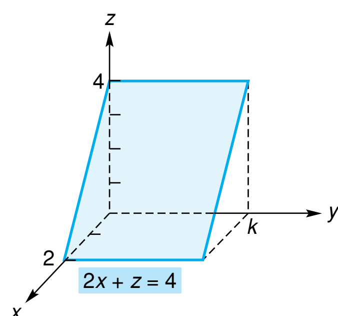


FIGURA 16.6 El plano $2x + z = 4$.

el plano x, z. De hecho, la intersección de la superficie con *cualquier* plano $y = k$ es también $2x + z = 4$. Por lo que, el plano es como el de la figura 16.6.

Nuestros ejemplos finales tratan con superficies que no son planas, pero cuyas gráficas pueden obtenerse con facilidad.

EJEMPLO 5 Esbozo de una superficie

Esbozar la superficie $z = x^2$.

Solución: la traza x, z es la curva $z = x^2$, que es una parábola. De hecho, para *cualquier* valor fijo de y obtenemos $z = x^2$. La gráfica es como la de la figura 16.7.

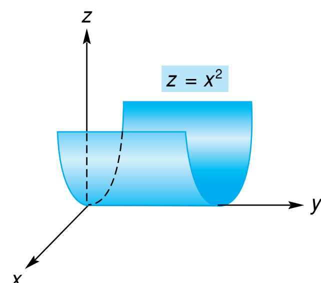


FIGURA 16.7 La superficie $z = x^2$.

EJEMPLO 6 Esbozo de una superficie

Esbozar la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Solución: haciendo $z = 0$ obtenemos la traza x, y, $x^2 + y^2 = 25$, lo cual es un círculo de radio 5. Similarmente, las trazas y, z y x, z, son los círculos $y^2 + z^2 = 25$ y $x^2 + z^2 = 25$, respectivamente. Note también que como $x^2 + y^2 = 25 - z^2$, la intersección de la superficie con el plano $z = k$, donde $-5 \leq k \leq 5$, es un círculo. Por ejemplo, si $z = 3$, la intersección es el círculo $x^2 + y^2 = 16$. Si $z = 4$, la intersección es $x^2 + y^2 = 9$. Esto es, las secciones transversales de la superficie que son paralelas al plano x, y son círculos. La superficie se muestra en la figura 16.8 en un esfera.

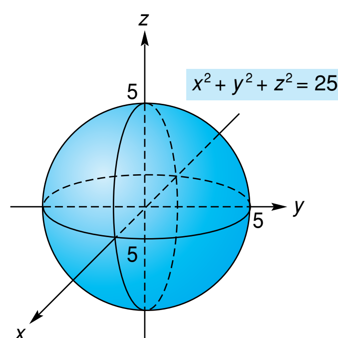


FIGURA 16.8 La superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Ejercicio 16.1

En los problemas del 1 al 12 determine los valores de las funciones dadas en los puntos indicados.

1. $f(x, y) = 4x - y^2 + 3$; $f(1, 2)$.

2. $f(x, y) = 3x^2y - 4y$; $f(2, -1)$.

3. $g(x, y, z) = e^x(2y + 3z)$; $g(0, -4, 2)$.

4. $g(x, y, z) = x^2y + xy^2 + yz^2$; $g(6, -1, 2)$.

5. $h(r, s, t, u) = \dfrac{rs}{t^2 - u^2}$; $h(-3, 3, 5, 4)$.

6. $h(r, s, t, u) = \ln(ru)$; $h(1, 5, 3, 1)$.

7. $g(p_A, p_B) = 2p_A(p_A^2 - 5)$; $g(4, 8)$.

8. $g(p_A, p_B) = p_A\sqrt{p_B} + 10$; $g(8, 4)$.

9. $F(x, y, z) = 3; \quad F(2, 0, -1)$.

10. $F(x, y, z) = \dfrac{x}{yz}, \quad F(0, 0, 3)$.

11. $f(x, y) = 2x - 5y + 4; \quad f(x_0 + h, y_0)$.

12. $f(x, y) = x^2y - 3y^3; \quad f(r + t, r)$.

---

13. Ecología Un método de muestreo ecológico para determinar las poblaciones de animales en un área dada, implica marcar primero todos los animales obtenidos en una muestra de R animales del área y luego soltarlos de manera que puedan mezclarse con animales no marcados. En fecha posterior se toma una segunda muestra de M animales y se anota el número de aquéllos que ya están marcados, S. Con base en R, M y S, una estimación de la población total N de animales en el área muestreada está dada por

$$N = f(R, M, S) = \frac{RM}{S}.$$

Encuentre $f(400, 400, 80)$. Este método se llama *procedimiento de marcaje y recaptura*.[2]

14. Genética Bajo ciertas condiciones, si dos padres de ojos cafés tienen exactamente k hijos, la probabilidad $P = P(r, k)$ de que haya exactamente entre ellos r de ojos azules está dada por

$$P(r, k) = \frac{k!(\frac{1}{4})^r(\frac{3}{4})^{k-r}}{r!(k - r)!}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

Encuentre la probabilidad de que en un total de 4 hijos, exactamente 3 tengan ojos azules.

En los problemas del 15 al 18 encuentre las ecuaciones de los planos que satisfacen las condiciones dadas.

15. Paralelo al plano x, z que pasa por el punto $(0, -4, 0)$.

16. Paralelo al plano y, z que pasa por el punto $(8, 0, 0)$.

17. Paralelo al plano x, y que pasa por el punto $(2, 7, 6)$.

18. Paralelo al plano y, z que pasa por el punto $(-4, -2, 7)$.

En los problemas del 19 al 28 esboce las superficies dadas.

19. $x + y + z = 1$.

20. $2x + y + 2z = 6$.

21. $3x + 6y + 2z = 12$.

22. $x + 2y + 3z = 4$.

23. $x + 2y = 2$.

24. $y + z = 1$.

25. $z = 4 - x^2$.

26. $y = x^2$.

27. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

28. $x^2 + y^2 = 1$.

[2]E. P. Odum, *Ecology* (Nueva York: Holt, Rinehart y Winston, 1966).

OBJETIVO Calcular derivadas parciales.

16.2 DERIVADAS PARCIALES

La figura 16.9 muestra la superficie $z = f(x, y)$ y un plano paralelo al plano x, z que pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ sobre la superficie. Una ecuación de este plano es $y = y_0$. Por tanto, cualquier punto en la curva que sea la intersección de la superficie con el plano debe tener la forma $(x, y_0, f(x, y_0))$. Así, la curva puede ser descrita por $z = f(x, y_0)$. Como y_0 es constante, $z = f(x, y_0)$ puede considerarse como una función de una variable, x. Cuando se evalúa la derivada de esta función en x_0, se obtiene la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. (Véase la fig. 16.9.) Esta pendiente se llama *derivada parcial de f con respecto a x* en (x_0, y_0) y se denota con $f_x(x_0, y_0)$. En términos de límites,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}. \quad (1)$$

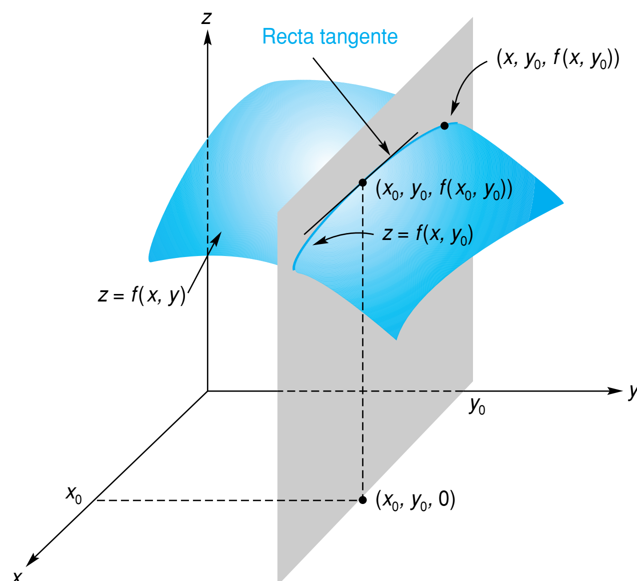


FIGURA 16.9 Interpretación geométrica de $f_x(x_0, y_0)$.

Por otra parte, en la figura 16.10 el plano $x = x_0$ es paralelo al plano y, z y corta la superficie $z = f(x, y)$ en una curva dada por $z = f(x_0, y)$, que es una función de y. Cuando se evalúa la derivada de esta función en y_0, se obtiene la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Esta pendiente se llama *derivada parcial de f con respecto a y* en (x_0, y_0) y se denota con $f_y(x_0, y_0)$. En términos de límites.

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}. \tag{2}$$

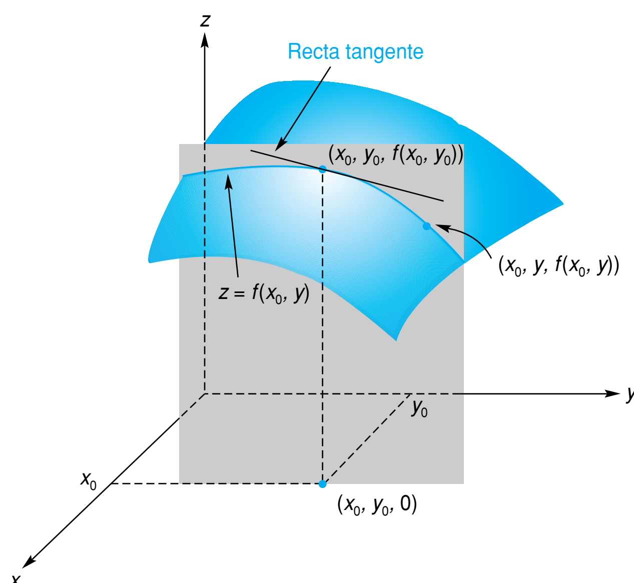


FIGURA 16.10 Interpretación geométrica de $f_y(x_0, y_0)$.

Esto nos da una interpretación geométrica de una derivada parcial.

Decimos que $f_x(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *en la dirección x;* similarmente, $f_y(x_0, y_0)$ es la pendiente de la recta tangente *en la dirección y*.

En general, al reemplazar x_0 y y_0 en las ecuaciones (1) y (2) por x y y, respectivamente, obtenemos la siguiente definición.

Definición

Si $z = f(x, y)$ la ***derivada parcial de f con respecto a x,*** denotada *como* f_x, es la función dada por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$

en caso de que este límite exista.

La ***derivada parcial de f con respecto a y,*** denotada *como* f_y, es la función dada por

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h},$$

en caso de que este límite exista.

Al analizar la definición anterior, podemos establecer el siguiente procedimiento para determinar f_x y f_y:

Esto nos da una manera mecánica de determinar derivadas parciales.

Procedimiento para encontrar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$

Para encontrar f_x, trate a y como constante y diferencie f con respecto a x de la manera usual.
Para encontrar f_y, trate a x como constante y diferencie f con respecto a y de la manera usual.

EJEMPLO 1 Obtención de derivadas parciales

Si $f(x, y) = xy^2 + x^2y$, *encontrar* $f_x(x, y)$ *y* $f_y(x, y)$. *Encontrar también,* $f_x(3, 4)$ *y* $f_y(3, 4)$.

Solución: para encontrar $f_x(x, y)$, tratamos a y como una constante y diferenciamos a f con respecto a x:

$$f_x(x, y) = (1)y^2 + (2x)y = y^2 + 2xy.$$

Para encontrar $f_y(x, y)$, tratamos a x como constante y diferenciamos con respecto a y:

$$f_y(x, y) = x(2y) + x^2(1) = 2xy + x^2.$$

Note que $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son cada una funciones de las dos variables x y y. Para encontrar $f_x(3, 4)$, evaluamos $f_x(x, y)$ cuando $x = 3$ y $y = 4$:

$$f_x(3, 4) = 4^2 + 2(3)(4) = 40.$$

De manera similar,

$$f_y(3, 4) = 2(3)(4) + 3^2 = 33.$$

En la tabla 16.2 se dan las notaciones para las derivadas parciales de $z = f(x, y)$. La tabla 16.3 da las notaciones para las derivadas parciales evaluadas en (x_0, y_0). Note que el símbolo ∂ (no d) se usa para denotar una derivada parcial. El símbolo $\partial z/\partial x$ se lee “derivada parcial de z con respecto a x”.

TABLA 16.2

Derivada parcial de f (o z) con respecto a x	Derivada parcial de f (o z) con respecto a y
$f_x(x, y)$	$f_y(x, y)$
$\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y)]$	$\frac{\partial}{\partial y}[f(x, y)]$
$\frac{\partial z}{\partial x}$	$\frac{\partial z}{\partial y}$

TABLA 16.3

Derivada parcial de f (o z) con respecto a x evaluada en (x_0, y_0)	Derivada parcial de f (o z) con respecto a y evaluada en (x_0, y_0)
$f_x(x_0, y_0)$	$f_y(x_0, y_0)$
$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{(x_0, y_0)}$	$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_{(x_0, y_0)}$
$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$	$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$

EJEMPLO 2 Obtención de derivadas parciales

a. Si $z = 3x^3y^3 - 9x^2y + xy^2 + 4y$, *encontrar* $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$ y $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}$.

Solución: para encontrar $\partial z/\partial x$, diferenciamos z con respecto a x manteniendo a y constante:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 3(3x^2)y^3 - 9(2x)y + (1)y^2 + 0 \\ &= 9x^2y^3 - 18xy + y^2.\end{aligned}$$

Al evaluar en $(1, 0)$ obtenemos

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = 9(1)^2(0)^3 - 18(1)(0) + 0^2 = 0.$$

Para encontrar $\partial z/\partial y$, diferenciamos z con respecto a y manteniendo a x constante:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= 3x^3(3y^2) - 9x^2(1) + x(2y) + 4(1) \\ &= 9x^3y^2 - 9x^2 + 2xy + 4.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = 9(1)^3(0)^2 - 9(1)^2 + 2(1)(0) + 4 = -5.$$

b. Si $w = x^2e^{2x+3y}$, *encontrar* $\partial w/\partial x$ y $\partial w/\partial y$.

Solución: para encontrar $\partial w/\partial x$, tratamos a y como constante y diferenciamos con respecto a x. Como x^2e^{2x+3y} es un producto de dos funciones que cada una incluye a x, usamos la regla del producto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= x^2\frac{\partial}{\partial x}(e^{2x+3y}) + e^{2x+3y}\frac{\partial}{\partial x}(x^2) \\ &= x^2(2e^{2x+3y}) + e^{2x+3y}(2x) \\ &= 2x(x+1)e^{2x+3y}.\end{aligned}$$

Para encontrar $\partial w/\partial y$, tratamos a x como constante y diferenciamos con respecto a y:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^2\frac{\partial}{\partial y}(e^{2x+3y}) = 3x^2e^{2x+3y}.$$

Hemos visto que para una función de dos variables pueden considerarse dos derivadas parciales. En realidad, el concepto de derivadas parciales puede extenderse a funciones de más de dos variables. Por ejemplo, con $w = f(x, y, z)$ tenemos tres derivadas parciales:

la parcial con respecto a x, denotada como $f_x(x, y, z)$, $\partial w/\partial x$, etc.;

la parcial con respecto a y, denotada como $f_y(x, y, z)$, $\partial w/\partial y$, etc.;

y

la parcial con respecto a z, denotada como $f_z(x, y, z)$, $\partial w/\partial z$, etc.

Para determinar $\partial w/\partial x$, tratamos a y y a z como constantes y diferenciamos w con respecto a x. Para determinar $\partial w/\partial y$, tratamos a x y a z como constantes y diferenciamos con respecto a y. Para determinar $\partial w/\partial z$, tratamos a x y a y como constantes y diferenciamos con respecto a z. Con una función de n variables, tenemos n derivadas parciales que se determinan de manera obvia.

EJEMPLO 3 Derivadas parciales de una función de tres variables

Si $f(x, y, z) = x^2 + y^2z + z^3$, encontrar $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ y $f_z(x, y, z)$.

Solución: para encontrar $f_x(x, y, z)$ tratamos a y y a z como constantes y diferenciamos f con respecto a x:

$$f_x(x, y, z) = 2x.$$

Tratando a x y a z como constantes y diferenciando con respecto a y, tenemos

$$f_y(x, y, z) = 2yz.$$

Tratando a x y a y como constantes y diferenciando con respecto a z, tenemos

$$f_z(x, y, z) = y^2 + 3z^2.$$

EJEMPLO 4 Derivadas parciales de una función de cuatro variables

Si $p = g(r, s, t, u) = \dfrac{rsu}{rt^2 + s^2t}$, encontrar $\dfrac{\partial p}{\partial s}$, $\dfrac{\partial p}{\partial t}$ y $\left.\dfrac{\partial p}{\partial t}\right|_{(0,1,1,1)}$.

Solución: para encontrar $\partial p/\partial s$, note primero que p es un cociente de dos funciones y que cada una incluye a la variable s. Por tanto, usamos la regla del cociente y tratamos de r, t y u como constantes:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{(rt^2 + s^2t)\dfrac{\partial}{\partial s}(rsu) - rsu\dfrac{\partial}{\partial s}(rt^2 + s^2t)}{(rt^2 + s^2t)^2}$$

$$= \frac{(rt^2 + s^2t)(ru) - (rsu)(2st)}{(rt^2 + s^2t)^2}.$$

Al simplificar se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{ru(rt - s^2)}{t(rt + s^2)^2} \qquad \text{(un factor } t \text{ se cancela).}$$

Para encontrar $\partial p/\partial t$, podemos escribir primero a p como

$$p = rsu(rt^2 + s^2t)^{-1}.$$

A continuación, usamos la regla de la potencia y tratamos a r, s y u como constantes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &= rsu(-1)(rt^2 + s^2t)^{-2}\frac{\partial}{\partial t}(rt^2 + s^2t)\\ &= -rsu(rt^2 + s^2t)^{-2}(2rt + s^2),\end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{rsu(2rt + s^2)}{(rt^2 + s^2t)^2}.$$

Al hacer $r = 0$, $s = 1$, $t = 1$ y $u = 1$ resulta

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{(0,1,1,1)} = -\frac{0(1)(1)[2(0)(1) + (1)^2]}{[0(1)^2 + (1)^2(1)]^2} = 0.$$

Ejercicio 16.2

En cada uno de los problemas del 1 al 26, se da una función de dos o más variables. Encuentre la derivada parcial de la función con respecto a cada una de las variables.

1. $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 7.$

2. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy.$

3. $f(x, y) = 2y + 1.$

4. $f(x, y) = e.$

5. $g(x, y) = x^3y^2 + 2x^2y - 4xy + 3y.$

6. $g(x, y) = (x + 1)^2 + (y - 3)^3 + 5xy^3 - 2.$

7. $g(p, q) = \sqrt{pq}.$

8. $g(w, z) = \sqrt[3]{w^2 + z^2}.$

9. $h(s, t) = \dfrac{s^2 + 4}{t - 3}.$

10. $h(u, v) = \dfrac{8uv^2}{u^2 + v^2}.$

11. $u(q_1, q_2) = \frac{3}{4}\ln q_1 + \frac{1}{4}\ln q_2.$

12. $Q(l, k) = 3l^{0.41}k^{0.59}.$

13. $h(x, y) = \dfrac{x^2 + 3xy + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

14. $h(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + 9}}{x^2y + y^2x}.$

15. $z = e^{5xy}.$

16. $z = (x^2 + y)e^{3x+4y}.$

17. $z = 5x\ln(x^2 + y).$

18. $z = \ln(3x^2 + 4y^4).$

19. $f(r, s) = \sqrt{r + 2s}\,(r^3 - 2rs + s^2).$

20. $f(r, s) = \sqrt{rs}\,e^{2+r}.$

21. $f(r, s) = e^{3-r}\ln(7 - s).$

22. $f(r, s) = (5r^2 + 3s^3)(2r - 5s).$

23. $g(x, y, z) = 3x^2y + 2xy^2z + 3z^3.$

24. $g(x, y, z) = x^2y^3z^5 - 3x^2y^4z^3 + 5xz.$

25. $g(r, s, t) = e^{s+t}(r^2 + 7s^3).$

26. $g(r, s, t, u) = rs\ln(2t + 5u).$

En los problemas del 27 al 34 evalúe las derivadas parciales dadas.

27. $f(x, y) = x^3y + 7x^2y^2$; $f_x(1, -2)$.

28. $z = \sqrt{5x^2 + 3xy + 2y}$; $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}$.

29. $g(x, y, z) = e^x\sqrt{y + 2z}$; $g_z(0, 6, 4)$.

30. $g(x, y, z) = \dfrac{3x^2 + 2y}{xy + xz}$, $g_y(1, 1, 5)$.

31. $h(r, s, t, u) = (s^2 + tu)\ln(2r + 7st)$; $h_s(1, 0, 0, 1)$.

32. $h(r, s, t, u) = \dfrac{7r + 3s^2u^2}{s}$; $h_t(4, 3, 2, 1)$.

33. $f(r, s, t) = rst(r^2 + s^3 + t^4)$; $f_s(1, -1, 2)$.

34. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{\ln x}$; $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=e,\\y=0}}$ $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=e.\\y=0}}$

---

35. Si $z = xe^{x-y} - ye^{y-x}$, demuestre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x-y} - e^{y-x}.$$

36. Precio de acciones de un ciclo de dividendos En un análisis de los precios de un ciclo de dividendos, Palmon y Yaari[3] consideran la función *f* dada por

$$u = f(t, r, z) = \frac{(1 + r)^{1-z}\ln(1 + r)}{(1 + r)^{1-z} - t},$$

donde u es la tasa instantánea de la apreciación del precio solicitado, r es una tasa de rendimiento anual de oportunidad, z la fracción de un ciclo de dividendos sobre el cual una porción de las acciones es controlada por un vendedor de medio ciclo y t es la tasa efectiva del impuesto por ganancias de capital. Ellos afirman que

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{t(1 + r)^{1-z}\ln^2(1 + r)}{[(1 + r)^{1-z} - t]^2}.$$

Verifíquelo.

37. Demanda de dinero En un análisis de la teoría de inventarios sobre la demanda de dinero, Swanson[4] considera la función

$$F(b, C, T, i) = \frac{bT}{C} + \frac{iC}{2}$$

y determina que $\dfrac{\partial F}{\partial C} = -\dfrac{bT}{C^2} + \dfrac{i}{2}$. Verifique esta derivada parcial.

38. Desregulación de la tasa de interés En un artículo sobre desregulación de la tasa de interés, Christofi y Agapos[5] obtienen la ecuación

$$r_L = r + D\frac{\partial r}{\partial D} + \frac{dC}{dD}, \tag{3}$$

donde r es la tasa de interés por depósitos pagados por los bancos comerciales, r_L es la tasa de interés ganado por esos bancos, C es el costo administrativo por transformar los depósitos en activos productivos y D el nivel de los depósitos por ahorros. Christofi y Agapos establecen que

$$r_L = r\left[\frac{1 + \eta}{\eta}\right] + \frac{dC}{dD}, \tag{4}$$

donde $\eta = \dfrac{r/D}{\partial r/\partial D}$ es la elasticidad del depósito con respecto al interés del depósito. Exprese la ecuación (3) en términos de η para verificar la ecuación (4).

39. Publicidad y ganancia En un análisis sobre publicidad y utilidades, Swales[6] considera una función *f* dada por

$$R = f(r, a, n) = \frac{r}{1 + a\left(\dfrac{n - 1}{2}\right)},$$

donde R es la tasa ajustada de utilidad, r la tasa contable de utilidad, a es una medida de los gastos publicitarios y n el número de años en que la publicidad se deprecia por completo. En su análisis, Swales determina $\partial R/\partial n$. Encuentre esta derivada parcial.

---

[3]D. Palmon y U. Yaari, "Taxation of Capital Gains and the Behavior of Stock Prices over the Dividend Cycle", *The American Economist*, XXVII, núm. 1 (1983), 13-22.

[4]P. E. Swanson, "Integer Constraints on the Inventory Theory of Money Demand", *Quarterly Journal of Business and Economics*, 23, núm. 1(1984), 32-37.

[5]A. Christofi y A. Agapos, "Interest Rate Deregulation: An Empirical Justification", *Review of Business and Economic Research*, XX (1984), 39-49.

[6]J. K. Swales, "Advertising as an Intangible Asset: Profitability and Entry Barriers: A Comment on Reekie and Bhoyrub", *Aplied Economics*, 17, núm. 4 (1985), 603-617.

OBJETIVO Desarrollar las nociones de costo marginal parcial, productividad marginal y productos competitivos y complementarios.

16.3 Aplicaciones de las derivadas parciales

De la sección 16.2 sabemos que si $z = f(x, y)$, entonces $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ pueden interpretarse geométricamente como las pendientes de las rectas tangentes a la superficie $z = f(x, y)$ en las direcciones x y y, respectivamente. Existen otras interpretaciones. Como $\partial z/\partial x$ es la derivada de z con respecto a x cuando y permanece constante, y como una derivada es una razón de cambio, tenemos

Aquí tenemos la interpretación de "tasa de cambio" de las derivadas parciales.

> $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ es la razón de cambio de z con respecto a x cuando y se mantiene constante.

De modo similar,

> $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ es la razón de cambio de z con respecto a y cuando x se mantiene constante.

Veremos ahora algunas aplicaciones en las que la noción "razón de cambio" de una derivada parcial resulta muy útil.

Supongamos que un fabricante produce x unidades del producto X y y unidades del producto Y. Entonces, el costo total c de esas unidades es una función de x y y; a esto se le llama **función de costos conjuntos.** Si una función de este tipo es $c = f(x, y)$, entonces $\partial c/\partial x$ se llama **costo marginal (parcial) con respecto a x,** y es la razón de cambio de c con respecto a x cuando y se mantiene fija. Similarmente, $\partial c/\partial y$ es el **costo marginal (parcial) con respecto a y,** y es la razón de cambio de c con respecto a y cuando x se mantiene fija.

Por ejemplo, si c se expresa en dólares y $\partial c/\partial y = 2$, entonces el costo de producir una unidad adicional de Y cuando el nivel de producción de X es fijo, es de aproximadamente 2 dólares.

Si un fabricante produce n artículos, la función de costos conjuntos es una función de n variables y habrá n funciones de costo marginal (parcial).

EJEMPLO 1 Costos marginales

Una empresa fabrica dos tipos de esquíes, los modelos Ligero y Alpino. Supóngase que la función de costos conjuntos de producir x pares del modelo Ligero y y pares del modelo Alpino por semana es

$$c = f(x, y) = 0.07x^2 + 75x + 85y + 6000,$$

donde c está expresado en dólares. Determinar los costos marginales $\partial c/\partial x$ y $\partial c/\partial y$ cuando $x = 100$ y $y = 50$, e interpretar los resultados.

Solución: los costos marginales son

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0.14x + 75 \quad \text{y} \quad \frac{\partial c}{\partial y} = 85.$$

Así,

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{(100,\,50)} = 0.14(100) + 75 = 89 \qquad (1)$$

y

$$\left.\frac{\partial c}{\partial y}\right|_{(100,\,50)} = 85. \tag{2}$$

La ecuación (1) implica que al aumentar la producción del modelo Ligero de 100 a 101, mientras se mantiene en 50 la producción del Alpino, aumentan los costos aproximadamente en \$89. La ecuación (2) implica que al aumentar la producción del modelo Alpino de 50 a 51 mientras se mantiene en 100 la producción del Ligero, aumentan los costos aproximadamente en \$85. De hecho, como $\partial c/\partial y$ es una función constante, el costo marginal con respecto a y es de \$85 en todos los niveles de producción.

EJEMPLO 2 Pérdida de calor en el cuerpo humano

En un día frío, una persona puede sentir más frío cuando hay viento que cuando no lo hay, porque la razón de pérdida de calor es una función de la temperatura y de la velocidad del viento. La ecuación

$$H = (10.45 + 10\sqrt{w} - w)(33 - t)$$

indica la razón de pérdida de calor H (en kilocalorías por metro cuadrado por hora) cuando la temperatura del aire es t (en grados Celsius) y la velocidad del viento w (en metros por segundo). Para $H = 2000$, *la piel expuesta se congelará en un minuto.*[7]

a. *Evaluar H cuando* $t = 0$ *y* $w = 4$.

Solución: cuando $t = 0$ y $w = 4$, entonces

$$H = (10.45 + 10\sqrt{4} - 4)(33 - 0) = 872.85.$$

b. *Evaluar* $\partial H/\partial w$ *y* $\partial H/\partial t$ *cuando* $t = 0$ y $w = 4$ *e interpretar los resultados.*

Solución:

$$\frac{\partial H}{\partial w} = \left(\frac{5}{\sqrt{w}} - 1\right)(33 - t), \quad \left.\frac{\partial H}{\partial w}\right|_{\substack{t=0\\w=4}} = 49.5;$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = (10.45 + 10\sqrt{w} - w)(-1), \quad \left.\frac{\partial H}{\partial t}\right|_{\substack{t=0\\w=4}} = -26.45.$$

Estas ecuaciones significan que cuando $t = 0$ y $w = 4$, al incrementar w por una pequeña cantidad mientras se mantiene fijo t, H aumentará alrededor de 49.5 veces lo que aumente w. Al incrementar t por una pequeña cantidad mientras se mantiene fijo w, H *disminuirá* alrededor de 26.45 veces lo que aumente t.

c. *Cuando* $t = 0$ y $w = 4$, *¿qué tiene más influencia en H: un cambio en la velocidad del viento de* 1 m/s *o un cambio en la temperatura de* 1°C?

Solución: como la derivada parcial de H con respecto a w es mayor en magnitud que la parcial con respecto a t cuando $t = 0$ y $w = 4$, un cambio en la velocidad del viento de 1 m/s tendrá más influencia sobre H.

[7] G. E. Folk, Jr., *Textbook of Environmental Physiology*, segunda edición (Filadelfia: Lea & Febiger, 1974).

La elaboración de un producto depende de muchos factores en la producción. Entre éstos se encuentran la mano de obra de trabajo, el capital, el terreno, la maquinaria, etc. Por simplicidad, supongamos que la producción sólo depende del trabajo y del capital. Si la función $P = f(l, k)$ da la producción P cuando el productor emplea l unidades de trabajo y k unidades de capital, entonces esta función se llama **función de producción.** Definimos la **productividad marginal con respecto a l** como $\partial P/\partial l$. Ésta es la razón de cambio de P con respecto a l cuando k se mantiene fija. Igualmente, la **productividad marginal con respecto a k** es $\partial P/\partial k$. Ésta es la razón de cambio de P con respecto a k cuando l se mantiene fija.

EJEMPLO 3 Productividad marginal

Un fabricante de un juguete popular ha determinado que su función de producción es $P = \sqrt{lk}$, donde *l es el número de horas de trabajo por semana y k el capital (expresado en cientos de dólares por semana) requerido para la producción semanal de P gruesas del juguete (una gruesa son 144 unidades). Determinar las funciones de productividad marginal y evaluarlas cuando $l = 400$ y $k = 16$. Interpretar los resultados.*

Solución: como $P = (lk)^{1/2}$,

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \frac{1}{2}(lk)^{-1/2}\,k = \frac{k}{2\sqrt{lk}}$$

y

$$\frac{\partial P}{\partial k} = \frac{1}{2}(lk)^{-1/2}l = \frac{l}{2\sqrt{lk}}.$$

Si evaluamos estas ecuaciones cuando $l = 400$ y $k = 16$, obtenemos

$$\left.\frac{\partial P}{\partial l}\right|_{\substack{l=400\\k=16}} = \frac{16}{2\sqrt{400(16)}} = \frac{1}{10}$$

y

$$\left.\frac{\partial P}{\partial k}\right|_{\substack{l=400\\k=16}} = \frac{400}{2\sqrt{400(16)}} = \frac{5}{2}.$$

Así, si $l = 400$ y $k = 16$, al incrementar l a 401 y mantener k en 16, aumentará la producción en aproximadamente $\frac{1}{10}$ de gruesa. Pero si k se incrementa a 17 y se mantiene l en 400, la producción aumenta en alrededor de $\frac{5}{2}$ gruesas.

Productos competitivos y complementarios

Algunas veces dos productos pueden estar relacionados de modo que cambios en el precio de uno afecten la demanda del otro. Un ejemplo representativo es el caso de la mantequilla y la margarina. Si tal relación existe entre los productos A y B, la demanda de cada producto depende del precio de ambos. Suponga que q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y B, respectivamente, y que p_A y p_B son sus respectivos precios. Entonces q_A y q_B son funciones de p_A y p_B:

$$q_{\mathrm{A}} = f(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}}), \quad \text{función de demanda para A;}$$

$$q_{\mathrm{B}} = g(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}}), \quad \text{función de demanda para B.}$$

Podemos encontrar cuatro derivadas parciales:

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_A},\ \textit{la demanda marginal para } \mathrm{A} \textit{ con respecto a } p_A;$$

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B},\ \textit{la demanda marginal para } \mathrm{A} \textit{ con respecto a } p_B;$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_A},\ \textit{la demanda marginal para } \mathrm{B} \textit{ con respecto a } p_A;$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_B},\ \textit{la demanda marginal para } \mathrm{B} \textit{ con respecto a } p_B.$$

En condiciones comunes, si el precio de B está fijo y el de A aumenta, la cantidad demandada de A disminuirá. Así, $\partial q_A/\partial p_A < 0$. Similarmente, $\partial q_B/\partial p_B < 0$. Sin embargo, $\partial q_A/\partial p_B$ y $\partial q_B/\partial p_A$ pueden ser positivas o negativas. Si

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} > 0,$$

entonces se dice que A y B son **productos competitivos** o **sustitutos.** En esta situación, un incremento en el precio de B ocasiona un incremento en la demanda de A, si se supone que el precio de A no cambia. Similarmente, un incremento en el precio de A ocasiona un incremento en la demanda de B cuando el precio de B se mantiene fijo. La mantequilla y la margarina son ejemplos de sustitutos.

Consideremos una situación diferente, decimos que si

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} < 0,$$

entonces A y B son **productos complementarios.** En este caso, un incremento en el precio de B causa una disminución en la demanda de A, si el precio de A no cambia. Similarmente, un incremento en el precio de A causa una disminución en la demanda de B, cuando el precio de B se mantiene fijo. Por ejemplo, las cámaras y las películas fotográficas son productos complementarios. Un incremento en el precio de la película hará más cara la toma de fotografías. Por tanto, la demanda de cámaras disminuirá.

EJEMPLO 4 Determinación si los productos son competitivos o complementarios

Las funciones de demanda para los productos A y B *son cada una función de los precios de* A *y* B *y están dadas por*

$$q_A = \frac{50\sqrt[3]{p_B}}{\sqrt{p_A}} \quad y \quad q_B = \frac{75p_A}{\sqrt[3]{p_B^2}},$$

respectivamente. Encontrar las cuatro funciones de demanda marginal y determinar también si A *y* B *son productos competitivos, productos complementarios o ni uno ni otro.*

Solución: si hacemos $q_A = 50p_A^{-1/2}p_B^{1/3}$ y $q_B = 75p_Ap_B^{-2/3}$, tenemos

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_A} = 50\left(-\frac{1}{2}\right)p_A^{-3/2}p_B^{1/3} = -25p_A^{-3/2}p_B^{1/3},$$

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = 50p_A^{-1/2}\left(\frac{1}{3}\right)p_B^{-2/3} = \frac{50}{3}p_A^{-1/2}p_B^{-2/3},$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_A} = 75(1)p_B^{-2/3} = 75p_B^{-2/3},$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_B} = 75p_A\left(-\frac{2}{3}\right)p_B^{-5/3} = -50p_Ap_B^{-5/3}.$$

Como p_A y p_B representan precios, ambas son positivas. Por tanto, $\partial q_A/\partial p_B > 0$ y $\partial q_B/\partial p_A > 0$. Concluimos que A y B son productos competitivos.

Ejercicio 16.3

Para las funciones de costos conjuntos en los problemas del 1 al 3, encuentre el costo marginal indicado al nivel de producción dado.

1. $c = 7x + 0.3y^2 + 2y + 900;\quad \dfrac{\partial c}{\partial y}, x = 20, y = 30.$

2. $c = x\sqrt{x + y} + 5000;\quad \dfrac{\partial c}{\partial x}, x = 40, y = 60.$

3. $c = 0.03(x + y)^3 - 0.6(x + y)^2 + 9.5(x + y) + 7700;\quad \dfrac{\partial c}{\partial x}, x = 50, y = 80.$

Para las funciones de producción en los problemas 4 y 5, encuentre las funciones de producción marginal $\partial P/\partial k$ y $\partial P/\partial l$.

4. $P = 20lk - 2l^2 - 4k^2 + 800.$

5. $P = 1.582l^{0.192}k^{0.764}.$

6. Función de producción Cobb-Douglas En economía, una función de producción Cobb-Douglas tiene la forma $P = Al^{\alpha}k^{\beta}$, donde A, α y β son constantes y $\alpha + \beta = 1$. Para tal función, demuestre que

a. $\partial P/\partial l = \alpha P/l$.

b. $\partial P/\partial k = \beta P/k$.

c. $l\dfrac{\partial P}{\partial l} + k\dfrac{\partial P}{\partial k} = P$. Esto significa que al sumar los productos de la productividad marginal por cada factor y la cantidad de ese factor, se obtiene la producción total P.

En los problemas del 7 al 9, q_A y q_B son funciones de demanda para los productos A y B, *respectivamente. En cada caso encuentre $\partial q_A/\partial p_A$, $\partial q_A/\partial p_B$, $\partial q_B/\partial p_A$, $\partial q_B/\partial p_B$ y determine si* A y B *son competitivos, complementarios o ni uno ni otro.*

7. $q_A = 1000 - 50p_A + 2p_B;\quad q_B = 500 + 4p_A - 20p_B.$

8. $q_A = 20 - p_A - 2p_B;\ q_B = 50 - 2p_A - 3p_B.$

9. $q_A = \dfrac{100}{p_A\sqrt{p_B}};\quad q_B = \dfrac{500}{p_B\sqrt[3]{p_A}}.$

10. Manufactura canadiense La función de producción para las industrias manufactureras canadienses en 1927 se estimó con la expresión[8] $P = 33.0l^{0.46}k^{0.52}$, donde P es la producción, l es el trabajo y k el capital. Determine la productividad marginal de la mano de obra y del capital, y evalúela cuando $l = 1$ y $k = 1$.

11. Granja lechera Un estimado de la función de producción para las granjas lecheras en Iowa (1939) está dado por[9]

$$P = A^{0.27}\,B^{0.01}\,C^{0.01}\,D^{0.23}\,E^{0.09}\,F^{0.27},$$

donde P es la producción, A el terreno, B el trabajo, C son mejoras, D activos líquidos, E activos de trabajo y F

[8] P. Daly y P. Douglas, "The Production Function for Canadian Manufactures", *Journal of the American Statistical Association*, 38 (1943), 178-186.

[9] G. Tintner y O. H. Brownlee, "Production Functions Derived from Farm Records", *American Journal of Agricultural Economics*, 26 (1944), 566-571.

gastos de operación en efectivo. Encuentre las productividades marginales para el trabajo y las mejoras.

12. Función de producción Suponga que una función de producción está dada por $P = \dfrac{kl}{k + l}$.

a. Determine las funciones de productividad marginal.

b. Demuestre que cuando $k = l$, la suma de las productividades marginales es una constante.

13. Compensación a MAN En un estudio sobre el éxito alcanzado por jóvenes graduados con maestría en administración de negocios (MAN), se estimó que para gerentes (contadores, analistas, etc.) la compensación anual z (en dólares) está dada por

$$z = 43{,}960 + 4480x + 3492y,$$

donde x y y es el número de años de experiencia en el trabajo antes y después de recibir su título de maestría, respectivamente.[10] Encuentre $\partial z/\partial x$ e interprete su resultado.

14. Condición social La condición general S_g de una persona se cree que es una función atribuible a la educación S_e y al ingreso S_i, donde S_g, S_e y S_i están representadas numéricamente. Si

$$S_g = 7\sqrt[3]{S_e}\sqrt{S_i},$$

determine $\partial S_g/\partial S_e$ y $\partial S_g/\partial S_i$ cuando $S_e = 125$ y $S_i = 100$, e interprete sus resultados.[11]

15. Facilidad de lectura A veces queremos evaluar el grado de legibilidad de un documento escrito. Rudolf Flesch[12] desarrolló una función de dos variables que hace esto, a saber,

$$R = f(w, s) = 206.835 - (1.015w + 0.846s),$$

donde R es el *puntaje de facilidad de lectura*, w el número promedio de palabras por oración en muestras de 100 palabras, y s el número promedio de sílabas en tales muestras. Flesch afirma que un artículo para el cual $R = 0$, es "prácticamente ilegible", pero que uno con $R = 100$ "es fácil para cualquier persona que sepa leer". (a) Encuentre $\partial R/\partial w$ y $\partial R/\partial s$. (b) ¿Qué es más fácil de leer, un artículo para el cual $w = w_0$ y $s = s_0$, u otro para el cual $w = w_0 + 1$ y $s = s_0$?

16. Modelo de una voz El estudio de las frecuencias de las vibraciones de un alambre tenso es útil al considerar la voz de un individuo. Suponga que

$$\omega = \frac{1}{bL}\sqrt{\frac{\tau}{\pi\rho}},$$

donde ω (letra griega "omega") es la frecuencia, b el diámetro, L la longitud, ρ (letra griega "rho") la densidad y τ (letra griega "tau") es la tensión.[13] Encuentre $\partial\omega/\partial b$, $\partial\omega/\partial L$, $\partial\omega/\partial\rho$ y $\partial\omega/\partial\tau$.

17. Flujo de tránsito Considere la siguiente situación de tránsito. En una autopista con dos carriles en cada dirección, se encuentra un vehículo de mantenimiento bloqueando el carril izquierdo (véase la fig. 16.11). Dos vehículos (*anterior* y *posterior*) circulan sobre el carril derecho a cierta distancia uno del otro. El vehículo *sujeto* puede escoger llenar o no el hueco entre los vehículos anterior y posterior. Esa decisión puede basarse no sólo en la distancia x mostrada en el diagrama, sino en otros factores (como la velocidad del vehículo *posterior*). Un *índice de espacio*, g, se ha usado en el análisis de tal decisión.[14,15] Entre mayor es el valor de g, mayor es la propensión del vehículo *sujeto* a ocupar el espacio. Suponga que

$$g = \frac{x}{V_F} - \left(0.75 + \frac{V_F - V_S}{19.2}\right),$$

donde x (en pies) es el espacio, V_F la velocidad del vehículo *posterior* (en pies por segundo) y V_s la velocidad

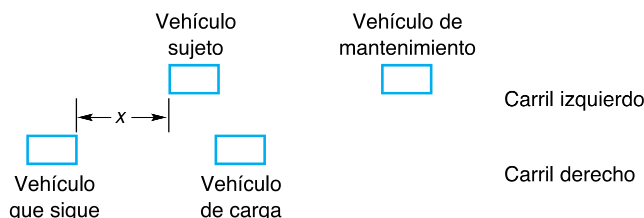


FIGURA 16.11 Diagrama para el problema 17.

[10] A. G. Weinstein y V. Srinivasen, "Predicting Managerial Success of Master of Business Administration (M.B.A.) Graduates", *Journal of Aplied Psychology,* 59, núm. 2 (1974), 207-212.

[11] Adaptado de R.K. Leik y B.F. Meeker, *Mathematical Sociology* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc.,1975).

[12] R. Flesch, *The Art of Readable Writing* (Nueva York: Harper & Row Publishers, Inc., 1949).

[13] R.M. Thrall, J. A. Mortimer, K.R. Rebman y R.F. Baum, editores, *Some Mathematical Models in Biology*, edición revisada. Reporte núm. 40241-R-7. Preparado en la Universidad de Michigan, 1967.

[14] P.M. Hurst, K. Perchonok y E. L. Seguin, "Vehicle Kinematics and Gap Acceptance", *Journal of Applied Psychology*, 52, núm. 4 (1968), 321-324.

[15] K. Perchonok y P.M. Hurst, "Effect of Lane-Closure Signals upon Driver Decision Making and Traffic Flow", *Journal of Applied Psychology*, 52, núm. 5 (1968), 410-413.

del vehículo *sujeto* (en pies por segundo). Del diagrama parece razonable suponer que si V_F y V_S son constantes y x crece, entonces g debería crecer también. Demuestre que esto es cierto aplicando cálculo a la función g dada anteriormente. Suponga que x, V_F y V_S son positivas.

18. Demanda Suponga que las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B son

$$q_A = e^{-(p_A/p_B)} \quad \text{y} \quad q_B = \frac{16}{p_A p_B^2},$$

donde q_A y q_B son los números de unidades demandadas de A y B cuando los precios unitarios (en miles de dólares) son p_A y p_B, respectivamente.

a. Clasifique A y B como competitivos, complementarios o ninguno de los dos.

b. Si los precios unitarios de A y B son $1000 y $2000, respectivamente, estime el cambio en la demanda de A cuando el precio de B disminuye $40 y el precio de A se mantiene constante.

19. Demanda Las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B están dadas por

$$q_A = \frac{30\sqrt{p_B}}{p_A^{2/3}} \quad \text{y} \quad q_B = \frac{50 p_A}{p_B^{1/3}},$$

donde q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y de B, y p_A y p_B son los correspondientes precios (en dólares) por unidad.

a. Encuentre los valores de las dos demandas marginales para el producto A cuando $p_A = 8$ y $p_B = 64$.

b. Si p_B se reduce de 64 a 60, con p_A fijo en 8, use la parte (a) para estimar el cambio correspondiente en la demanda para el producto A.

20. Función de costos conjuntos La función de costos conjuntos para producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dada por

$$c = \frac{q_A^2(q_B^3 + q_A)^{1/2}}{17} + q_A q_B^{1/3} + 600,$$

donde c está en dólares.

a. Encuentre las funciones de costo marginal con respecto a q_A y q_B.

b. Evalúe la función de costo marginal con respecto a q_A cuando $q_A = 17$ y $q_B = 8$. Redondee su respuesta a dos decimales.

c. Use su respuesta a la parte (b) para estimar el cambio en el costo si la producción del producto A disminuye de 17 a 16 unidades, mientras que la producción del producto B se mantiene en 8 unidades.

21. Elecciones Para las elecciones de 1974, el porcentaje republicano R del voto republicano-democrático en un distrito está dado (aproximadamente) por[16]

$$\begin{aligned} R &= f(E_r, E_d, I_r, I_d, N) \\ &= 15.4725 + 2.5945E_r - 0.0804E_r^2 - 2.3648E_d + \\ &\qquad 0.0687E_d^2 + 2.1914I_r - 0.0912I_r^2 - \\ &\qquad 0.8096I_d + 0.0081I_d^2 - 0.0277E_rI_r + \\ &\qquad 0.0493E_dI_d + 0.8579N - 0.0061N^2. \end{aligned}$$

Aquí, E_r y E_d son los gastos de campaña (en unidades de $10,000) de los republicanos y demócratas, respectivamente; I_r e I_d el número de periodos en los que han estado en el Congreso, *más* uno, para los candidatos republicano y demócrata, respectivamente, y N es el porcentaje del voto presidencial de los dos partidos que Richard Nixon obtuvo en el distrito en 1968. La variable N da una medida de la fuerza de los republicanos en ese distrito.

a. En el Acta de 1974 de la Campaña Federal de Elecciones, el Congreso impuso un límite de $188,000 para los gastos de campaña. Analizando $\partial R/\partial E_r$, ¿habría aconsejado usted a un candidato republicano con nueve periodos en el Congreso, gastar $188,000 en su campaña?

b. Encuentre el porcentaje por encima del cual el voto de Nixon tuvo un efecto negativo sobre R; esto es, encuentre N cuándo $\partial R/\partial N < 0$. Dé su respuesta al porcentaje entero más cercano.

22. Ventas Después que un nuevo producto se ha lanzado al mercado, su volumen de ventas S (en miles de unidades) está dado por

$$S = \frac{AT + 450}{\sqrt{A + T^2}},$$

donde T es el tiempo (en meses) desde que el producto fue introducido por primera vez y A la cantidad (en *cientos* de dólares) gastada cada mes en publicidad.

a. Verifique que la derivada parcial del volumen de ventas con respecto al tiempo está dada por

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{A^2 - 450T}{(A + T^2)^{3/2}}.$$

b. Use el resultado de la parte (a) para predecir el número de meses que transcurrirán, antes de que el volumen de ventas empiece a descender, si la cantidad destinada a publicidad se mantiene fija en $9000 por mes.

[16]J. Silberman y G. Yochum, "The Role of Money in Determining Election Outcomes", *Social Science Quarterly*, 58, núm. 4 (1978), 671-682.

Sea f una función de demanda para el producto A y $q_A = f(p_A, p_B)$ donde q_A es la cantidad demandada de A cuando su precio por unidad es p_A y el precio por unidad del producto B es p_B. La elasticidad parcial de la demanda de A con respecto a p_A, denotada η_{p_A} se define como $\eta_{p_A} = (p_A/q_A)(\partial q_A/\partial p_A)$. La elasticidad parcial de la demanda de A con respecto a p_B, denotada η_{p_B} se define como $\eta_{p_B} = (p_B/q_A)(\partial q_A/\partial p_B)$. En términos generales η_{p_A}, es la razón de un cambio porcentual en la cantidad demandada de A con respecto a un cambio porcentual en el precio de A cuando el precio de B está fijo. De manera similar, η_{p_B} puede interpretarse como la razón de un cambio porcentual en la cantidad demandada de A a un cambio porcentual en el precio de B cuando el precio de A está fijo. En los problemas del 23 al 25 encuentre η_{p_A} y η_{p_B} para los valores dados de p_A y p_B

23. $q_A = 1000 - 50p_A + 2p_B$; $p_A = 2, p_B = 10$.

24. $q_A = 20 - p_A - 2p_B$; $p_A = 2, p_B = 2$.

25. $q_A = 100/(p_A\sqrt{p_B})$; $p_A = 1, p_B = 4$.

OBJETIVO Determinar derivadas parciales de una función definida de manera implícita.

16.4 Diferenciación parcial implícita[17]

Una ecuación en x, y y z no necesariamente define a z como función de x y y. Por ejemplo, en la ecuación

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0, \quad (1)$$

si $x = 1$ y $y = 1$, entonces $z^2 - 1 - 1 = 0$, por lo que $z = \pm\sqrt{2}$. Así, la ecuación (1) no define a z como función de x y y. Sin embargo, despejando z de la ecuación (1) se obtiene

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{o} \quad z = -\sqrt{x^2 + y^2},$$

cada una de las cuales define a z como función de x y de y. Aunque la ecuación (1) no expresa de manera explícita a z como función de x y y, puede considerarse que expresa a z *implícitamente* como una de dos funciones diferentes de x y y. Note que la ecuación $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ tiene la forma $F(x, y, z) = 0$ donde F es una función de tres variables. Cualquier ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$ puede considerarse que expresa a z de manera implícita como un conjunto de posibles funciones de x y y. Además, podemos encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ directamente de la forma $F(x, y, z) = 0$.

Para encontrar $\partial z/\partial x$ de

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0, \quad (2)$$

diferenciamos primero ambos miembros de la ecuación (2) con respecto a x tratando a z como función de x y y, y tratando a y como constante:

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^2 - x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(0),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = 0,$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} - 2x - 0 = 0.$$

Ya que y es tratada como una constante, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$.

Al despejar $\partial z/\partial x$, obtenemos

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} = 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}.$$

[17] Puede omitirse sin pérdida de continuidad.

Para encontrar $\partial z/\partial y$ diferenciamos ambos miembros de la ecuación (2) con respecto a y considerando a z como función de x y y, y manteniendo a x constante:

$$\frac{\partial}{\partial y}(z^2 - x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(0),$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} - 0 - 2y = 0 \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial y} = 0\right),$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

De aquí que,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}.$$

El método que usamos para encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ se llama *diferenciación parcial implícita*.

EJEMPLO 1 Diferenciación parcial implícita

Si $\dfrac{xz^2}{x+y} + y^2 = 0$ *evaluar* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *cuando* $x = -1$, $y = 2$ *y* $z = 2$.

Solución: tratamos a z como función de x y y, y diferenciamos ambos miembros de la ecuación con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xz^2}{x+y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(0).$$

Si usamos la regla del cociente para el primer término a la izquierda, tenemos

$$\frac{(x+y)\dfrac{\partial}{\partial x}(xz^2) - xz^2\dfrac{\partial}{\partial x}(x+y)}{(x+y)^2} + 0 = 0.$$

Con la regla del producto para $\dfrac{\partial}{\partial x}(xz^2)$ resulta

$$\frac{(x+y)\left[x\left(2z\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) + z^2(1)\right] - xz^2(1)}{(x+y)^2} = 0.$$

Despejamos $\partial z/\partial x$, y así obtenemos

$$2xz(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} + z^2(x+y) - xz^2 = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xz^2 - z^2(x+y)}{2xz(x+y)} = -\frac{yz}{2x(x+y)}, \quad z \neq 0.$$

Entonces,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-1,2,2)} = 2.$$

EJEMPLO 2 Diferenciación parcial implícita

Si $se^{r^2+u^2} = u\ln(t^2+1)$, *determinar* $\partial t/\partial u$.

Solución: consideramos a t como función de r, s y u. Diferenciando ambos miembros con respecto a u, mientras mantenemos constantes a r y a s, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial u}(se^{r^2+u^2}) = \frac{\partial}{\partial u}[u\ln(t^2+1)],$$

$$2sue^{r^2+u^2} = u\frac{\partial}{\partial u}[\ln(t^2+1)] + \ln(t^2+1)\frac{\partial}{\partial u}(u) \quad \text{(regla del producto)},$$

$$2sue^{r^2+u^2} = u\frac{2t}{t^2+1}\frac{\partial t}{\partial u} + \ln(t^2+1).$$

Por tanto,

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{(t^2+1)[2sue^{r^2+u^2} - \ln(t^2+1)]}{2ut}.$$

Ejercicio 16.4

En los problemas del 1 al 11 encuentre las derivadas parciales indicadas por el método de diferenciación parcial implícita.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $\partial z/\partial x$.

2. $z^2 - 5x^2 + y^2 = 0$; $\partial z/\partial x$.

3. $2z^3 - x^2 - 4y^2 = 0$; $\partial z/\partial y$.

4. $3x^2 + y^2 + 2z^3 = 9$; $\partial z/\partial y$.

5. $x^2 - 2y - z^2 + x^2yz^2 = 20$; $\partial z/\partial x$.

6. $z^3 - xz - y = 0$; $\partial z/\partial x$.

7. $e^x + e^y + e^z = 10$; $\partial z/\partial y$.

8. $xyz + 2y^2x - z^3 = 0$; $\partial z/\partial x$.

9. $\ln(z) + 9z - xy = 1$; $\partial z/\partial x$.

10. $\ln x + \ln y - \ln z = e^y$; $\partial z/\partial x$.

11. $(z^2 + 6xy)\sqrt{x^3+5} = 2$; $\partial z/\partial y$.

En los problemas del 12 al 20 evalúe las derivadas parciales indicadas para los valores dados de las variables.

12. $xz + xyz - 5 = 0$; $\partial z/\partial x$, $x = 1$, $y = 4$, $z = 1$.

13. $xz^2 + yz - 12 = 0$; $\partial z/\partial x$, $x = 2$, $y = -2$, $z = 3$.

14. $e^{zx} = xyz$; $\partial z/\partial y$, $x = 1$, $y = -e^{-1}$, $z = -1$.

15. $e^{yz} = -xyz$; $\partial z/\partial x$, $x = -e^2/2$, $y = 1$, $z = 2$.

16. $\sqrt{xz + y^2} - xy = 0$; $\partial z/\partial y$, $x = 2$, $y = 2$, $z = 6$.

17. $\ln z = 4x + y$; $\partial z/\partial x$, $x = 5$, $y = -20$, $z = 1$.

18. $\dfrac{rs}{s^2+t^2} = t$; $\partial r/\partial t$, $r = 0$, $s = 1$, $t = 0$.

19. $\dfrac{s^2+t^2}{rs} = 10$; $\partial t/\partial r$, $r = 1$, $s = 2$, $t = 4$.

20. $\ln(x+z) + xyz = x^2e^{y+z}$; $\partial z/\partial x$, $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$.

21. Función de costos conjuntos Una función de costos conjuntos está definida en forma implícita por la ecuación

$$c + \sqrt{c} = 12 + q_A\sqrt{9 + q_B^2},$$

donde c denota el costo total (en dólares) de producir q_A unidades del producto A y q unidades del producto B.

a. Si $q_A = 6$ y $q_B = 4$, encuentre el correspondiente al valor de c.

b. Determine los costos marginales con respecto a q_A y q_B, cuando $q_A = 6$ y $q_B = 4$.

OBJETIVO Calcular derivadas parciales de orden superior.

16.5 DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Si $z = f(x, y)$, entonces no sólo z es una función de x y y, también f_x y f_y lo son. Por lo que podemos diferenciar f_x y f_y para obtener **derivadas parciales de segundo orden** de f. Simbólicamente,

$$f_{xx} \text{ significa } (f_x)_x, \quad f_{xy} \text{ significa } (f_x)_y,$$

$$f_{yx} \text{ significa } (f_y)_x, \quad f_{yy} \text{ significa } (f_y)_y.$$

En términos de la notación ∂,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right], \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right], \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ significa } \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right].$$

Observe que para encontrar f_{xy}, diferenciamos primero f con respecto a x. Para $\partial^2 z/\partial x \partial y$, primero diferenciamos con respecto a y.

Podemos extender nuestra notación más allá de las derivadas parciales de segundo orden. Por ejemplo, f_{xxy} (o $\partial^3 z/\partial y \partial x^2$) es una derivada parcial de tercer orden de f, esto es, la derivada parcial de f_{xx} (o $\partial^2 z/\partial x^2$) con respecto a y. Una generalización a derivadas parciales de orden superior con funciones de más de dos variables debería ser obvia.

EJEMPLO 1 Derivadas parciales de segundo orden

Encontrar las cuatro derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = x^2 y + x^2 y^2$.

Solución: como

$$f_x(x, y) = 2xy + 2xy^2,$$

tenemos

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + 2xy^2) = 2y + 2y^2$$

y

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + 2xy^2) = 2x + 4xy.$$

También, como

$$f_y(x, y) = x^2 + 2x^2 y,$$

tenemos

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2x^2 y) = 2x^2$$

y

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2x^2 y) = 2x + 4xy.$$

Las derivadas f_{xy} y f_{yx} se llaman **derivadas parciales mixtas.** Observe en el ejemplo 1 que $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$. Bajo ciertas condiciones, las derivadas parciales mixtas de una función son iguales; esto es, el orden de diferenciación es irrelevante. Puede suponerse que éste es el caso para todas las funciones que consideremos.

EJEMPLO 2 Derivada parcial mixta

Encontrar el valor de $\left.\dfrac{\partial^3 w}{\partial z\, \partial y\, \partial x}\right|_{(1, 2, 3)}$ *si* $w = (2x + 3y + 4z)^3$.

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= 3(2x + 3y + 4z)^2 \frac{\partial}{\partial x}(2x + 3y + 4z)\\ &= 6(2x + 3y + 4z)^2,\\ \frac{\partial^2 w}{\partial y\, \partial x} &= 6 \cdot 2(2x + 3y + 4z)\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3y + 4z)\\ &= 36(2x + 3y + 4z),\\ \frac{\partial^3 w}{\partial z\, \partial y\, \partial x} &= 36 \cdot 4 = 144.\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\left.\frac{\partial^3 w}{\partial z\, \partial y\, \partial x}\right|_{(1, 2, 3)} = 144.$$

EJEMPLO 3 Derivada parcial de segundo orden de una función implícita [18]

Determinar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ *si* $z^2 = xy$.

Solución: por medio de la diferenciación implícita determinamos primero $\partial z/\partial x$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(z^2) &= \frac{\partial}{\partial x}(xy),\\ 2z\frac{\partial z}{\partial x} &= y,\\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{y}{2z}, \quad z \neq 0.\end{aligned}$$

Al diferenciar ambos miembros con respecto a x, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}yz^{-1}\right],\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2}yz^{-2}\frac{\partial z}{\partial x}.\end{aligned}$$

[18] Si no se estudió la sección 16.4, omítase.

Al sustituir $y/(2z)$ por $\partial z/\partial x$, tenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}yz^{-2}\left(\frac{y}{2z}\right) = -\frac{y^2}{4z^3}, \quad z \neq 0.$$

Ejercicio 16.5

En los problemas del 1 al 10 encuentre las derivadas parciales indicadas.

1. $f(x, y) = 4x^2y$; $f_x(x, y), f_{xy}(x, y)$.

2. $f(x, y) = 4x^3 + 5x^2y^3 - 3y$; $f_x(x, y), f_{xx}(x, y)$.

3. $f(x, y) = 7x^2 + 3y$; $f_y(x, y), f_{yy}(x, y), f_{yyx}(x, y)$.

4. $f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)(x^2 + xy + 1)$; $f_x(x, y), f_{xy}(x, y)$.

5. $f(x, y) = 9e^{2xy}$; $f_y(x, y), f_{yx}(x, y), f_{yxy}(x, y)$.

6. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + 2$; $f_x(x, y), f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y)$.

7. $f(x, y) = (x + y)^2(xy)$; $f_x(x, y), f_y(x, y), f_{xx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$.

8. $f(x, y, z) = xy^2z^3$; $f_x(x, y, z), f_{xz}(x, y, z), f_{xy}(x, y, z)$.

9. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

10. $z = \dfrac{\ln(x^2 + 5)}{y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

En los problemas del 11 al 16 encuentre el valor indicado.

11. Si $f(x, y, z) = 7$, encuentre $f_{yxx}(4, 3, -2)$.

12. Si $f(x, y, z) = z^2(3x^2 - 4xy^3)$, encuentre $f_{xyz}(1, 2, 3)$.

13. Si $f(l, k) = 5l^3k^6 - lk^7$, encuentre $f_{kkl}(8, 1)$.

14. Si $f(x, y) = 2x^2y + xy^2 - x^2y^2$, encuentre $f_{xxy}(5, 1)$.

15. Si $f(x, y) = y^2e^x + \ln(xy)$, encuentre $f_{xyy}(1, 1)$.

16. Si $f(x, y) = x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^3$, encuentre $f_{xy}(1, -1)$.

---

17. Función costo Suponga que el costo c de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dado por

$$c = (3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{1/3},$$

y que las funciones de demanda para los productos están dadas por

$$q_A = 10 - p_A + p_B^2$$

y

$$q_B = 20 + p_A - 11p_B.$$

Encuentre el valor de

$$\frac{\partial^2 c}{\partial q_A\,\partial q_B}$$

cuando $p_A = 25$ y $p_B = 4$.

18. Para $f(x, y) = x^4y^4 + 3x^3y^2 - 7x + 4$, demuestre que

$$f_{xyx}(x, y) = f_{xxy}(x, y).$$

19. Para $f(x, y) = 8x^3 + 2x^2y^2 + 5y^4$, demuestre que

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

20. Para $f(x, y) = xe^{y/x}$, demuestre que

$$xf_{xx}(x, y) + yf_{xy}(x, y) = 0.$$

21. Para $z = \ln(x^2 + y^2)$, demuestre que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

[19]**22.** Si $2z^2 - x^2 - 4y^2 = 0$, encuentre $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

[19]**23.** Si $z^2 - 3x^2 + y^2 = 0$, encuentre $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

[19]**24.** Si $2z^2 = x^2 + 2xy + xz$, encuentre $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

[19]Omítase si no se estudió la sección 16.4.

OBJETIVO Demostrar cómo encontrar derivadas parciales de una función de funciones utilizando la regla de la cadena.

16.6 Regla de la cadena[20]

Suponga que un fabricante de dos productos relacionados A y B tiene una función de costos conjuntos dada por

$$c = f(q_{\mathrm{A}}, q_{\mathrm{B}}),$$

donde c es el costo total de producir las cantidades q_{A} y q_{B} de A y B, respectivamente. Además, suponga que las funciones de demanda para los productos son

$$q_{\mathrm{A}} = g(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}}) \quad \text{y} \quad q_{\mathrm{B}} = h(p_{\mathrm{A}}, p_{\mathrm{B}}),$$

donde p_A y p_B son los precios por unidad de A y B, respectivamente. Como c es una función de q_A y q_B, y ya que éstos son a su vez funciones de p_A y p_B, entonces c puede considerarse una función de p_A y p_B (de manera apropiada, las variables q_A y q_B se llaman *variables intermedias* de c). En consecuencia, deberíamos poder determinar $\partial c/\partial p_A$ la razón de cambio del costo total con respecto al precio de A. Una manera de hacer esto es sustituyendo las expresiones $g(P_A, P_B)$ y $h(p_A, p_B)$ por q_{A} y q_{B}, respectivamente, en $c = f(q_A, q_B)$. Entonces c es una función de p_A y p_B y podemos diferenciar c con respecto a p_{A} directamente. Este procedimiento tiene algunas desventajas, especialmente cuando f, g o h están dadas por una expresión complicada. Otra manera de atacar el problema sería por medio de la regla de la cadena (en realidad, *una* regla de la cadena), que ahora enunciamos sin demostrarla.

Regla de la cadena

Sea $z = f(x, y)$ donde x y y son funciones de r y s dadas por $x = x(r, s)$ y $y = y(r, s)$. Si f, x y y tienen derivadas parciales continuas, entonces z es una función de r y s, y

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Observe que en la regla de la cadena, el número de variables intermedias de z (dos), es el mismo que el número de términos que componen cada una de $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial s$.

Regresando a la situación original en lo que concierne al productor, vemos que si f, q_A y q_B tienen derivadas parciales continuas, entonces, por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial c}{\partial p_{\mathrm{A}}} = \frac{\partial c}{\partial q_{\mathrm{A}}}\frac{\partial q_{\mathrm{A}}}{\partial p_{\mathrm{A}}} + \frac{\partial c}{\partial q_{\mathrm{B}}}\frac{\partial q_{\mathrm{B}}}{\partial p_{\mathrm{A}}}.$$

EJEMPLO 1 Tasa de cambio del costo

Para un fabricante de cámaras y películas, el costo total c de producir q_C cámaras y q_F rollos de película está dado por

$$c = 30q_{\mathrm{C}} + 0.015q_{\mathrm{C}}q_{\mathrm{F}} + q_{\mathrm{F}} + 900.$$

[20]Puede omitirse sin pérdida de continuidad.

Las funciones de demanda para las cámaras y los rollos están dadas por

$$q_C = \frac{9000}{p_C\sqrt{p_F}} \quad \text{y} \quad q_F = 2000 - p_C - 400p_F,$$

donde p_C es el precio por cámara y p_F el precio por rollo de película. Encontrar la tasa de cambio del costo total con respecto al precio de la cámara cuando $p_C = 50$ y $p_F = 2$.

Solución: primero debemos determinar $\partial c/\partial p_C$. Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial p_C} &= \frac{\partial c}{\partial q_C}\frac{\partial q_C}{\partial p_C} + \frac{\partial c}{\partial q_F}\frac{\partial q_F}{\partial p_C}\\ &= (30 + 0.015q_F)\left[\frac{-9000}{p_C^2\sqrt{p_F}}\right] + (0.015q_C + 1)(-1).\end{aligned}$$

Cuando $p_C = 50$ y $p_F = 2$, entonces $q_C = 90\sqrt{2}$ y $q_F = 1150$. Sustituyendo esos valores en $\partial c/\partial p_C$ y simplificando, obtenemos

$$\left.\frac{\partial c}{\partial p_C}\right|_{\substack{p_C=50\\ p_F=2}} \approx -123.2.$$

La regla de la cadena puede extenderse. Por ejemplo, suponga que $z = f(v, w, x, y)$ y que v, w, x y y son todas funciones de r, s y t. Entonces, si se suponen ciertas condiciones de continuidad, puede considerarse a z como una función de r, s y t, por lo que tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Observe que el número de variables intermedias de z (cuatro) es el mismo que el número de términos que forman cada una de $\partial z/\partial r$, $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

Consideremos ahora el caso en que $z = f(x, y)$ tal que $x = x(t)$ y $y = y(t)$. Entonces,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Utilice los símbolos de derivadas parciales y los símbolos de derivadas ordinarias de manera apropiada.

Aquí usamos el símbolo dz/dt en vez de $\partial z/\partial t$, ya que z puede considerarse como una función de *una sola* variable t. En la misma forma, los símbolos dx/dt y dy/dt se usan en vez de $\partial z/\partial t$ y $\partial z/\partial t$. Como se ha visto, el número de términos que componen dz/dt es igual al número de variables intermedias de z. Otros casos se tratarán de manera similar.

EJEMPLO 2 Regla de la cadena

a. *Si* $w = f(x, y, z) = 3x^2y + xyz - 4y^2z^3$, *donde*

$$x = 2r - 3s, \quad y = 6r + s \quad y \quad z = r - s,$$

determinar $\partial w/\partial r$ *y* $\partial w/\partial s$.

Solución: como x, y y z, son funciones de r y s, entonces por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\ &= (6xy + yz)(2) + (3x^2 + xz - 8yz^3)(6) + (xy - 12y^2z^2)(1) \\ &= x(18x + 13y + 6z) + 2yz(1 - 24z^2 - 6yz).\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (6xy + yz)(-3) + (3x^2 + xz - 8yz^3)(1) + (xy - 12y^2z^2)(-1) \\ &= x(3x - 19y + z) - yz(3 + 8z^2 - 12yz).\end{aligned}$$

b. *Si* $z = \dfrac{x + e^y}{y}$, *donde* $x = rs + se^{rt}$ *y* $y = 9 + rt$, *evaluar* $\partial z/\partial s$ *cuando* $r = -2$, $s = 5$ *y* $t = 4$.

Solución: como x y y son funciones de r, s y t (note que podemos escribir $y = 9 + rt + 0 \cdot s$), por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= \left(\frac{1}{y}\right)(r + e^{rt}) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot (0) = \frac{r + e^{rt}}{y}.\end{aligned}$$

Si $r = -2$, $s = 5$ y $t = 4$, entonces $y = 1$. Así,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{\substack{r=-2\\ s=5\\ t=4}} = \frac{-2 + e^{-8}}{1} = -2 + e^{-8}.$$

EJEMPLO 3 Regla de la cadena

a. *Determinar* $\partial y/\partial r$ *si* $y = x^2\ln(x^4 + 6)$ *y* $x = (r + 3s)^6$.

Solución: por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{dy}{dx}\frac{\partial x}{\partial r} \\ &= \left[x^2 \cdot \frac{4x^3}{x^4 + 6} + 2x \cdot \ln(x^4 + 6)\right][6(r + 3s)^5] \\ &= 12x(r + 3s)^5\left[\frac{2x^4}{x^4 + 6} + \ln(x^4 + 6)\right].\end{aligned}$$

b. *Dado $z = e^{xy}$, $x = r - 4s$ y $y = r - s$, encontrar $\partial z/\partial r$ en términos de r y s.*

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$
$$= (ye^{xy})(1) + (xe^{xy})(1)$$
$$= (x + y)e^{xy}$$

Como $x = r - 4s$ y $y = r - s$,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = [(r - 4s) + (r - s)]e^{(r-4s)(r-s)}$$
$$= (2r - 5s)e^{r^2-5rs+4s^2}.$$

Ejercicio 16.6

En los problemas del 1 al 12 encuentre las derivadas indicadas usando la regla de la cadena.

1. $z = 5x + 3y$, $x = 2r + 3s$, $y = r - 2s$; $\partial z/\partial r$, $\partial z/\partial s$.

2. $z = x^2 + 3xy + 7y^3$, $x = r^2 - 2s$, $y = 5s^2$; $\partial z/\partial r$, $\partial z/\partial s$.

3. $z = e^{x+y}$, $x = t^2 + 3$, $y = \sqrt{t^3}$; dz/dt.

4. $z = \sqrt{8x + y}$, $x = t^2 + 3t + 4$, $y = t^3 + 4$; dz/dt.

5. $w = x^2z^2 + xyz + yz^2$, $x = 5t$, $y = 2t + 3$, $z = 6 - t$; dw/dt.

6. $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $x = 2 - 3t$, $y = t^2 + 3$, $z = 4 - t$; dw/dt.

7. $z = (x^2 + xy^2)^3$, $x = r + s + t$, $y = 2r - 3s + 8t$; $\partial z/\partial t$.

8. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r^2 + s - t$, $y = r - s + t$; $\partial z/\partial r$.

9. $w = x^2 + xyz + y^3z^2$, $x = r - s^2$, $y = rs$, $z = 2r - 5s$; $\partial w/\partial s$.

10. $w = e^{xyz}$, $x = r^2s^3$, $y = r - s$, $z = rs^2$; $\partial w/\partial r$.

11. $y = x^2 - 7x + 5$, $x = 19rs + 2s^2t^2$; $\partial y/\partial r$.

12. $y = 4 - x^2$, $x = 2r + 3s - 4t$; $\partial y/\partial t$.

---

13. Si $z = (4x + 3y)^3$, donde $x = r^2s$ y $y = r - 2s$, evalúe $\partial z/\partial r$ cuando $r = 0$ y $s = 1$.

14. Si $z = \sqrt{5x + 2y}$, donde $x = 4t + 7$ y $y = t^2 - 3t + 9$, evalúe dz/dt cuando $t = 1$.

15. Si $w = e^{3x-y}(x^2 + 4z^3)$, donde $x = rs$, $y = 2s - r$ y $z = r + s$, evalúe $\partial w/\partial s$ cuando $r = 1$ y $s = -1$.

16. Si $y = x/(x - 5)$, donde $x = 2t^2 - 3rs - r^2t$, evalúe $\partial y/\partial t$ cuando $r = 0$, $s = 2$ y $t = -1$.

17. Función de costo Suponga que el costo c de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dado por

$$c = (3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{1/3}$$

y que las funciones de demanda para los productos están dadas por

$$q_A = 10 - p_A + p_B^2$$

y

$$q_B = 20 + p_A - 11p_B.$$

Use la regla de la cadena para evaluar $\frac{\partial c}{\partial p_A}$ y $\frac{\partial c}{\partial p_B}$ cuando $p_A = 25$ y $p_B = 4$.

18. Suponga que $w = f(x, y)$, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$.

a. Establezca una regla de la cadena que dé dw/dt.

b. Suponga que $h(t) = t$, de modo que $w = f(x, t)$, donde $x = g(t)$. Use la parte (a) para encontrar dw/dt y simplifique su respuesta.

19. a. Suponga que w es una función de x y y, y que a su vez x y y son funciones de s y t. Establezca una regla de la cadena que exprese $\partial w/\partial s$ en términos de las derivadas de estas funciones.

b. Sea $w = 3x^2 \ln(x - 2y)$, donde $x = s\sqrt{t - 2}$ y $y = t - 3e^{1-s}$. Use la parte (a) para evaluar $\partial w/\partial s$ cuando $s = 1$ y $t = 3$.

20. Función de producción Al considerar una función de producción $P = f(l, k)$, donde l es el trabajo y k el capital inicial, Fon, Boulier y Goldfarb[21] suponen que l está dada por $l = Lg(h)$, donde L es el número de trabajadores, h el número de horas por día por trabajador y $g(h)$ una función de la eficiencia del trabajo. Al maximizar la ganancia p dada por

$$p = aP - whL,$$

donde a es el precio por unidad de producción y w el salario por hora por trabajador, Fon, Boulier y Goldfarb determinan $\partial p/\partial L$ y $\partial p/\partial h$. Suponga que k es independiente de L y h, y determine estas derivadas parciales.

[21]V. Fon, B. L. Boulier y R. S. Goldfarb, "The Firm's Demand for Daily Hours of Work: Some Implications", *Atlantic Economic Journal*, XIII, núm. 1 (1985), 36-42.

OBJETIVO Analizar máximos y mínimos relativos para determinar puntos críticos, y aplicar la prueba de la segunda derivada para una función de dos variables.

16.7 Máximos y mínimos para funciones de dos variables

Ahora extenderemos los conceptos de máximos y mínimos relativos (o extremos relativos) a funciones de dos variables.

Definición

Se dice que una función $z = f(x, y)$ tiene un ***máximo relativo*** en el punto (x_0, y_0), esto es, cuando $x = x_0$ y $y = y_0$, si para todo punto (x, y) en el plano que esté lo suficientemente cercano a (x_0, y_0) se tiene

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y). \quad \textbf{(1)}$$

Para un ***mínimo relativo,*** reemplazamos en la ecuación (1) $\geq$ por $\leq$.

Decir que $z = f(x, y)$ tiene un máximo relativo en (x_0, y_0) significa, en forma geométrica, que el punto (x_0, y_0, z_0) sobre la gráfica de f es mayor que (o tan alto como) todos los otros puntos sobre la superficie "cercanos" a (x_0, y_0, z_0). En la figura 16.12(a), f tiene un máximo relativo en (x_1, y_1). En forma similar, la función f en la figura 16.12(b) tiene un mínimo relativo cuando $x = y = 0$, el cual corresponde a un punto *bajo* en la superficie.

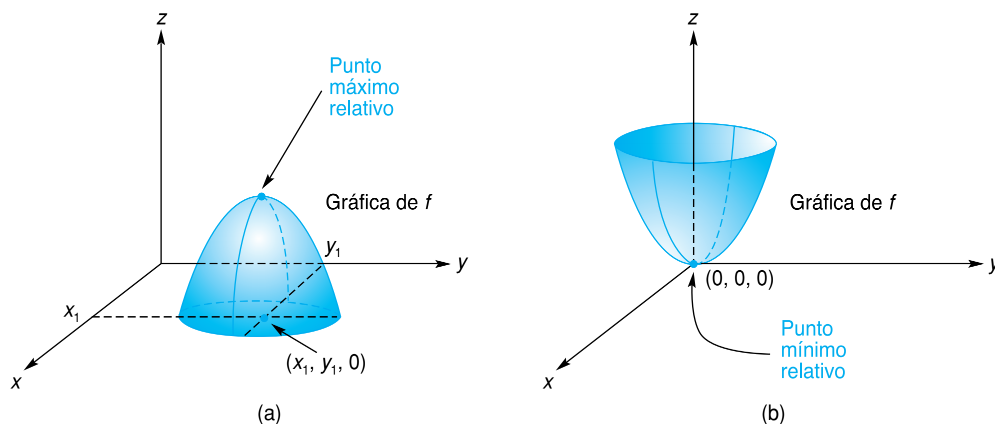


FIGURA 16.12 Extremos relativos.

Recuerde que para localizar los extremos de una función $y = f(x)$ de una variable, examinamos aquellos valores de x en el dominio de f para los cuales $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe. Para funciones de dos (o más) variables, se sigue un procedimiento similar. Sin embargo, para las funciones que nos interesan, los extremos no se presentarán donde una derivada no exista, y tales situaciones no se considerarán.

Suponga que $z = f(x, y)$ tiene un máximo relativo en (x_0, y_0), como se indica en la figura 16.13(a). Entonces, la curva donde el plano $y = y_0$ interseca la superficie debe tener un máximo relativo cuando $x = x_0$. Por tanto, la pendiente de la recta tangente a la superficie en la dirección x debe ser 0 en (x_0, y_0). De manera equivalente, $f_x(x, y) = 0$ en (x_0, y_0). En forma análoga, sobre la curva en que el plano $x = x_0$ interseca la superficie [véase la fig. 16.13(b)], debe haber un máximo relativo cuando $y = y_0$. Así, en la dirección y, la pendien-

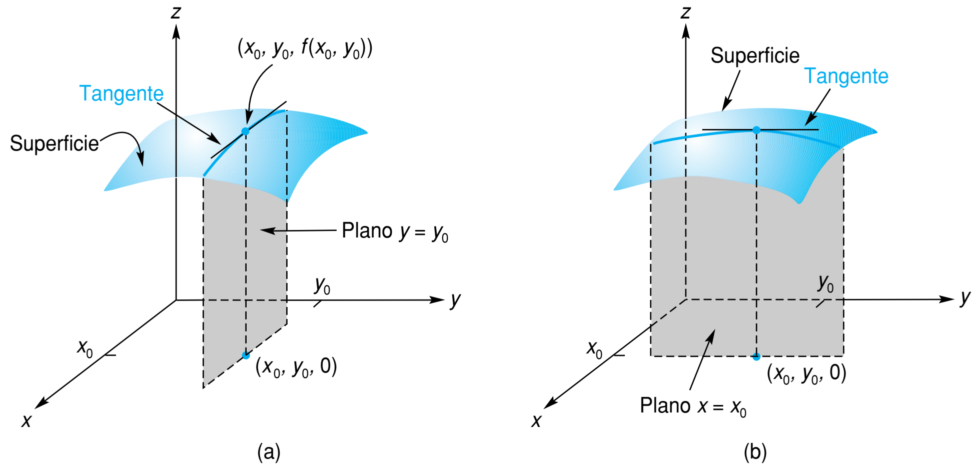


FIGURA 16.13 En el extremo relativo, $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$.

te de la tangente a la superficie debe ser 0 en (x_0, y_0). De manera equivalente, $f_y(x, y) = 0$ en (x_0, y_0). Como puede hacerse un análisis similar para un mínimo relativo, podemos combinar estos resultados de la manera siguiente:

Regla 1

Si $z = f(x, y)$ tiene un máximo o un mínimo relativo en (x_0, y_0), y si f_x y f_y están definidas para todo punto cercano a (x_0, y_0), es necesario que (x_0, y_0) sea una solución del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Un punto (x_0, y_0) para el cual $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ se llama **punto crítico** de f. Así, de la regla 1 inferimos que, para localizar extremos relativos de una función debemos examinar sus puntos críticos.



Advertencia La regla 1 no implica que un extremo deba ser punto crítico. Al igual que en el caso de funciones de una variable, un punto crítico puede resultar ser un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de éstos. Un punto crítico sólo es un *candidato* para ser un extremo relativo.

Dos comentarios adicionales: primero, la regla 1, así como el concepto de punto crítico, pueden extenderse a funciones de más de dos variables. Por ejemplo, para localizar posibles extremos de $w = f(x, y, z)$, debemos examinar aquellos puntos para los cuales $w_x = w_y = w_z = 0$. Segundo, para una función cuyo dominio está restringido, un examen completo de los extremos absolutos debe incluir la consideración de los puntos frontera.

EJEMPLO 1 Determinación de puntos críticos

Encontrar los puntos críticos de las funciones siguientes.

a. $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 3y + 1.$

Solución: como $f_x(x, y) = 4x - 2y + 5$ y $f_y(x, y) = 2y - 2x - 3$, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 4x - 2y + 5 = 0, \\ -2x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Esto nos da $x = -1$ y $y = \frac{1}{2}$. Así, $(-1, \frac{1}{2})$ es el único punto crítico.

b. $f(l, k) = l^3 + k^3 - lk.$

Solución:

$$\begin{cases} f_l(l, k) = 3l^2 - k = 0, & \textbf{(2)} \\ f_k(l, k) = 3k^2 - l = 0. & \textbf{(3)} \end{cases}$$

De la ecuación (2), $k = 3l^2$. Sustituyendo el valor de k en la ecuación (3) se obtiene

$$0 = 27l^4 - l = l(27l^3 - 1).$$

De aquí que, $l = 0$ o $l = \frac{1}{3}$. Si $l = 0$, entonces $k = 0$; si $l = \frac{1}{3}$, entonces $k = \frac{1}{3}$. Por tanto, los puntos críticos son $(0, 0)$ y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

c. $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + 100 - z(x + y - 100).$

Solución: al resolver el sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = 4x + y - z = 0, \\ f_y(x, y, z) = x + 2y - z = 0, \\ f_z(x, y, z) = -x - y + 100 = 0 \end{cases}$$

se obtiene el punto crítico $(25, 75, 175)$ como puede usted verificar.

EJEMPLO 2 Determinación de puntos críticos

Encontrar los puntos críticos de

$$f(x, y) = x^2 - 4x + 2y^2 + 4y + 7.$$

Solución: tenemos $f_x(x, y) = 2x - 4$ y $f_y(x, y) = 4y + 4$. El sistema

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

da el punto crítico $(2, -1)$. Observe que podemos escribir la función dada como

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - 4x + 4 + 2(y^2 + 2y + 1) + 1 \\ &= (x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 + 1, \end{aligned}$$

y $f(2, -1) = 1$. Es claro que si $(x, y) \neq (2, -1)$, entonces $f(x, y) > 1$. De aquí que se tiene un mínimo relativo en $(2, -1)$. Además, se tiene un *mínimo absoluto* en $(2, -1)$, ya que $f(x, y) > f(2, -1)$ para *toda* $(x, y) \neq (2, -1)$.

Si bien en el ejemplo 2 pudimos mostrar que el punto crítico da lugar a un extremo relativo, en muchos casos no es fácil hacer esto. Sin embargo, existe

una prueba de la segunda derivada que nos da las condiciones para las cuales un punto crítico será un máximo o un mínimo relativo. A continuación la enunciamos sin demostrarla.

Regla 2

Prueba de la segunda derivada para funciones de dos variables

Supongamos que $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas f_{xx}, f_{yy} y f_{xy} en todo punto (x, y) cercano al punto crítico (x_0, y_0). Sea D la función definida por

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2.$$

Entonces

a. si $D(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0);
b. si $D(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0);
c. si $D(x_0, y_0) < 0$, f no tiene ni un máximo relativo ni un mínimo relativo en (x_0,y_0);
d. si $D(x_0, y_0) = 0$, ninguna conclusión puede sacarse con respecto a extremos en (x_0, y_0) y requiere que se haga un análisis adicional.

EJEMPLO 3 Aplicación de la prueba de la segunda derivada

Examinar $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$ con respecto a máximos y mínimos relativos, usando la prueba de la segunda derivada.

Solución: primero encontramos los puntos críticos:

$$f_x(x, y) = 3x^2 - y, \quad f_y(x, y) = 3y^2 - x.$$

Igual que en el ejemplo 1(b), al resolver $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$, obtenemos los puntos críticos $(0, 0)$ y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Ahora,

$$f_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{yy}(x, y) = 6y, \quad f_{xy}(x, y) = -1.$$

Por tanto,

$$D(x, y) = (6x)(6y) - (-1)^2 = 36xy - 1.$$

Como $D(0,0) = 36(0)(0) - 1 = -1 < 0$, no hay ningún extremo relativo en $(0, 0)$. Además, como $D(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 36(\frac{1}{3})(\frac{1}{3}) - 1 = 3 > 0$ y $f_{xx}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 6(\frac{1}{3}) = 2 > 0$, hay un mínimo relativo en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. En este punto el valor de la función es

$$f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = (\tfrac{1}{3})^3 + (\tfrac{1}{3})^3 - (\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{3}) = -\tfrac{1}{27}.$$

EJEMPLO 4 Punto silla

Determine los extremos relativos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Solución: al resolver

$$f_x(x, y) = -2x = 0 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 2y = 0,$$

obtenemos el punto crítico $(0, 0)$. Aplicamos ahora la prueba de la segunda derivada. En $(0, 0)$ y, en realidad, en cualquier punto,

$$f_{xx}(x, y) = -2, \quad f_{yy}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = 0.$$

Como $D(0,0) = (-2)(2) - (0)^2 = -4 < 0$, no existe un extremo relativo en $(0, 0)$. En la figura 16.14 se muestra un esbozo de $z = f(x, y) = y^2 - x^2$. Observe que para la curva que resulta de cortar la superficie con el plano $y = 0$, existe un *máximo* en $(0, 0)$; pero para la curva que resulta de cortar la superficie con el plano $x = 0$, existe un *mínimo* en $(0, 0)$. Así, sobre la *superficie* no puede existir ningún extremo relativo en el origen, aunque $(0, 0)$ es un punto crítico. Alrededor del origen la superficie tiene la forma de una silla de montar y $(0, 0)$ se llama *punto silla* de f.

La superficie en la figura 16.14 es llamada paraboloide hiperbólico.

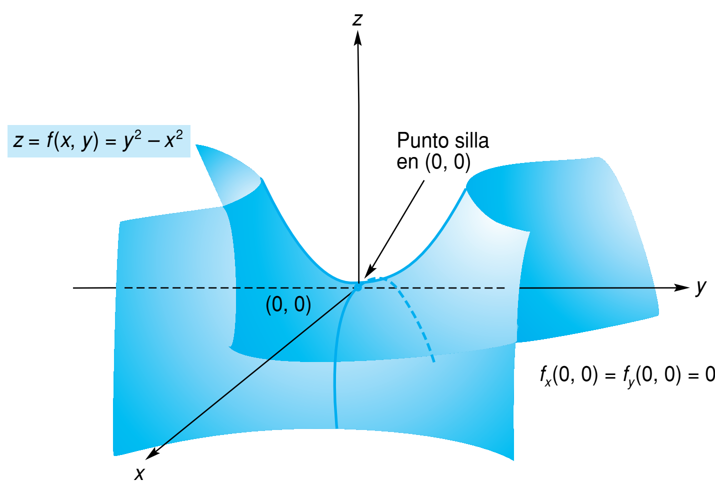


FIGURA 16.14 Punto silla.

EJEMPLO 5 Determinación de extremos relativos

Determinar los extremos relativos de $f(x, y) = x^4 + (x - y)^4$.

Solución: si hacemos

$$f_x(x, y) = 4x^3 + 4(x - y)^3 = 0 \quad \textbf{(4)}$$

y

$$f_y(x, y) = -4(x - y)^3 = 0, \quad \textbf{(5)}$$

entonces, de la ecuación (5) tenemos $x - y = 0$ o $x = y$. Sustituyendo en la ecuación (4) obtenemos $4x^3 = 0$ o $z = 0$. Así, $x = y = 0$, y $(0, 0)$ es el único punto crítico. En $(0, 0)$,

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 + 12(x - y)^2 = 0,$$
$$f_{yy}(x, y) = 12(x - y)^2 = 0,$$
$$\text{y} \quad f_{xy}(x, y) = -12(x - y)^2 = 0.$$

Por tanto, $D(0,0) = 0$ y la prueba de la segunda derivada no da información. Sin embargo, para toda $(x, y) \neq (0,0)$ tenemos $f(x, y) > 0$, mientras que $f(0, 0) = 0$. Por tanto, en $(0, 0)$ la gráfica de f tiene un punto inferior y concluimos que f tiene un mínimo relativo (y absoluto) en $(0, 0)$.

Aplicaciones

En muchas situaciones que implican funciones de dos variables, y en especial en sus aplicaciones, la naturaleza del problema dado es un indicador de si un punto crítico es realmente un máximo relativo (o absoluto) o un mínimo relativo (o absoluto). En tales casos, la prueba de la segunda derivada no se necesita. A menudo, en estudios matemáticos de problemas de aplicación se supone que se satisfacen las condiciones apropiadas de segundo orden.

EJEMPLO 6 Maximización de la producción

Sea P una función de producción dada por

$$P = f(l, k) = 0.54l^2 - 0.02l^3 + 1.89k^2 - 0.09k^3,$$

donde l y k son las cantidades de trabajo y capital, respectivamente, y P es la cantidad producida. Encontrar los valores de l y k que maximizan P.

Solución: para encontrar los puntos críticos resolvemos el sistema $P_l = 0$ y $P_k = 0$.

$$\begin{aligned} P_l &= 1.08l - 0.06l^2 & P_k &= 3.78k - 0.27k^2 \\ &= 0.06l(18 - l) = 0. & &= 0.27k(14 - k) = 0. \\ l &= 0, l = 18. & k &= 0, k = 14. \end{aligned}$$

Hay cuatro puntos críticos: (0, 0), (0, 14), (18, 0) y (18, 14).

Aplicamos ahora la prueba de la segunda derivada a cada punto crítico. Tenemos

$$P_{ll} = 1.08 - 0.12l, \quad P_{kk} = 3.78 - 0.54k, \quad P_{lk} = 0.$$

Así,

$$\begin{aligned} D(l, k) &= P_{ll}P_{kk} - [P_{lk}]^2 \\ &= (1.08 - 0.12l)(3.78 - 0.54k). \end{aligned}$$

En (0, 0),

$$D(0, 0) = 1.08(3.78) > 0.$$

Como $D(0, 0) > 0$ y $P_{ll} = 1.08 > 0$, se tiene un mínimo relativo en (0, 0).
En (0, 14),

$$D(0, 14) = 1.08(-3.78) < 0.$$

Como $D(0, 14) < 0$, no hay ningún extremo relativo en (0, 14).
En (18, 0),

$$D(18, 0) = (-1.08)(3.78) < 0.$$

Como $D(18, 0) < 0$, no hay ningún extremo relativo en (18, 0).
En (18, 14),

$$D(18, 14) = (-1.08)(-3.78) > 0.$$

Como $D(18, 14) > 0$ y $P_{ll} = -1.08 < 0$, se tiene un máximo relativo en (18, 14). Por lo que, la producción máxima se obtiene cuando $l = 18$ y $k = 14$.

EJEMPLO 7 Maximización de la utilidad

Una empresa produce dos tipos de dulces, A *y* B, *para los cuales los costos promedio de producción son, respectivamente, constantes de* \$2 *y* \$3 *por libra. Las*

cantidades q_A *y* q_B *(en libras) de* A *y* B *que pueden venderse cada semana están dadas por las funciones de demanda conjunta*

$$q_{\text{A}} = 400(p_{\text{B}} - p_{\text{A}})$$

y

$$q_{\text{B}} = 400(9 + p_{\text{A}} - 2p_{\text{B}}),$$

donde p_A *y* p_B *son los precios de venta (en dólares por libra) de* A *y* B, *respectivamente. Determinar los precios de venta que maximizan las utilidades de la compañía,* P.

Solución: la utilidad total está dada por

$$P = \begin{pmatrix}\text{utilidad}\\ \text{por libra}\\ \text{de A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{libras}\\ \text{vendidas}\\ \text{de A}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{utilidad}\\ \text{por libra}\\ \text{de B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{libras}\\ \text{vendidas}\\ \text{de B}\end{pmatrix}.$$

Para A y B, la utilidad por libra es $p_{\text{A}} - 2$ y $p_{\text{B}} - 3$, respectivamente. Así,

$$\begin{aligned} P &= (p_{\text{A}} - 2)q_{\text{A}} + (p_{\text{B}} - 3)q_{\text{B}} \\ &= (p_{\text{A}} - 2)[400(p_{\text{B}} - p_{\text{A}})] + (p_{\text{B}} - 3)[400(9 + p_{\text{A}} - 2p_{\text{B}})]. \end{aligned}$$

Note que P está expresada como una función de dos variables, p_{A} y p_{B}. Para maximizar P, hacemos sus derivadas parciales iguales a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial p_{\text{A}}} &= (p_{\text{A}} - 2)[400(-1)] + [400(p_{\text{B}} - p_{\text{A}})](1) + (p_{\text{B}} - 3)[400(1)] \\ &= 0 \qquad \text{(regla del producto)}, \\ \frac{\partial P}{\partial p_{\text{B}}} &= (p_{\text{A}} - 2)[400(1)] + (p_{\text{B}} - 3)[400(-2)] + 400(9 + p_A - 2p_B)](1) \\ &= 0 \qquad \text{(regla del producto)}. \end{aligned}$$

Al simplificar las dos ecuaciones anteriores resulta

$$\begin{cases} -2p_{\text{A}} + 2p_{\text{B}} - 1 = 0, \\ 2p_{\text{A}} - 4p_{\text{B}} + 13 = 0, \end{cases}$$

cuya solución es $p_{\text{A}} = 5.5$ y $p_{\text{B}} = 6$. Además, encontramos que

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_{\text{A}}^2} = -800, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial p_{\text{B}}^2} = -1600, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial p_{\text{B}} \partial p_{\text{A}}} = 800.$$

Por tanto,

$$D(5.5, 6) = (-800)(-1600) - (800)^2 > 0.$$

Como $\partial^2 P/\partial p_{\text{A}}^2 < 0$, tenemos un máximo, y la empresa debería vender el dulce A a \$5.50 por libra y el B a \$6.00 por libra.

■

[22] **EJEMPLO 8 Maximización de la utilidad de un monopolista**

Supóngase que un monopolista practica discriminación del precio al vender el mismo producto en dos mercados separados, a diferentes precios. Sea q_A el

[22]Omítase si no se estudió la sección 16.6.

número de unidades vendidas en el mercado A, donde la función de demanda es $p_A = f(q_A)$, y sea q_B el número de unidades vendidas en el mercado B, donde la función de demanda es $p_B = g(q_B)$. Entonces las funciones de ingreso para los dos mercados son

$$r_A = q_A f(q_A) \quad \text{y} \quad r_B = q_B g(q_B).$$

Suponga que todas las unidades se producen en una planta, y que la función de costo por producir $q(= q_A + q_B)$ unidades es $c = c(q)$. Tenga en mente que r_A es una función de q_A y r_B es una función de q_B. La utilidad, P, del monopolista es

$$P = r_A + r_B - c.$$

Para maximizar P con respecto a las producciones q_A y q_B, igualamos a 0 sus derivadas parciales. Comenzamos con

$$\frac{\partial P}{\partial q_A} = \frac{dr_A}{dq_A} + 0 - \frac{\partial c}{\partial q_A}$$

$$= \frac{dr_A}{dq_A} - \frac{dc}{dq}\frac{\partial q}{\partial q_A} = 0 \qquad \text{(regla de la cadena).}$$

Como

$$\frac{\partial q}{\partial q_A} = \frac{\partial}{\partial q_A}(q_A + q_B) = 1,$$

tenemos

$$\frac{\partial P}{\partial q_A} = \frac{dr_A}{dq_A} - \frac{dc}{dq} = 0. \qquad (6)$$

De modo similar,

$$\frac{\partial P}{\partial q_B} = \frac{dr_B}{dq_B} - \frac{dc}{dq} = 0. \qquad (7)$$

De las ecuaciones (6) y (7) obtenemos

$$\frac{dr_A}{dq_A} = \frac{dc}{dq} = \frac{dr_B}{dq_B}.$$

Pero dr_A/dq_A y dr_B/dq_B son ingresos marginales y dc/dq es costo marginal. Por tanto, para maximizar la utilidad, es necesario establecer los precios (y distribuir la producción) de tal manera que los ingresos marginales en ambos mercados sean los mismos y, hablando en términos no muy estrictos, también sean iguales al costo de la última unidad producida en la planta.

Ejercicio 16.7

En los problemas del 1 al 6 encuentre los puntos críticos de las funciones.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5x + 4y + xy.$

2. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 6x + 16y.$

3. $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 + 1.5y^2 - 12x - 90y.$

4. $f(x, y) = xy - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$

5. $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + 100 - z(x + y - 200).$

6. $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 - w(x - y + 2z - 6).$

En los problemas del 7 al 20 encuentre los puntos de las funciones. Para cada punto crítico, determine, por medio de la prueba de la segunda derivada, si corresponde a un máximo relativo, a un mínimo relativo, a ninguno de los dos, o si la prueba no da información.

7. $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4x - 9y + 3.$

8. $f(x, y) = -2x^2 + 8x - 3y^2 + 24y + 7.$

9. $f(x, y) = y - y^2 - 3x - 6x^2.$

10. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 9x + 1.$

11. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2 + y - 5.$

12. $f(x, y) = \dfrac{x^3}{3} + y^2 - 2x + 2y - 2xy.$

13. $f(x, y) = \dfrac{1}{3}(x^3 + 8y^3) - 2(x^2 + y^2) + 1.$

14. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x^3.$

15. $f(l, k) = 2lk - l^2 + 264k - 10l - 2k^2.$

16. $f(l, k) = l^3 + k^3 - 3lk.$

17. $f(p, q) = pq - \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}.$

18. $f(x, y) = (x - 3)(y - 3)(x + y - 3).$

19. $f(x, y) = (y^2 - 4)(e^x - 1).$

20. $f(x, y) = \ln(xy) + 2x^2 - xy - 6x.$

En los problemas del 21 al 35, a menos que se indique otra cosa, las variables p_A y p_B denotan los precios de venta de los productos A y B, *respectivamente. En forma análoga, q_A y q_B denotan cantidades de* A y B *producidas y vendidas durante algún periodo. En todos los casos se supondrá que las variables usadas son unidades de producción, insumo, dinero, etcétera.*

21. Maximización de la producción Suponga que

$$P = f(l, k) = 1.08l^2 - 0.03l^3 + 1.68k^2 - 0.08k^3$$

es una función de producción para una empresa. Encuentre las cantidades de entrada, l y k, que maximizan la producción P.

22. Maximización de la producción En cierto proceso manufacturero automatizado, las máquinas M y N se utilizan m y n horas, respectivamente. Si la producción diaria Q es una función de m y n, dada por

$$Q = 4.5m + 5n - 0.5m^2 - n^2 - 0.25mn,$$

encuentre los valores de m y n que maximizan a Q.

23. Utilidad Una empresa produce dos tipos de dulces, A y B, para los cuales los costos promedio de producción son constantes de 60 y 70 (centavos por libra), respectivamente. Las funciones de demanda para A y B están dadas por

$$q_A = 5(p_B - p_A) \quad \text{y} \quad q_B = 500 + 5(p_A - 2p_B).$$

Encuentre los precios de venta p_A y p_B que maximicen la ganancia de la empresa.

24. Utilidad Repita el problema 23, si los costos constantes de producción de A y B son a y b (centavos por libra), respectivamente.

25. Discriminación del precio Suponga que un monopolista practica la discriminación del precio en la venta de un producto, cobrando diferentes precios en dos mercados separados. En el mercado A la función de demanda es

$$p_A = 100 - q_A,$$

y en B es

$$p_B = 84 - q_B,$$

donde q_A y q_B son las cantidades vendidas por semana de A y de B, y p_A y p_B son los precios respectivos por unidad. Si la función de costo del monopolista es

$$c = 600 + 4(q_A + q_B),$$

¿cuánto debe venderse en cada mercado para maximizar la utilidad? ¿Qué precios de venta dan la utilidad máxima? Encuentre la utilidad máxima.

26. Utilidad Un monopolista vende dos productos competitivos A y B, para los cuales las funciones de demanda son

$$q_A = 1 - 2p_A + 4p_B \quad \text{y} \quad q_B = 11 + 2p_A - 6p_B.$$

Si el costo promedio constante de producir una unidad de A es 4 y para una unidad de B es 1, ¿cuántas unidades de A y de B tienen que venderse para maximizar la utilidad del monopolista?

27. Utilidad Para los productos A y B, la función de costos conjuntos es

$$c = 1.5q_A^2 + 4.5q_B^2,$$

y las funciones de demanda son $p_A = 36 - q_A^2$ y $p_B = 30 - q_B^2$. Encuentre el nivel de producción que maximiza la utilidad.

28. Utilidad Para los productos A y B de un monopolista, la función de costos conjuntos es $c = (q_A + q_B)^2$ y las funciones de demanda son $q_A = 26 - p_A$ y $q_B = 10 - 0.25\,p_B$. Encuentre los valores de p_A y p_B que maximizan la utilidad. ¿Cuáles son las cantidades de A y B que corresponden a esos precios? ¿Cuál es la utilidad total?

29. Costo Una caja rectangular sin tapa debe tener un volumen de 6 pies^3. El costo por pie cuadrado de material es de \$3 para el fondo, \$1 para el frente y la parte de atrás, y \$0.50 para los otros dos lados. Encuentre las dimensiones de la caja de manera que el costo de los materiales sea mínimo (véase la fig. 16.15).

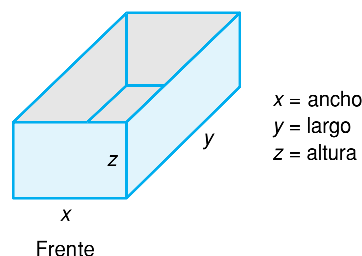


FIGURA 16.15 Diagrama para el problema 29.

30. Colusión Suponga que A y B son las únicas dos empresas en el mercado que venden el mismo producto (decimos que son *duopolistas*). La función de demanda industrial para el producto está dada por

$$p = 92 - q_A - q_B,$$

en donde q_A y q_B denotan la producción y venta de A y B, respectivamente. Para A, la función de costo es $c_A = 10q_A$; para B, es $c_B = 0.5q_B^2$. Suponga que las compañías deciden entrar en un acuerdo sobre el control de precios y producción para actuar en conjunto como un monopolio. En este caso, decimos que entran en una *colusión*. Demuestre que la función de utilidad para el monopolio está dada por

$$P = pq_A - c_A + pq_B - c_B.$$

Exprese P en función de q_A y q_B, y determine cómo debe distribuirse la producción para maximizar la utilidad del monopolio.

31. Suponga que $f(x, y) = -2x^2 + 5y^2 + 7$, donde x y y deben satisfacer la ecuación $3x - 2y = 7$. Encuentre los extremos relativos de f sujetos a la condición dada de x y y, despejando primero a y en la segunda ecuación. Sustituya el resultado para y en la ecuación dada. Así, f se expresa como función de una variable para la cual sus extremos pueden encontrarse de la manera usual.

32. Repita el problema 31 con $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 6$ sujeta a la condición de que $2x - 8y = 20$.

33. Suponga que la función de costos conjuntos

$$c = q_A^2 + 3q_B^2 + 2q_Aq_B + aq_A + bq_B + d$$

tiene un valor mínimo relativo de 15 cuando $q_A = 3$ y $q_B = 1$. Determine los valores de las constantes a, b y d.

34. Suponga que la función de producción $q = f(k, l)$ tiene un valor máximo relativo cuando $k = 35$ y $l = 30$. También suponga que todas las segundas derivadas de f existen en el punto $(35, 30)$ y que $f_{kk}(35, 30) = 0$.

a. Determine si
- (i) $f_{kl}(35, 30)$ es un número positivo,
- (ii) $f_{kl}(35, 30)$ es un número negativo, o
- (iii) $f_{kl}(35, 30)$ es cero, o
- (iv) si es imposible obtener alguna de estas conclusiones.

b. Determine si
- (i) $f_{ll}(35, 30)$ debe ser positivo,
- (ii) $f_{ll}(35, 30)$ debe ser negativo, o
- (iii) $f_{ll}(35, 30)$ debe ser cero, o
- (iv) si es imposible obtener alguna de estas conclusiones.

35. Utilidad de productos competitivos Un monopolista vende dos productos competitivos, A y B, cuyas ecuaciones de demanda son

$$p_A = 35 - 2q_A^2 + q_B$$

y

$$p_B = 20 - q_B + q_A.$$

La función de costos conjuntos es

$$c = -8 - 2q_A^3 + 3q_Aq_B + 30q_A + 12q_B + \tfrac{1}{2}q_A^2.$$

a. ¿Cuántas unidades de A y B tienen que venderse para que el monopolista obtenga una utilidad máxima relativa? Use la prueba de la segunda derivada para justificar su respuesta.

b. Determine los precios de venta requeridos para obtener la utilidad máxima relativa. Encuentre también esta utilidad máxima relativa.

36. Utilidad y publicidad Un detallista ha determinado que el número de aparatos de televisión que puede vender por semana es

$$\frac{4x}{5 + x} + \frac{2y}{10 + y},$$

donde x y y representan sus gastos semanales (en dólares) por publicidad en periódicos y radio, respectivamente. La utilidad es de $125 por venta menos el costo de la publicidad, de modo que su utilidad semanal P está dada por la fórmula

$$P = 125\left[\frac{4x}{5 + x} + \frac{2y}{10 + y}\right] - x - y.$$

Encuentre los valores de x y de y para los cuales la utilidad es un máximo relativo. Use la prueba de la segunda derivada para verificar que su respuesta corresponde a una utilidad máxima relativa.

37. Utilidad de una cosecha de tomates El rendimiento r (en dólares por metro cuadrado de terreno) obtenido en la venta de una cosecha de tomates cultivados artificialmente en un invernadero está dado por

$$r = 5T(1 - e^{-x}),$$

donde T es la temperatura (en °C) mantenida en el invernadero y x es la cantidad de fertilizante empleado por metro cuadrado. El costo del fertilizante es $20x$ dólares por metro cuadrado y el costo del calentamiento está dado por $0.1T^2$ dólares por metro cuadrado.

a. Encuentre una expresión, en términos de T y x, para la utilidad por metro cuadrado que se obtiene por la venta de la cosecha de tomates.

b. Verifique que las parejas

$$(T, x) = (20, \ln 5) \quad \text{y} \quad (T, x) = (5, \ln \tfrac{5}{4})$$

son puntos críticos de la función de utilidad en la parte (a). [*Nota:* no tiene que obtener los pares.]

c. Los puntos en la parte (b) son los únicos puntos críticos de la función de utilidad de la parte (a). Use la prueba de la segunda derivada para determinar si cualquiera de esos puntos corresponde a una utilidad máxima relativa por metro cuadrado.

OBJETIVO Determinar puntos críticos para una función sujeta a restricciones, aplicando el método de multiplicadores de Lagrange.

16.8 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Ahora encontraremos los máximos y mínimos relativos de una función a la cual se imponen ciertas *restricciones*. Tal situación podría surgir si un fabricante desea minimizar una función de costos conjuntos y obtener un nivel particular de producción.

Suponga que queremos encontrar los extremos relativos de

$$w = x^2 + y^2 + z^2, \tag{1}$$

sujeta a la restricción de que x, y y z deben satisfacer

$$x - y + 2z = 6. \tag{2}$$

Podemos transformar w, que es una función de tres variables, en una función de dos variables tal que la nueva función refleje la restricción (2). Despejando x en la ecuación (2), obtenemos

$$x = y - 2z + 6, \tag{3}$$

que al sustituirla por x en la ecuación (1), da

$$w = (y - 2z + 6)^2 + y^2 + z^2. \tag{4}$$

Como ahora, w está expresada como función de dos variables, para encontrar los extremos relativos seguimos el procedimiento usual de hacer igual a 0 sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2(y - 2z + 6) + 2y = 4y - 4z + 12 = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -4(y - 2z + 6) + 2z = -4y + 10z - 24 = 0. \tag{6}$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (5) y (6) obtenemos $y = -1$ y $z = 2$. Sustituyendo en la ecuación (3), obtenemos $x = 1$. Por tanto, el único punto crítico de la ecuación (1) sujeta a la restricción representada por la ecuación (2) es $(1, -1, 2)$. Si usamos la prueba de la segunda derivada en (4) cuando $y = -1$ y $z = 2$, tenemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial y} = -4,$$

$$D(-1, 2) = 4(10) - (-4)^2 = 24 > 0.$$

Así, w sujeta a tal restricción, tiene un mínimo relativo en $(1, -1, 2)$.

Esta solución se encontró usando la restricción para expresar una de las variables en la función original en términos de las otras variables. A menudo esto no es práctico, pero existe otro procedimiento llamado método de los **multiplicadores de Lagrange,**[23] que evita este paso y nos permite, no obstante, encontrar los puntos críticos.

El método es como sigue. Suponga que tenemos una función $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$. Construimos una función nueva, F, de *cuatro* variables, definida por la siguiente expresión (donde λ es la letra griega "lambda"):

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z).$$

Puede demostrarse que si (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de f sujeto a la restricción $g(x, y, z) = 0$, existirá un valor de λ, digamos λ_0, tal que $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ es

[23]En honor del matemático francés, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

un punto crítico de F. El número λ_0 se llama **multiplicador de Lagrange.** Además, si $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ es un punto crítico de F, entonces (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de f, sujeto a la restricción. Así, para encontrar los puntos críticos de f, sujetos a $g(x, y, z) = 0$, buscamos los puntos críticos de F. Éstos se obtienen resolviendo las ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases} F_x(x, y, z, \lambda) = 0, \\ F_y(x, y, z, \lambda) = 0, \\ F_z(x, y, z, \lambda) = 0, \\ F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0. \end{cases}$$

A veces debe usarse el ingenio para hacer esto. Una vez que obtenemos un punto crítico $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ de F, podemos concluir que (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de f, sujeto a la restricción $g(x, y, z) = 0$. Aunque f y g son funciones de tres variables, el método de los multiplicadores de Lagrange puede extenderse a n variables.

Ilustremos el método de los multiplicadores de Lagrange para el caso original, a saber,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{sujeta a} \quad x - y + 2z = 6.$$

Primero, escribimos la restricción como $g(x, y, z) = x - y + 2z - 6 = 0$. Segundo, formamos la función

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x - y + 2z - 6). \end{aligned}$$

A continuación, hacemos cada derivada parcial de F igual a 0. Por conveniencia escribiremos $F_x(x, y, z, \lambda)$ como F_x, y así sucesivamente:

$$\begin{cases} F_x = 2x - \lambda = 0, & (7) \\ F_y = 2y + \lambda = 0, & (8) \\ F_z = 2z - 2\lambda = 0, & (9) \\ F_\lambda = -x + y - 2z + 6 = 0. & (10) \end{cases}$$

De las ecuaciones (7), (8) y (9), de inmediato vemos que

$$x = \frac{\lambda}{2}, \quad y = -\frac{\lambda}{2}, \quad \text{y} \quad z = \lambda. \qquad (11)$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (10), obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} - 2\lambda + 6 &= 0, \\ -3\lambda + 6 &= 0, \\ \lambda &= 2. \end{aligned}$$

Así, de la ecuación (11),

$$x = 1, \quad y = -1, \quad \text{y} \quad z = 2.$$

Por tanto, el único punto crítico de f, sujeto a la restricción, es $(1, -1, 2)$, donde puede existir un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de éstos. El método de los multiplicadores de Lagrange no indica directamente cuál de estas posibilidades se presentará, aunque por lo visto antes sabemos que se trata de un mínimo relativo. En los problemas de aplicación, la naturaleza del problema puede darnos una idea de cómo considerar un punto crítico. A menudo

se supone la existencia ya sea de un mínimo relativo o de un máximo relativo y un punto crítico, se trata de acuerdo con tal hipótesis. En realidad se dispone de condiciones de segundo orden suficientes para los extremos relativos, pero no las consideraremos aquí.

EJEMPLO 1 Método de los multiplicadores de Lagrange

Encontrar los puntos críticos para $z = f(x, y) = 3x - y + 6$ *sujeta a la restricción* $x^2 + y^2 = 4$.

Solución: escribimos la restricción como $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ y formamos la función

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 3x - y + 6 - \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Haciendo $F_x = F_y = F_\lambda = 0$, tenemos:

$$\begin{cases} 3 - 2x\lambda = 0, & (12) \\ -1 - 2y\lambda = 0, & (13) \\ -x^2 - y^2 + 4 = 0. & (14) \end{cases}$$

Con las ecuaciones (12) y (13) podemos expresar x y y en términos de λ. Luego sustituimos los valores de x y y en la ecuación (14) y despejamos λ. Conocida λ, podemos encontrar x y y. Para comenzar, de las ecuaciones (12) y (13), tenemos

$$x = \frac{3}{2\lambda} \quad \text{y} \quad y = -\frac{1}{2\lambda}.$$

Al sustituir en la ecuación (14), obtenemos

$$-\frac{9}{4\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} + 4 = 0,$$

$$-\frac{10}{4\lambda^2} + 4 = 0,$$

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Con estos valores de λ, podemos encontrar x y y. Si $\lambda = \sqrt{10}/4$, entonces

$$x = \frac{3}{2\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)} = \frac{3\sqrt{10}}{5}, \qquad y = -\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)} = -\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

De modo similar, si $\lambda = -\sqrt{10}/4$,

$$x = -\frac{3\sqrt{10}}{5}, \qquad y = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Entonces, los puntos críticos de f sujetos a la restricción son $(3\sqrt{10}/5, -\sqrt{10}/5)$ y $(-3\sqrt{10}/5, \sqrt{10}/5)$. Observe que los valores de λ no aparecen en la respuesta; son sólo un medio para obtenerla.

EJEMPLO 2 Método de los multiplicadores de Lagrange

Encontrar los puntos críticos para $f(x, y, z) = xyz$, *donde* $xyz \neq 0$, *sujeta a la restricción* $x + 2y + 3z = 36$.

Solución: tenemos

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x + 2y + 3z - 36).$$

Si hacemos $F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0$ resulta, respectivamente,

$$\begin{cases} yz - \lambda = 0, \\ xz - 2\lambda = 0, \\ xy - 3\lambda = 0, \\ -x - 2y - 3z + 36 = 0. \end{cases}$$

Como no podemos expresar directamente a x, y y z sólo en términos de λ, no podemos seguir el procedimiento usado en el ejemplo 1. Sin embargo, observe que podemos expresar los productos yz, xz y xy como múltiplos de λ. Esto sugiere que si nos fijamos en los cocientes de las ecuaciones, podemos obtener una relación entre dos variables que no contengan a λ (las lambdas se cancelarán). Para proceder a hacer esto, escribimos el sistema anterior de la siguiente manera:

$$\begin{cases} yz = \lambda, & (15) \\ xz = 2\lambda, & (16) \\ xy = 3\lambda, & (17) \\ x + 2y + 3z - 36 = 0. & (18) \end{cases}$$

Al dividir cada lado de la ecuación (15) entre el lado correspondiente de la ecuación (16), obtenemos

$$\frac{yz}{xz} = \frac{\lambda}{2\lambda}, \quad \text{o} \quad y = \frac{x}{2}.$$

Esta división es válida ya que $xyz \neq 0$. Similarmente, de las ecuaciones (15) y (17), obtenemos

$$\frac{yz}{xy} = \frac{\lambda}{3\lambda}, \quad \text{o} \quad z = \frac{x}{3}.$$

Ahora que hemos expresado y y z sólo en términos de x, podemos sustituir en la ecuación (18) y despejar x:

$$x + 2\left(\frac{x}{2}\right) + 3\left(\frac{x}{3}\right) - 36 = 0,$$

$$x = 12.$$

Así, $y = 6$ y $z = 4$. De aquí que $(12, 6, 4)$ es el único punto crítico que satisface las condiciones dadas. Note que en este caso encontramos el punto crítico sin tener que calcular el valor de λ.

EJEMPLO 3 Minimización de costos

Supóngase que una empresa ha recibido un pedido por 200 *unidades de su producto y desea distribuir su fabricación entre dos de sus plantas, planta* 1 *y planta* 2. *Sean* q_1 *y* q_2 *las producciones de las plantas* 1 *y* 2, *respectivamente, y supóngase que la función de costo total está dada por* $c = f(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 200$. *¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos?*

Solución: minimizamos $c = f(q_1, q_2)$ dada la restricción $q_1 + q_2 = 200$. Tenemos

$$F(q_1, q_2, \lambda) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 200 - \lambda(q_1 + q_2 - 200),$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial q_1} = 4q_1 + q_2 - \lambda = 0, & \textbf{(19)} \\ \dfrac{\partial F}{\partial q_2} = q_1 + 2q_2 - \lambda = 0, & \textbf{(20)} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -q_1 - q_2 + 200 = 0. & \textbf{(21)} \end{cases}$$

Podemos eliminar λ de las ecuaciones (19) y (20) y obtener una relación entre q_1 y q_2. Después, al despejar q_2 en términos de q_1 y sustituir en la ecuación (21), podemos encontrar q_1. Comenzamos restando la ecuación (20) de la (19), lo que nos da

$$3q_1 - q_2 = 0, \quad \text{por lo que} \quad q_2 = 3q_1.$$

Al sustituir en la ecuación (21), tenemos

$$\begin{aligned} -q_1 - 3q_1 + 200 &= 0, \\ -4q_1 &= -200, \\ q_1 &= 50. \end{aligned}$$

Así, $q_2 = 150$. La planta 1 debe producir 50 unidades y 150 la planta 2, para minimizar los costos.

Puede hacerse una observación interesante con respecto al ejemplo 3. De la ecuación (19), $\lambda = 4q_1 + q_2 = \partial c/\partial q_1$, que es el costo marginal de la planta 1. De la ecuación (20), $\lambda = q_1 + 2q_2 = \partial c/\partial q_2$ que es el costo marginal de la planta 2. Por consiguiente, $\partial c/\partial q_1 = \partial c/\partial q_2$, y concluimos que para minimizar el costo es necesario que los costos marginales de cada planta sean iguales entre sí.

EJEMPLO 4 Combinación de insumo para tener un costo mínimo

Supóngase que una empresa debe producir una cantidad dada P_0 de un producto de la manera más barata posible. Si se tienen dos factores de entrada, l y k, y sus precios por unidad se fijan en p_l y p_k, respectivamente, analice el significado económico de combinar las entradas (insumos) para lograr el menor costo. Esto es, describa la combinación de insumos para tener un costo mínimo.

Solución: sea $P = f(l, k)$ la función de producción. Entonces, debemos minimizar la función costo

$$c = lp_l + kp_k,$$

sujeta a

$$P_0 = f(l, k).$$

Construimos

$$F(l, k, \lambda) = lp_l + kp_k - \lambda[f(l, k) - P_0].$$

Tenemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial l} = p_l - \lambda\dfrac{\partial}{\partial l}[f(l, k)] = 0, & \textbf{(22)} \\ \dfrac{\partial F}{\partial k} = p_k - \lambda\dfrac{\partial}{\partial k}[f(l, k)] = 0, & \textbf{(23)} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -f(l, k) + P_0 = 0. & \end{cases}$$

De las ecuaciones (22) y (23),

$$\lambda = \frac{p_l}{\dfrac{\partial}{\partial l}[f(l,k)]} = \frac{p_k}{\dfrac{\partial}{\partial k}[f(l,k)]}. \quad \textbf{(24)}$$

Por consiguiente,

$$\frac{p_l}{p_k} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial l}[f(l,k)]}{\dfrac{\partial}{\partial k}[f(l,k)]}.$$

Concluimos que cuando se usa la combinación de factores para costo mínimo, la razón de las productividades marginales de los factores de entrada debe ser igual a la de sus precios unitarios correspondientes.

Restricciones múltiples

El método de los multiplicadores de Lagrange no está limitado a problemas con una sola restricción. Por ejemplo, suponga que $f(x, y, z, w)$ está sujeta a las restricciones $g_1(x, y, z, w) = 0$ y $g_2(x, y, z, w) = 0$. Entonces, se tienen dos lambdas, λ_1 y λ_2 (una para cada restricción) y construimos la función $F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$. Resolvemos entonces el sistema

$$F_x = F_y = F_z = F_w = F_{\lambda_1} = F_{\lambda_2} = 0.$$

EJEMPLO 5 Método de los multiplicadores de Lagrange con dos restricciones

Encontrar los puntos críticos para $f(x, y, z) = xy + yz$, sujeta a las restricciones $x^2 + y^2 = 8$ y $yz = 8$.

Solución: sea

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xy + yz - \lambda_1(x^2 + y^2 - 8) - \lambda_2(yz - 8).$$

Entonces

$$\begin{cases} F_x = y - 2x\lambda_1 = 0, \\ F_y = x + z - 2y\lambda_1 - z\lambda_2 = 0, \\ F_z = y - y\lambda_2 = 0, \\ F_{\lambda_1} = -x^2 - y^2 + 8 = 0, \\ F_{\lambda_2} = -yz + 8 = 0. \end{cases}$$

Probablemente, usted estaría de acuerdo con que este sistema da la impresión de ser difícil de resolver. Sin embargo, con un poco de ingenio puede ser resuelto. Enseguida mostramos una secuencia de operaciones que nos permitirá encontrar los puntos críticos. Podemos escribir el sistema como

$$\begin{cases} \dfrac{y}{2x} = \lambda_1, & \textbf{(25)} \\ x + z - 2y\lambda_1 - z\lambda_2 = 0, & \textbf{(26)} \\ \lambda_2 = 1, & \textbf{(27)} \\ x^2 + y^2 = 8, & \textbf{(28)} \\ z = \dfrac{8}{y}. & \textbf{(29)} \end{cases}$$

Al sustituir $\lambda_2 = 1$ de la ecuación (27) en la ecuación (26) y simplificar obtenemos la ecuación $x - 2y\lambda_1 = 0$, por lo que

$$\lambda_1 = \frac{x}{2y}.$$

De nuevo sustituimos, ahora en la ecuación (25) y resulta

$$\frac{y}{2x} = \frac{x}{2y},$$

$$y^2 = x^2. \qquad (30)$$

Sustituyendo en la ecuación (28) se obtiene $x^2 + x^2 = 8$, de donde $x = \pm 2$. Si $x = 2$, entonces, de la ecuación (30) tenemos $y = \pm 2$. Similarmente, si $x = -2$, entonces $y = \pm 2$. Así, si $x = 2$, y $y = 2$, entonces de la ecuación (29) obtenemos $z = 4$. Continuando este procedimiento obtenemos cuatro puntos críticos:

$$(2, 2, 4), (2, -2, -4), (-2, 2, 4) \text{ y } (-2, -2, -4).$$

Ejercicio 16.8

En los problemas del 1 al 12 encuentre por el método de los multiplicadores de Lagrange, los puntos críticos de las funciones sujetas a las restricciones indicadas.

1. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 6;\quad 2x - 8y = 20.$

2. $f(x, y) = -2x^2 + 5y^2 + 7;\quad 3x - 2y = 7.$

3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;\quad 2x + y - z = 9.$

4. $f(x, y, z) = x + y + z;\quad xyz = 27.$

5. $f(x, y, z) = x^2 + xy + 2y^2 + z^2;\quad x - 3y - 4z = 16.$

6. $f(x, y, z) = xyz^2;\quad x - y + z = 20\ (xyz^2 \neq 0).$

7. $f(x, y, z) = xyz;\quad x + 2y + 3z = 18\ (xyz \neq 0).$

8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;\quad x + y + z = 3.$

9. $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2;\quad 2x - y = 0, y + z = 0.$

10. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;\quad x + y + z = 4,$ $x - y + z = 4$

11. $f(x, y, z) = xyz;\quad x + y + z = 12,$ $x + y - z = 0 (xyz \neq 0).$

12. $f(x, y, z, w) = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4w^2;$ $4x - 8y + 6z + 16w = 6.$

13. Asignación de producción Para surtir una orden de 100 unidades de su producto, una empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas, planta 1 y planta 2. La función de costo total está dada por

$$c = f(q_1, q_2) = 0.1q_1^2 + 7q_1 + 15q_2 + 1000,$$

donde q_1 y q_2 son los números de unidades producidas en las plantas 1 y 2, respectivamente. ¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos? (Suponga que el punto crítico obtenido corresponde al costo mínimo.)

14. Asignación de producción Repita el problema 13, si la función de costo es

$$c = 3q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2^2$$

y deben producirse un total de 200 unidades.

15. Maximización de la producción La función de producción de una empresa es

$$f(l, k) = 12l + 20k - l^2 - 2k^2.$$

El costo de l y k para la compañía es de 4 y 8 por unidade, respectivamente. Si la empresa quiere que el costo total de insumos sea 88, encuentre la producción máxima posible sujeta a este control de presupuesto (suponga que el punto crítico obtenido corresponde a una producción máxima).

16. Maximización de la producción Repita el problema 15, considerando que

$$f(l, k) = 60l + 30k - 2l^2 - 3k^2$$

y que la restricción de presupuesto es $2l + 3k = 30$.

17. Presupuesto para publicidad Una compañía de cómputo tiene un presupuesto mensual para publicidad de \$60,000. Su departamento de mercadotecnia estima que si se gastan x dólares cada mes en publicidad en periódicos, y y dólares cada mes en publicidad por televisión, entonces las ventas mensuales estarán dadas por $S = 90x^{1/4}y^{3/4}$ dólares. Si la utilidad es el 10% de las ventas, menos el costo de la publicidad, determine cómo asignar el presupuesto publicitario para maximizar la utilidad mensual (suponga que el punto crítico obtenido corresponde a una utilidad máxima).

18. Maximización de la producción Cuando se invierten l unidades de trabajo y k unidades de capital, la producción total, q, de un fabricante está dada por la función Cobb-Douglas de producción $q = 5l^{1/5}k^{4/5}$. Cada unidad de trabajo cuesta \$22 y cada unidad de capital \$66. Si se van a gastar exactamente \$23,760 en la producción, determine las unidades de trabajo y de capital que deben invertirse para maximizar la producción (suponga que el máximo se presenta en el punto crítico obtenido).

19. Propaganda política La publicidad de los partidos políticos en los periódicos siempre tiene algunos efectos negativos. El partido que fue electo recientemente, supuso que los tres temas más importantes, X, Y y Z, para la elección, debían mencionarse cada uno en un anuncio publicitario con espacios de x, y y z unidades, respectivamente. El efecto adverso combinado de esta publicidad se estimó como

$$B(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2.$$

Consideraciones estéticas determinaron que el espacio total para X y Y juntos debía ser 20, y consideraciones objetivas sugirieron que el espacio total asignado a Y y Z juntos debía ser también de 20 unidades. ¿Qué valores de x, y y z en cada anuncio produciría el menor efecto negativo? (Suponga que cualquier punto crítico obtenido representa un efecto mínimo.)

20. Maximización de la utilidad Suponga que la función de producción de un fabricante está dada por

$$16q = 65 - 4(l - 4)^2 - 2(k - 5)^2,$$

y que el costo para el fabricantes es de \$8 por unidad de trabajo y de \$16 por unidad de capital, de manera que el costo total (en dólares) es $8l + 16k$. El precio de venta del producto es de \$64 por unidad.

a. Exprese la utilidad en función del l y k. Dé su respuesta en forma desarrollada.

b. Encuentre todos los puntos críticos de la función de utilidad obtenida en la parte (a). Aplique la prueba de la segunda derivada en cada punto crítico. Si la utilidad es un máximo relativo en un punto crítico, calcule la utilidad máxima relativa correspondiente.

c. La utilidad puede considerarse como una función de l, k y q (esto es, $P = 64q - 8l - 16k$) sujeta a la restricción

$$16q = 65 - 4(l - 4)^2 - 2(k - 5)^2.$$

Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar todos los puntos críticos de $P = 64q - 8l - 16k$, sujeta a la restricción.

En los problemas del 21 al 24 remítase a la definición siguiente. Una función de utilidad (o satisfacción) es una función que asocia una medida a la utilidad o satisfacción que un cliente obtiene del consumo de productos por unidad de tiempo. Suponga que $U = f(x, y)$ es una función de este tipo, donde x y y son las cantidades de los dos productos, X y Y. La utilidad marginal de X es $\partial U/\partial x$ y representa, en forma aproximada, el cambio en la utilidad total que resulta al cambiar en una unidad el consumo del producto X por unidad de tiempo. Definimos la utilidad marginal de Y de manera similar. Si los precios de X y Y son p_x y p_y, respectivamente, y el consumidor tiene un ingreso o presupuesto de I para gastar, entonces la restricción por el presupuesto es

$$xp_x + yp_y = I.$$

En los problemas del 21 al 23 encuentre las cantidades de cada producto que el consumidor deberá comprar, sujeto al presupuesto, que le dará una satisfacción máxima. Esto es, en los problemas 21 y 22, encuentre valores de x y y que maximicen $U = f(x, y)$, sujeta a la restricción $xp_x + yp_y = I$. En el problema 23 lleve a cabo un procedimiento similar. Suponga que tal máximo existe.

21. $U = x^3y^3$; $p_x = 2, p_y = 3, I = 48$ $(x^3y^3 \neq 0)$.

22. $U = 46x - (5x^2/2) + 34y - 2y^2$; $p_x = 5, p_y = 2, I = 30$.

23. $U = f(x, y, z) = xyz$; $p_x = 2, p_y = 1, p_z = 4, I = 60$ $(xyz \neq 0)$.

---

24. Sea $U = f(x, y)$ una función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria $xp_x + yp_y = I$, donde p_x, p_y e I son constantes. Demuestre que para maximizar la satisfacción es necesario que

$$\lambda = \frac{f_x(x, y)}{p_x} = \frac{f_y(x, y)}{p_y},$$

donde $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son las utilidades marginales de X y Y, respectivamente. Demuestre que $f_x(x, y)/p_x$ es la utilidad marginal del valor de un dólar de X.

Por tanto, la satisfacción máxima se obtiene cuando el consumidor ajusta su presupuesto de manera que la utilidad marginal de un dólar de X sea igual a la utilidad marginal por dólar de Y. Procediendo igual que antes, verifique si esto es cierto para $U = f(x, y, z, w)$ sujeta a la correspondiente ecuación presupuestaria. En cada caso, λ se llama *utilidad marginal del ingreso*.

OBJETIVO Desarrollar el método de mínimos cuadrados e introducir los números índices.

16.9 RECTAS DE REGRESIÓN[24]

Para estudiar la influencia de la publicidad en las ventas, una empresa recopiló los datos mostrados en la tabla 16.4. La variable x denota los gastos de publicidad en cientos de dólares y la variable y denota el ingreso por ventas en miles de dólares. Si se grafica en un plano cada pareja (x, y) de datos, el resultado se llama **diagrama de dispersión** [véase la fig. 16.16(a)].

TABLA 16.4

Gastos, x	2	3	4.5	5.5	7
Ingresos, y	3	6	8	10	11

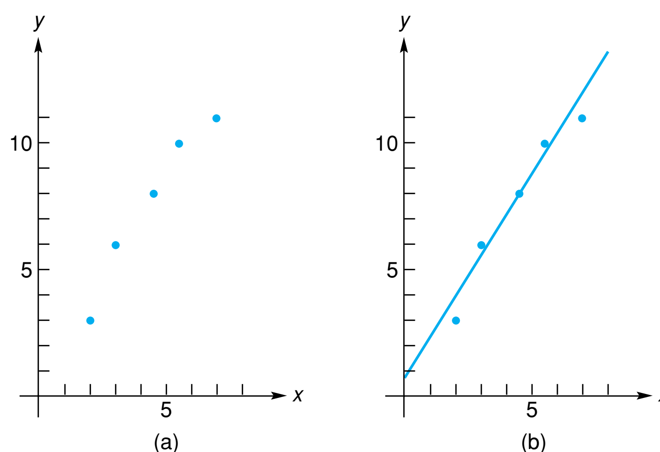


FIGURA 16.16 Diagrama de dispersión y la recta que aproxima los puntos de datos.

Al observar la distribución de los puntos, es razonable suponer que existe una relación aproximadamente lineal entre x y y. Con base en esto, podemos ajustar "a ojo" una recta que aproxime los datos dados [véase la fig. 16.16(b)] y con ella predecir un valor de y para un valor dado de x. Esta recta parece ser consistente con la tendencia de los datos, aunque igualmente podrían dibujarse otras rectas. Por desgracia, la determinación de una recta "a ojo" no es un procedimiento muy objetivo. Queremos aplicar criterios que especifiquen lo que entenderemos por la recta de "mejor ajuste". Una técnica usada con frecuencia es el **método de mínimos cuadrados.**

Para aplicar el método de los mínimos cuadrados a los datos de la tabla 16.4, suponemos primero que x y y están relacionados en una forma casi lineal

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x \tag{1}$$

[24]Puede omitirse sin pérdida de continuidad.

que aproxima los puntos dados si se escogen adecuadamente las constantes $\hat{a}$ y $\hat{b}$ (que se lee "*a* testada" y "*b* testada", respectivamente). Para un valor dado de x en la ecuación (1), $\hat{y}$ es el valor correspondiente predicho para y, y $(x, \hat{y})$ estará sobre la línea. Nuestro objetivo es que $\hat{y}$ esté cerca de y.

Cuando $x = 2$, el valor observado de y es 3. Nuestro valor predicho para y se obtiene sustituyendo $x = 2$ en la ecuación (1), lo que da $\hat{y} = \hat{a} + 2\hat{b}$. El error de estimación, o desviación vertical del punto, (2, 3) respecto a la recta, es $\hat{y} - y$, o

$$\hat{a} + 2\hat{b} - 3.$$

Esta desviación vertical se indica (en forma exagerada para mayor claridad) en la figura 16.17. Similarmente, la desviación vertical de (3, 6) respecto a la línea es $\hat{a} + 3\hat{b} - 6$, como también se ilustra. Para evitar posibles dificultades

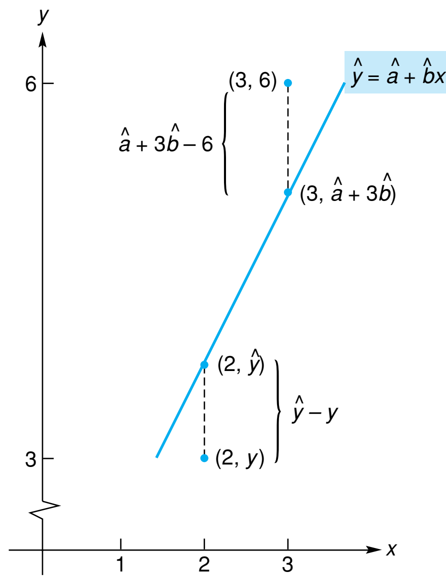


FIGURA 16.17 Desviación vertical de los puntos de datos de la recta de aproximación.

asociadas con las desviaciones positivas y negativas, consideraremos los cuadrados de las desviaciones y formaremos la suma S de todos esos cuadrados para los datos dados:

$$S = (\hat{a} + 2\hat{b} - 3)^2 + (\hat{a} + 3\hat{b} - 6)^2 + (\hat{a} + 4.5\hat{b} - 8)^2 +$$

$$(\hat{a} + 5.5\hat{b} - 10)^2 + (\hat{a} + 7\hat{b} - 11)^2.$$

El método de mínimos cuadrados requiere que se escoja como línea de "mejor ajuste" la obtenida al seleccionar $\hat{a}$ y $\hat{b}$ de manera que minimicen S. Podemos minimizar S con respecto a $\hat{a}$ y $\hat{b}$ si resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \hat{a}} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial \hat{b}} = 0. \end{cases}$$

Tenemos

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{a}} = 2(\hat{a} + 2\hat{b} - 3) + 2(\hat{a} + 3\hat{b} - 6) + 2(\hat{a} + 4.5\hat{b} - 8) + 2(\hat{a} + 5.5\hat{b} - 10) + 2(\hat{a} + 7\hat{b} - 11) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{b}} = 4(\hat{a} + 2\hat{b} - 3) + 6(\hat{a} + 3\hat{b} - 6) + 9(\hat{a} + 4.5\hat{b} - 8) + 11(\hat{a} + 5.5\hat{b} - 10) + 14(\hat{a} + 7\hat{b} - 11) = 0,$$

que al simplificarlo queda

$$\begin{cases} 5\hat{a} + 22\hat{b} = 38, \\ 44\hat{a} + 225\hat{b} = 384. \end{cases}$$

Despejando $\hat{a}$ y $\hat{b}$ obtenemos

$$\hat{a} = \frac{102}{157} \approx 0.65, \quad \hat{b} = \frac{248}{157} \approx 1.58.$$

Puede demostrarse que estos valores de $\hat{a}$ y $\hat{b}$ conducen a un valor mínimo de S. Por tanto, desde el punto de vista de mínimos cuadrados, la línea de mejor ajuste $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ es

$$\hat{y} = 0.65 + 1.58x. \tag{2}$$

Ésta es, de hecho, la recta indicada en la figura 16.16(b). Se llama **recta de mínimos cuadrados de *y* sobre *x*** o **recta de regresión de *y* sobre *x*.** Las constantes $\hat{a}$ y $\hat{b}$ se llaman **coeficientes de regresión lineal.** Con la ecuación (2) podemos predecir que cuando $x = 5$, el valor correspondiente de y es $\hat{y} = 0.65 + 1.58(5) = 8.55$.

En general, suponga que nos dan los siguientes pares n de observaciones:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n).$$

Si suponemos que x y y están más o menos relacionadas en forma lineal y que podemos ajustarlas a una recta

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

que se aproxime a los datos, la suma de los cuadrados de los errores $\hat{y} - y$ es

$$S = (\hat{a} + \hat{b}x_1 - y_1)^2 + (\hat{a} + \hat{b}x_2 - y_2)^2 + \cdots + (\hat{a} + \hat{b}x_n - y_n)^2.$$

Como S debe minimizarse con respecto a $\hat{a}$ y $\hat{b}$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \hat{a}} = 2(\hat{a} + \hat{b}x_1 - y_1) + 2(\hat{a} + \hat{b}x_2 - y_2) + \cdots + 2(\hat{a} + \hat{b}x_n - y_n) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial \hat{b}} = 2x_1(\hat{a} + \hat{b}x_1 - y_1) + 2x_2(\hat{a} + \hat{b}x_2 - y_2) + \cdots + 2x_n(\hat{a} + \hat{b}x_n - y_n) = 0. \end{cases}$$

Al dividir ambas ecuaciones entre 2 y usando la notación sigma, tenemos

$$\begin{cases} \hat{a}n + \hat{b}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0, \\ \hat{a}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0. \end{cases}$$

En forma equivalente, tenemos el sistema de las llamadas *ecuaciones normales:*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = \hat{a}n + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i, & (3) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \hat{a}\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} x_i^2. & (4) \end{cases}$$

Para despejar $\hat{b}$ multiplicamos primero la ecuación (3) por $\sum_{i=1}^{n} x_i$ y la ecuación (4) por n:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \hat{a}n\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2, & (5) \\ n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \hat{a}n\sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}n\sum_{i=1}^{n} x_i^2. & (6) \end{cases}$$

Restamos la ecuación (5) de la (6) y obtenemos

$$\begin{aligned} n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) &= \hat{b}n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \hat{b}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \\ &= \hat{b}\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Así,

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \quad (7)$$

Al despejar $\hat{a}$ de las ecuaciones (3) y (4) se obtiene

$$\hat{a} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \quad (8)$$

Puede demostrarse que esos valores de $\hat{a}$ y $\hat{b}$ minimizan a S.

Si calculamos los coeficientes de regresión lineal $\hat{a}$ y $\hat{b}$ con las fórmulas de las ecuaciones (7) y (8), obtendremos la recta de regresión de y sobre x, esto es, $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$, que puede usarse para estimar y para un valor dado de x.

En el siguiente ejemplo, así como en los ejercicios, usted encontrará **números índice.** Éstos se usan para relacionar una variable en un periodo con la misma variable en otro periodo; este último es llamado *periodo base*. Un número índice es un número *relativo* para describir datos que cambian con el tiempo. Tales datos se denominan *series de tiempo*.

Por ejemplo, considere los datos de la serie de tiempo de la producción total de dispositivos mecánicos en Estados Unidos de 1993 a 1997, que se muestran en la tabla 16.5. Si escogemos 1994 como el año base y le asignamos el número índice 100, entonces los otros números se obtienen dividiendo cada producción anual entre la producción de 1994, que fue 900, y multiplicando el resultado por 100. Por ejemplo, podemos interpretar el índice 106 de 1997 con el significado de que la producción en ese año fue del 106% en relación con la de 1994.

En los análisis de series de tiempo, los números índice son obviamente de gran utilidad cuando los datos implican números de gran magnitud. Pero en

TABLA 16.5

Año	Producción (en miles)	Índice [1994=100]
1993	828	92
1994	900	100
1995	936	104
1996	891	99
1997	954	106

forma independiente de la magnitud de los datos, los números índices simplifican la tarea de comparar cambios en los datos a lo largo de periodos.

EJEMPLO 1 Determinación de una recta de regresión

Por medio de la recta de regresión lineal, usar los datos de la tabla siguiente para representar la tendencia del índice de compras de bienes y servicios del gobierno de Estados Unidos entre 1995 *y* 2000 (1995 = 100).

Año	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**
Índice	100	107	117	127	135	150

Fuente: Reporte Económico del Presidente, 2001, Oficina de Prensa del Gobierno de Estados Unidos, Washington, DC, 2001.

Solución: denotaremos con x el tiempo y con y el índice, y trataremos a y como una función lineal de x. Además designaremos 1995 con $x = 1$, 1996 con $x = 2$, y así sucesivamente. Hay $n = 6$ pares de mediciones. Para determinar los coeficientes de regresión lineal usando las ecuaciones (7) y (8), efectuamos primero las siguientes operaciones aritméticas:

Año	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
1995	1	100	100	1
1996	2	107	214	4
1997	3	117	351	9
1998	4	127	508	16
1999	5	135	675	25
2000	6	150	900	36
Total	21	736	2748	91
	$= \sum_{i=1}^{6} x_i$	$= \sum_{i=1}^{6} y_i$	$= \sum_{i=1}^{6} x_iy_i$	$= \sum_{i=1}^{6} x_i^2$

De aquí que, por la ecuación (8)

$$\hat{a} = \frac{91(736) - 21(2748)}{6(91) - (21)^2} \approx 88.3,$$

y por la ecuación (7),

$$\hat{b} = \frac{6(2748) - 21(736)}{6(91) - (21)^2} \approx 9.83.$$

Por tanto, la recta de regresión de y sobre x es

$$\hat{y} = 88.3 + 9.83x,$$

cuya gráfica, así como un diagrama de dispersión, se muestran en la figura 16.18.

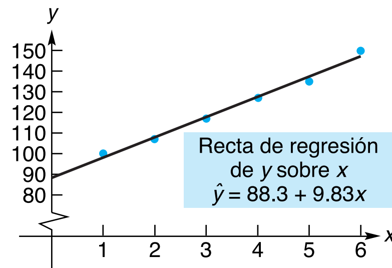


FIGURA 16.18 Recta de regresión lineal para el déficit presupuestario.

Tecnología

La calculadora TI-83 tiene una función que calcula la ecuación de la recta de mínimos cuadrados para un conjunto de datos. Ilustraremos esto dando el procedimiento para los seis puntos dados (x_i, y_i) del ejemplo 1. Después de oprimir STAT y ENTER, introducimos todos los valores x y y (véase la fig. 16.19). A continuación oprimimos STAT y nos movemos a CALC. Por último, presionamos 8 y ENTER, y obtenemos los resultados que se muestran en la figura 16.20 [el número $r \approx 0.99448$ se llama *coeficiente de correlación* y es una medida del grado en que están relacionados linealmente los datos dados].

```
L1     |L2     |L3      1
 1     | 100   | ------
 2     | 107   |
 3     | 117   |
 4     | 127   |
 5     | 135   |
 6     | 150   |
 ------| ------|
L1(7)=
```

FIGURA 16.19 Datos del ejemplo 1.

```
LinReg
 y=a+bx
 a=88.26666667
 b=9.828571429
 r²=.9889904168
 r=.994479973
```

FIGURA 16.20 Ecuación de la recta de mínimos cuadrados.

Ejercicio 16.9

Para este conjunto de ejercicios, utilice una calculadora gráfica si se lo permite su profesor.

En los problemas del 1 al 4 encuentre una ecuación de la recta de regresión lineal por mínimos cuadrados de y sobre x para los datos dados, y esboce la recta y los datos. Prediga el valor de y correspondiente a $x = 3.5$.

1.

x	1	2	3	4	5	6
y	1.5	2.3	2.6	3.7	4.0	4.5

2.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	1.8	2	4	4.5	7	9

3.

x	2	3	4.5	5.5	7
y	3	5	8	10	11

4.

x	2	3	4	5	6	7
y	2.4	2.9	3.3	3.8	4.3	4.9

5. **Demanda** Una empresa encuentra que cuando el precio de su producto es p dólares por unidad, el número de unidades vendidas es q, como se indica en la tabla siguiente:

Precio, p	10	30	40	50	60	70
Demanda, q	70	68	63	50	46	32

Encuentre una ecuación de la recta de regresión de q sobre p.

6. **Agua y rendimiento de una cosecha** En una granja, un ingeniero agrónomo determina que la cantidad de agua aplicada (en pulgadas) y el rendimiento correspondiente de cierta cosecha (en toneladas por acre) son como se indica en la tabla siguiente:

Agua, x	8	16	24	32
Rendimiento, y	4.1	4.5	5.1	6.1

Encuentre una ecuación de la recta de regresión de y sobre x. Prediga y cuando $x = 12$.

7. **Virus** Un conejo fue inoculado con un virus y x horas después de que fue aplicada la inyección, se midió su temperatura y (en grados Fahrenheit).[25] Los datos están en la tabla siguiente:

Tiempo transcurrido, x	24	32	48	56
Temperatura, y	102.8	104.5	106.5	107.0

Encuentre una ecuación de la recta de regresión de y sobre x y estime la temperatura del conejo 40 horas después de inyectado.

8. **Psicología** En un experimento psicológico, cuatro personas se sometieron a un estímulo. Antes y después del estímulo, se midió su presión sanguínea sistólica (en milímetros de mercurio). Los datos se muestran en la tabla siguiente:

	Presión sanguínea			
Antes del estímulo, x	130	132	136	141
Después del estímulo, y	139	140	144	148

Encuentre una ecuación de la recta de regresión de y sobre x, donde x y y se definen en la tabla.

Para las series de tiempo en los problemas 9 y 10 ajuste una recta de regresión lineal por medio de mínimos cuadrados; esto es, encuentre una ecuación de la recta de regresión de y sobre x. En cada caso haga corresponder el primer año en la tabla con $x = 1$.

9. **PRODUCCIÓN DEL PRODUCTO A, 1993–1997 (en miles de unidades)**

Año	**Producción**
1993	10
1994	15
1995	16
1996	18
1997	21

10. **Producción industrial** En la tabla siguiente, haga corresponder $x = 1$ al año 1975, $x = 3$ a 1977 y así sucesivamente:

ÍNDICE DE PRODUCCIÓN INDUSTRIAL – MAQUINARIA ELÉCTRICA (1997 = 100)

Año	**Índice**
1975	77
1977	100
1979	126
1981	134

Fuente: Reporte Económico del Presidente 1988, Oficina de Prensa del Gobierno de los Estados Unidos, Washington, DC, 1988.

[25] R. R. Sokal y F. J. Rohlf, *Introduction to Biostatistics* (San Francisco: W.H. Freeman & Company, Publishers, 1973).

11. Embarque de computadoras

a. Encuentre una ecuación de la recta de mínimos cuadrados de y sobre x para los siguientes datos (considere el año 1994 como $x = 1$, y así sucesivamente):

ENVÍOS AL EXTRANJERO DE COMPUTADORAS DE LA COMPAÑIA COMPUTADORAS ACME (en miles)

Año	Cantidad
1994	35
1995	31
1996	26
1997	24
1998	26

b. Para los datos en la parte (a), considere el año 1994 como $x = -2$, 1995 como año $x = -1$, 1996 como año $x = 0$ y así sucesivamente. Entonces $\sum_{i=1}^{5} x_i = 0$. Ajuste una recta de mínimos cuadrados y observe cómo se simplifica el cálculo.

12. Atención médica Para la siguiente serie de tiempo, encuentre una ecuación de la recta de regresión que ajuste mejor los datos (refiérase a 1983 como año $x = -2$, 1984 como año $x = -1$ y así sucesivamente):

ÍNDICE DE PRECIOS AL CONSUMIDOR–ATENCIÓN MÉDICA, 1983–1987 (1967 = 100)

Año	Índice
1983	357
1984	380
1985	403
1986	434
1987	462

Fuente: Reporte Económico del Presidente, 1988, Oficina de Prensa del Gobierno de los Estados Unidos, Washington, DC, 1988.

OBJETIVO Desarrollar algunas propiedades de funciones homogéneas, incluido el teorema de Euler.

16.10 Un comentario sobre funciones homogéneas[26]

Muchas de las funciones que son útiles en el análisis económico comparten la propiedad de ser homogéneas.

Definición

Se dice que una función $z = f(x, y)$ es ***homogénea de grado n*** (n es una constante), si para ***todo*** valor real positivo de λ,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

En palabras, si tanto x como y se multiplican por el mismo número real positivo, entonces el valor de la función resultante es una potencia del número multiplicada por el valor de la función $f(x, y)$. Por ejemplo, si

$$f(x, y) = x^3 - 2xy^2,$$

entonces

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^3 - 2(\lambda x)(\lambda y)^2 = \lambda^3 x^3 - 2\lambda^3 x y^2 \\ &= \lambda^3(x^3 - 2xy^2) = \lambda^3 f(x, y). \end{aligned}$$

Así, f es homogénea de tercer grado.

Una función homogénea importante en economía es la función de producción de Cobb-Douglas:

$$P = f(l, k) = Al^{\alpha}k^{1-\alpha} \qquad (\alpha \text{ y } A \text{ son constantes}).$$

[26]Esta sección contiene material de la sección 16.6 y puede omitirse sin pérdida de continuidad.

Tenemos,

$$f(\lambda l, \lambda k) = A(\lambda l)^{\alpha}(\lambda k)^{1-\alpha} = A\lambda^{\alpha}l^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}k^{1-\alpha}$$
$$= \lambda A l^{\alpha}k^{1-\alpha} = \lambda f(l, k).$$

Por tanto, f es homogénea de grado 1. Por ejemplo, $f(l, k) = 2l^{0.3}k^{0.7}$ es una función homogénea de grado 1.

Las funciones de producción que son homogéneas de grado 1 tienen una propiedad interesante. Si f es una función así, entonces

$$f(\lambda l, \lambda k) = \lambda f(l, k).$$

Por ejemplo, cuando todos los insumos se duplican, entonces

$$f(2l, 2k) = 2f(l, k),$$

y la producción se duplica. Similarmente, si todos los insumos se triplican, la producción se triplica, etc. En resumen, un cambio proporcional en cada factor de entrada de producción conduce al mismo cambio proporcional en la producción.

Al considerar las derivadas parciales de una función homogénea puede obtenerse un resultado importante. Sea $f(l, k)$ una función de producción homogénea de grado n. Tenemos entonces la identidad

$$f(\lambda l, \lambda k) = \lambda^n f(l, k). \tag{1}$$

Considere el lado izquierdo de la ecuación (1). Si hacemos $r = \lambda l$ y $s = \lambda k$, entonces la ecuación (1) adquirirá la forma

$$f(r, s) = \lambda^n f(l, k). \tag{2}$$

Ahora tomaremos la derivada parcial en cada lado con respecto a λ. Para el lado izquierdo, $f(r,s)$, por la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}[f(r, s)] = \frac{\partial}{\partial r}[f(r, s)]\frac{\partial r}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial s}[f(r, s)]\frac{\partial s}{\partial \lambda}$$
$$= \frac{\partial}{\partial r}[f(r, s)]l + \frac{\partial}{\partial s}[f(r, s)]k. \tag{3}$$

Para el lado derecho de la ecuación (2),

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}[\lambda^n f(l, k)] = n\lambda^{n-1}f(l, k). \tag{4}$$

Al usar las ecuaciones (3) y (4), hacemos $\frac{\partial}{\partial \lambda}[f(r, s)]$ igual a $\frac{\partial}{\partial \lambda}[\lambda^n f(l, k)]$:

$$l\frac{\partial}{\partial r}[f(r, s)] + k\frac{\partial}{\partial s}[f(r, s)] = n\lambda^{n-1}f(l, k).$$

En particular, si $\lambda = 1$, entonces $r = l$ y $s = k$, por lo que $f(r, s) = f(l, k)$. Así, $\frac{\partial}{\partial r}[f(r, s)] = \frac{\partial}{\partial l}[f(l, k)]$ y $\frac{\partial}{\partial s}[f(r, s)] = \frac{\partial}{\partial k}[f(l, k)]$. Por lo que, tenemos el denominado *teorema de Euler* para funciones homogéneas:

$$l\frac{\partial}{\partial l}[f(l, k)] + k\frac{\partial}{\partial k}[f(l, k)] = nf(l, k). \tag{5}$$

Ahora, si f es homogénea de grado 1, como la función Cobb-Douglas, entonces $n = 1$ y la ecuación (5) se transforma en

$$l\frac{\partial}{\partial l}[f(l, k)] + k\frac{\partial}{\partial k}[f(l, k)] = f(l, k).$$

Concluimos que si multiplicamos el producto marginal de cada insumo por la cantidad de insumo, la suma es igual a la producción total.

OBJETIVO Calcular integrales dobles y triples.

16.11 INTEGRALES MÚLTIPLES

Recuerde que la integral definida de una función de una variable tiene que ver con integración sobre un *intervalo*. Existen también integrales definidas de funciones de dos variables, llamadas **integrales dobles** (definidas). Éstas tienen que ver con la integración sobre una *región* en el plano.

Por ejemplo, el símbolo

$$\int_0^2 \int_3^4 xy\,dx\,dy, \quad \text{o equivalentemente,} \quad \int_0^2 \left[\int_3^4 xy\,dx\right] dy,$$

es la integral doble de $f(x, y) = xy$ sobre una región determinada por los límites de integración. La región consiste en todos los puntos (x, y) en el plano xy, tales que $3 \leq x \leq 4$ y $0 \leq y \leq 2$ (véase la fig. 16.21).

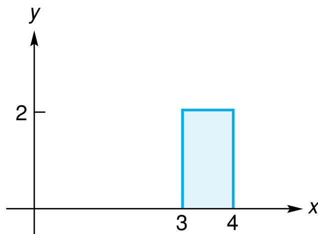


FIGURA 19.21 Región sobre la cual se evalúa $\int_0^2 \int_3^4 xy\ dx\,dy$.

En esencia, una integral doble es el límite de una suma de la forma $\sum f(x, y)\Delta x \Delta y$, donde en nuestro caso los puntos (x, y) están en la región sombreada. Más adelante daremos una interpretación geométrica de una integral doble.

Para evaluar

$$\int_0^2 \int_3^4 xy\,dx\,dy \qquad \text{o} \qquad \int_0^2 \left[\int_3^4 xy\,dx\right] dy,$$

usamos integraciones sucesivas comenzando con la integral interna. Primero evaluamos

$$\int_3^4 xy\,dx$$

tratando a y como constante e integrando con respecto a x entre los límites 3 y 4:

$$\int_3^4 xy\,dx = \left.\frac{x^2y}{2}\right|_3^4.$$

Al sustituir los límites para la variable x, tenemos

$$\frac{4^2 \cdot y}{2} - \frac{3^2 \cdot y}{2} = \frac{16y}{2} - \frac{9y}{2} = \frac{7}{2}y.$$

Ahora integramos este resultado con respecto a y entre los límites 0 y 2:

$$\int_0^2 \frac{7}{2}y\,dy = \left.\frac{7y^2}{4}\right|_0^2 = \frac{7 \cdot 2^2}{4} - 0 = 7.$$

Así,

$$\int_0^2 \int_3^4 xy\,dx\,dy = 7.$$

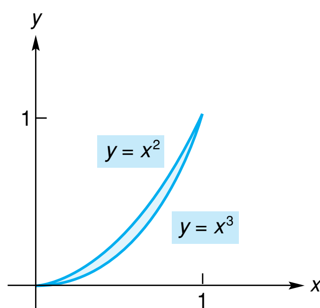


FIGURA 16.22 Región sobre la cual se evalúa $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy)\ dy\ dx.$

Ahora consideramos la integral doble

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy)\, dy\, dx, \quad \text{o} \quad \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy)\, dy \right] dx.$$

Aquí integramos primero con respecto a y y luego con respecto a x. La región sobre la que tiene lugar la integración está constituida por todos los puntos (x, y) para los cuales $x^3 \leq y \leq x^2$ y $0 \leq x \leq 1$ (véase la fig. 16.22). Esta integral doble se evalúa tratando primero a x como constante e integrando $x^3 - xy$ con respecto a y entre x^3 y x^2, y luego integramos el resultado con respecto a x entre 0 y 1:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy)\, dy \right] dx = \int_0^1 \left(x^3 y - \frac{xy^2}{2} \right) \Bigg|_{x^3}^{x^2} dx \\
&= \int_0^1 \left(\left[x^3(x^2) - \frac{x(x^2)^2}{2} \right] - \left[x^3(x^3) - \frac{x(x^3)^2}{2} \right] \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x^5 - \frac{x^5}{2} - x^6 + \frac{x^7}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} - x^6 + \frac{x^7}{2} \right) dx \\
&= \left(\frac{x^6}{12} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{16} \right) \Bigg|_0^1 = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{7} + \frac{1}{16} \right) - 0 = \frac{1}{336}.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Evaluación de una integral doble

Encontrar $\int_{-1}^1 \int_0^{1-x} (2x + 1)\, dy\, dx.$

Solución: aquí integramos primero con respecto a y y luego integramos el resultado con respecto a x:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 \int_0^{1-x} (2x + 1)\, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^1 \left[\int_0^{1-x} (2x + 1)\, dy \right] dx \\
&= \int_{-1}^1 (2xy + y) \Big|_0^{1-x} dx = \int_{-1}^1 \{[2x(1 - x) + (1 - x)] - 0\}\, dx \\
&= \int_{-1}^1 (-2x^2 + x + 1)\, dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Bigg|_{-1}^1 \\
&= \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Evaluación de una integral doble

Encontrar $\int_1^{\ln 2} \int_{e^y}^2 dx\, dy.$

Solución: aquí integramos primero con respecto a x y luego integramos el resultado con respecto a y:

$$\int_1^{\ln 2}\int_{e^y}^{2} dx\,dy = \int_1^{\ln 2}\left[\int_{e^y}^{2} dx\right] dy = \int_1^{\ln 2} x\Big|_{e^y}^{2} dy$$

$$= \int_1^{\ln 2}(2 - e^y)\,dy = (2y - e^y)\Big|_1^{\ln 2}$$

$$= (2\ln 2 - 2) - (2 - e) = 2\ln 2 - 4 + e$$

$$= \ln 4 - 4 + e.$$

Una integral doble puede interpretarse en términos del volumen de una región entre el plano xy y una superficie $z = f(x, y)$, si $z \geq 0$. En la figura 16.23 se muestra una región cuyo volumen consideraremos. El elemento de

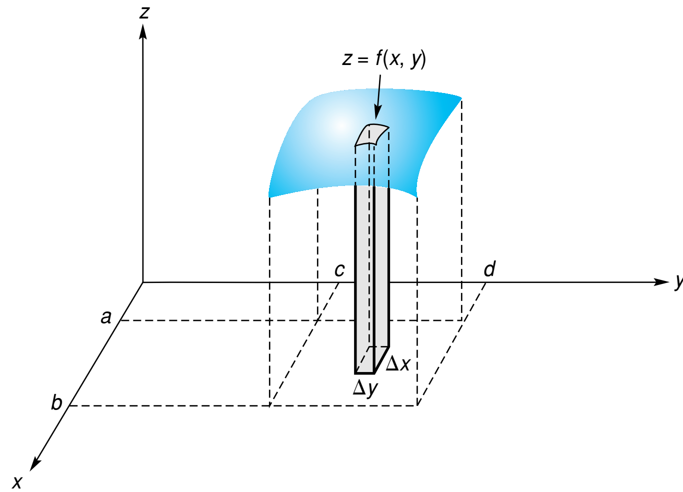


FIGURA 16.23 Interpretación de $\int_a^b\int_c^d f(x, y)\; dy\; dx$ en términos del volumen, donde $f(x, y) \geq 0$.

volumen para esta región es una columna vertical con una altura aproximada de $z = f(x, y)$, y el área de su base es $\Delta y \Delta x$. Así, su volumen es aproximadamente $f(x, y)\Delta y \Delta x$. El volumen de la región entera puede encontrarse sumando los volúmenes de todos los elementos de este tipo para $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$ por medio de una integral doble:

$$\text{volumen} = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx.$$

Las **integrales triples** se resuelven evaluando, de manera sucesiva, tres integrales, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Evaluación de una integral triple

Encontrar $\int_0^1\int_0^x\int_0^{x-y} x\,dz\,dy\,dx.$

Solución:

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x \left[\int_0^{x-y} x\,dz \right] dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (xz)\Big|_0^{x-y} dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x [x(x-y) - 0]\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (x^2 - xy)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\int_0^x (x^2 - xy)\,dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2y - \frac{xy^2}{2} \right)\Big|_0^x dx = \int_0^1 \left[\left(x^3 - \frac{x^3}{2} \right) - 0 \right] dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \frac{x^4}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

Ejercicio 16.11

En los problemas del 1 al 22 evalúe las integrales múltiples.

1. $\int_0^3 \int_0^4 x\ dy\ dx.$
2. $\int_0^2 \int_1^2 y\ dy\ dx.$
3. $\int_0^1 \int_0^1 xy\ dx\ dy.$
4. $\int_0^2 \int_0^3 x^2\ dy\ dx.$
5. $\int_1^3 \int_1^2 (x^2 - y)\ dx\ dy.$
6. $\int_{-1}^2 \int_1^4 (x^2 - 2xy)\ dy\ dx.$
7. $\int_0^1 \int_0^2 (x + y)\ dy\ dx.$
8. $\int_0^3 \int_0^x (x^2 + y^2)\ dy\ dx.$
9. $\int_0^6 \int_0^{3x} y\ dy\ dx.$
10. $\int_1^2 \int_0^{x-1} 2y\ dy\ dx.$
11. $\int_0^1 \int_{3x}^{x^2} 14x^2y\ dy\ dx.$
12. $\int_0^2 \int_0^{x^2} xy\ dy\ dx.$
13. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\ dx\ dy.$
14. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} y\,dx\,dy.$
15. $\int_{-1}^1 \int_x^{1-x} 3(x + y)\ dy\ dx.$
16. $\int_0^3 \int_{y^2}^{3y} 5x\ dx\ dy.$
17. $\int_0^1 \int_0^y e^{x+y}\,dx\,dy.$
18. $\int_2^3 \int_0^2 e^{x-y}\,dx\,dy.$
19. $\int_{-1}^0 \int_{-1}^2 \int_1^2 6xy^2z^3\ dx\ dy\ dz.$
20. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x\ dz\ dy\ dx.$
21. $\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_0^{xy} dz\ dy\ dx.$
22. $\int_0^2 \int_{y^2}^{3y} \int_0^x dz\,dx\,dy.$

23. **Estadística** En el estudio de la estadística, una función de densidad conjunta $z = f(x, y)$ definida sobre una región del plano x, y, se representa por una superficie en el espacio. La probabilidad de que

$$a \le x \le b \quad \text{y} \quad c \le y \le d$$

está dada por

$$P(a \le x \le b,\ c \le y \le d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\ dx\ dy$$

y representada mediante el volumen entre la gráfica de f y la región rectangular dada por

$$a \le x \le b \quad \text{y} \quad c \le y \le d.$$

Si $f(x, y) = e^{-(x+y)}$ es una función de densidad conjunta, donde $x \ge 0$ y $y \ge 0$, encuentre

$$P(0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2),$$

y dé su respuesta en términos de e.

24. Estadística En el problema 23, sea $f(x, y) = 12e^{-4x-3y}$ para $x, y \geq 0$. Encuentre

$$P(3 \leq x \leq 4,\ 2 \leq y \leq 6),$$

y dé su respuesta en términos de e.

25. Estadística En el problema 23, sea $f(x, y) = x/8$, donde $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 4$. Encuentre $P(x \geq 1, y \geq 2)$.

26. Estadística En el problema 23, sea f la función de densidad uniforme $f(x, y) = 1$, definida en el cuadrado unitario, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Determine la probabilidad de que $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{4}$.

16.12 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección 16.1 sistema coordenado tridimensional $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ función de n variables plano x,y plano x,z plano y,z octante trazas

Sección 16.2 derivada parcial $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ $f_x(x, y)$ $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,\ y_0)}$ $f_x(x_0, y_0)$

Sección 16.3 función de costos conjuntos función de producción productividad marginal productos competitivos productos complementarios

Sección 16.4 diferenciación parcial implícita

Sección 16.5 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ f_{xy} f_{yx} f_{xx} f_{yy}

Sección 16.6 regla de la cadena variable intermedia

Sección 16.7 máximos y mínimos relativos punto crítico prueba de la segunda derivada para funciones de dos variables

Sección 16.8 multiplicadores de Lagrange

Sección 16.9 diagrama de dispersión método de mínimos cuadrados recta de regresión de y sobre x números índices

Sección 16.10 función homogénea de grado n

Sección 16.11 integral doble integral triple

Resumen

Podemos extender el concepto de función de una variable a funciones de varias variables. Las entradas de funciones de n variables son n-adas. Por lo general, la gráfica de una función de dos variables es una superficie en un sistema coordenado tridimensional. Las funciones de más de dos variables no pueden representarse geométricamente.

Para una función de n variables, podemos considerar n derivadas parciales. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$, tenemos las derivadas parciales de f con respecto a x, de f con respecto a y y la derivada de f con respecto a z, denotadas como f_x, f_y y f_z o $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, y $\partial f/\partial z$, respectivamente. Para encontrar $f_x(x, y, z)$, tratamos a y y z como constantes y derivamos a f con respecto a x de la manera usual. Las otras derivadas parciales se encuentran de manera similar. Podemos interpretar $f_x(x, y, z)$ como el cambio aproximado en w que resulta al cambiar x en una unidad mientras se mantienen constantes y y z. Las otras derivadas parciales se pueden interpretar de modo similar. Una función de varias variables puede estar definida implícitamente. En este caso, sus derivadas parciales se encuentran por diferenciación parcial implícita.

Las funciones de varias variables aparecen con frecuencia en análisis económicos y de negocios, así como en otras áreas de estudio. Si un fabricante produce x unidades del producto X y y unidades del producto Y, entonces el costo total c de estas unidades es una función de x y de y denominada función de costos conjuntos. Las derivadas parciales $\partial c/\partial x$ y $\partial c/\partial y$ se llaman costos marginales con respecto a x y a y, respectivamente. Por ejemplo, podemos interpretar $\partial c/\partial x$ como el costo aproximado de producir una unidad adicional de X mientras se mantiene fijo el nivel de producción de Y.

Si se usan l unidades de trabajo y k unidades de capital para producir P unidades de un producto, la función $P = f(l, k)$ se llama función de producción. Las derivadas parciales de P se llaman funciones de productividad marginal.

Suponga que dos productos, A y B, son tales que la cantidad demandada de cada uno es dependiente de los precios de ambos. Si q_A y q_B son cantidades de A y B demandadas cuando los precios de A y B son p_A y p_B, respectivamente, entonces q_A y q_B cada una son funciones de p_A y p_B. Cuando $\partial q_A/\partial p_B > 0$ y $\partial q_B/\partial p_A > 0$, entonces A y B se llaman productos competitivos (o sustitu-

tos). Cuando $\partial q_A/\partial p_B < 0$ y $\partial q_B/\partial p_A < 0$, entonces A y B se llaman productos complementarios.

Si $z = f(x, y)$, donde $x = x(r, s)$ y $y = y(r, s)$, z puede considerarse como una función de r y s. Por ejemplo, para encontrar $\partial z/\partial r$, puede usarse una regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}.$$

Una derivada parcial de una función de n variables es en sí misma una función de n variables. Tomando derivadas parciales sucesivas de derivadas parciales, obtenemos derivadas parciales de orden superior. Por ejemplo, si f es una función de x y y, entonces f_{xy} denota la derivada parcial de f_x con respecto *a y; f_{xy}* se llama segunda derivada parcial de f, primero con respecto a x y luego con respecto a y.

Si la función $f(x, y)$ tiene un extremo relativo en (x_0, y_0), entonces (x_0, y_0) debe ser una solución del sistema

$$f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0.$$

Cualquier solución de este sistema se llama punto crítico de f. Así, los puntos críticos son los candidatos en donde un extremo relativo puede presentarse. La prueba de la segunda derivada para funciones de dos variables nos da las condiciones bajo las cuales un punto crítico corresponde a un máximo relativo o a un mínimo relativo. Establece que si (x_0, y_0) es un punto crítico de f y

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2,$$

entonces

1. Si $D(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0);
2. si $D(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0);
3. si $D(x_0, y_0) < 0$, f no tiene ni un máximo relativo ni un mínimo relativo en (x_0, y_0);
4. si $D(x_0, y_0) = 0$, ninguna conclusión puede obtenerse sobre los extremos en (x_0, y_0) y entonces se requiere de un análisis ulterior.

Para encontrar los puntos críticos de una función de varias variables sujetas a una restricción, podemos usar el método de los multiplicadores de Lagrange. Por ejemplo, para encontrar los puntos críticos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$, primero formamos la función

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z).$$

Al resolver el sistema

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0, \quad F_\lambda = 0,$$

obtenemos los puntos críticos de F. Si $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ es uno de esos puntos críticos, entonces (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de f sujeta a la restricción. Es importante escribir la restricción en la forma $g(x, y, z) = 0$. Por ejemplo, si la restricción es $2x + 3y - z = 4$, entonces $g(x, y, z,) = 2x + 3y - z - 4$ [o $g(x, y, z) = 4 -2x - 3y + z$]. Si $f(x, y, z)$ está sujeta a dos restricciones, $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$, formamos entonces la función $F = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$ y resolvemos el sistema.

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0, \quad F_{\lambda_1} = 0, \quad F_{\lambda_2} = 0.$$

Algunas veces dos variables, digamos x y y, pueden estar relacionadas de manera que la relación sea casi lineal. Cuando los puntos (x_i, y_i), donde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, nos son dados, podemos ajustarlos con una recta que los aproxime. Tal recta es la recta de regresión lineal (o recta de mínimos cuadrados) de y sobre x, que está dada por

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

donde

$$\hat{a} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

y

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Los valores $\hat{y}$ pueden usarse para predecir los valores de y para valores dados de x.

Al trabajar con funciones de varias variables podemos considerar sus integrales múltiples. Éstas se determinan por integración sucesiva. Por ejemplo, la integral doble

$$\int_1^2 \int_0^y (x + y)\,dx\,dy$$

se evalúa tratando primero a y como constante e integrando $x + y$ con respecto a x. Después de evaluarla entre los límites 0 y y, integramos ese resultado con respecto a y entre $y = 1$ y $y = 2$. Así,

$$\int_1^2 \int_0^y (x + y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\int_0^y (x + y)\,dx\right] dy.$$

Las integrales triples implican funciones de tres variables y se evalúan también por integración sucesiva.

Problemas de repaso

Los problemas cuyo número se muestra en color, se sugieren para utilizarlos como examen de práctica del capítulo.

En los problemas del 1 al 4 esboce las superficies dadas.

1. $2x + 3y + z = 9$.

2. $z = x$.

3. $z = y^2$.

4. $x^2 + z^2 = 1$.

En los problemas del 5 al 16 encuentre las derivadas parciales indicadas.

5. $f(x, y) = 4x^2 + 6xy + y^2 - 1$; $f_x(x, y), f_y(x, y)$.

6. $P = l^3 + k^3 - lk$; $\partial P/\partial l, \partial P/\partial k$.

7. $z = \dfrac{x}{x + y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

8. $f(p_A, p_B) = 2(p_A - 20) + 3(p_B - 30)$; $f_{p_A}(p_A, p_B)$.

9. $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; $\dfrac{\partial}{\partial y}[f(x, y)]$.

10. $w = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}$; $\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

11. $w = e^{x^2yz}$; $w_{xy}(x, y, z)$.

12. $f(x, y) = xy\ln(xy)$; $f_{xy}(x, y)$.

13. $f(x, y, z) = (x + y)(y + z^2)$; $\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}[f(x, y, z)]$.

14. $z = (x^2 - y)(y^2 - 2xy)$; $\partial^2 z/\partial y^2$.

15. $w = xe^{yz}\ln z$; $\partial w/\partial y, \partial^2 w/\partial x\,\partial z$.

16. $P = 100l^{0.11}k^{0.89}$; $\partial^2 P/\partial k\,\partial l$.

En los problemas 17 y 18 encuentre el valor indicado.

17. Si $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{xz}$, encuentre $f_{xyz}(2, 7, 4)$.

18. Si $f(x, y, z) = (6x + 1)e^{y^2\ln(z+1)}$, encuentre $f_{xyz}(0, 1, 0)$.

---

[27]**19.** Si $w = x^2 + 2xy + 3y^2$, $x = e^r$ y $y = \ln(r + s)$, encuentre $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial s$.

[27]**20.** Si $z = \ln(x/y) + e^y - xy$, $x = r^2s^2$ y $y = r + s$, determine $\partial z/\partial s$.

[27]**21.** Si $x^2 + 2xy - 2z^2 + xz + 2 = 0$, determine $\partial z/\partial x$.

[27]**22.** Si $z^2 - e^{yz} + \ln z + e^{xz} = 0$, determine $\partial z/\partial y$.

---

23. Función de producción Si la función de producción de un fabricante está definida por $P = 20l^{0.7}k^{0.3}$, determine las funciones de productividad marginal.

24. Función de costos conjuntos El costo de producir x unidades del producto X y y unidades del producto Y está dado por

$$c = 5x + 0.03xy + 7y + 200.$$

Determine el costo marginal (parcial) con respecto a x cuando $x = 100$ y $y = 200$.

25. Productos competitivos y complementarios *Si* $q_A = 200 - 3p_A + p_B$ y $q_B = 50 - 5p_B + p_A$, donde q_A y q_B son las unidades demandadas de los productos A y B, respectivamente, y p_A y p_B son sus precios por unidad respectivos, determine si A y B son productos competitivos o complementarios.

26. Innovación Para la industria, el modelo siguiente describe la tasa α (letra griega "alfa") a la que una innovación sustituye un proceso establecido:[28]

$$\alpha = Z + 0.530P - 0.027S.$$

Aquí, Z es una constante que depende de la industria particular considerada, P un índice de provecho de la innovación y S un índice de la magnitud de la inversión necesaria para hacer uso de la innovación. Encuentre $\partial\alpha/\partial P$ y $\partial\alpha/\partial S$.

27. Analice los extremos relativos de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 4y + 3$.

28. Analice los extremos relativos de la función $f(w, z) = 2w^3 + 2z^3 - 6wz + 7$.

29. Minimización de material Una caja rectangular de cartón sin tapa debe tener un volumen de 32 pies cúbicos. Encuentre las dimensiones de la caja de manera que la cantidad de cartón usado sea mínima.

30. La función

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy - 10x - 20y$$

tiene un punto crítico en $(x, y) = (1, 2)$, y la prueba de la segunda derivada no es concluyente en este punto. Determine los valores de las constantes a, b y c.

31. Maximización de la utilidad Una granja produce dos tipos de queso, A y B, a un costo promedio constante de 50 y 60 centavos por libra, respectivamente. Cuando el precio de venta por libra de A es p_A centavos y el de B es p_B centavos, las demandas (en libras) para A y B, son

$$q_A = 250(p_B - p_A)$$

---

[27]Refiérase a las secciones 16.4 o 16.6.

[28]A. P. Hurter, Jr. A. H. Rubenstein, et al., "Market Penetration by New Innovations: The Technological Literature", *Technological Forecasting and Social Change*, 11 (1978), 197-221.

y

$$q_B = 32{,}000 + 250(p_A - 2p_B).$$

Encuentre los precios de venta que dan una utilidad máxima. Verifique que la utilidad tiene un máximo relativo con esos precios.

32. Encuentre todos los puntos críticos de $f(x, y, z) = xyz$, con la condición de que

$$3x + 2y + 4z - 120 = 0 \quad (xyz \neq 0).$$

33. Encuentre todos los puntos críticos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, con la restricción de que $3x + 2y + z = 14$.

34. Sobrevivencia a una infección En un experimento,[29] un grupo de peces fueron inoculados con bacterias vivas. De aquellos peces que se mantuvieron a 28°C, el porcentaje p de los peces que sobrevivieron la infección t horas después de inyectados, se da en la tabla siguiente:

t	8	10	18	20	48
p	82	79	78	78	64

Determine la recta de regresión lineal de p sobre t.

35. Gastos de equipo Encuentre la recta de regresión lineal de mínimos cuadrados de y sobre x para los datos dados en la tabla siguiente (refiérase al año 1993 como el año $x = 1$, etc.):

GASTOS EN EQUIPO DE UNA COMPAÑÍA DE COMPUTADORAS, 1993–1998 (en millones de dólares)

Año	Índice
1993	15
1994	22
1995	21
1996	26
1997	27
1998	34

En los problemas del 36 al 39 evalúe las integrales dobles.

36. $\int_1^2 \int_0^y x^2y^2 \, dx \, dy.$

37. $\int_0^4 \int_{y/2}^2 xy \, dx \, dy.$

38. $\int_0^3 \int_{y^2}^{3y} x \, dx \, dy.$

39. $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{x^2} 7(x^2 + 2xy - 3y^2) \, dy \, dx.$

[29] J. B. Covert y W. W. Reynolds, "Survival Value of Fever in Fish", *Nature*, 267, núm. 5606 (1977), 43-45.

Aplicación práctica

Análisis de datos para un modelo de enfriamiento[30]



En el capítulo 15 se trabajó con la ley del enfriamiento de Newton, la cual puede usarse para describir la temperatura de un cuerpo al enfriarse en función del tiempo. Aquí se determinará esa relación de manera empírica por medio del análisis de datos. Esto ilustrará cómo se diseñan los modelos matemáticos en muchas situaciones reales.

Supongamos que usted quiere crear un modelo matemático acerca del enfriamiento de té caliente después de ponerlo en un refrigerador. Para ello coloca una jarra de té caliente y un termómetro en un refrigerador; luego periódicamente, lee y registra la temperatura del té. La tabla 16.6 muestra los datos obtenidos, donde T es la temperatura en grados Fahrenheit t minutos después de que se colocó la jarra en el refrigerador. Inicialmente, esto es, en $t = 0$, la temperatura es de 124°F; cuando $t = 391$, $T = 47°F$. Después de haber estado en el refrigerador toda una noche, la temperatura es de 45°F. La figura 16.24 da una gráfica de los puntos correspondientes a los datos (t, T) desde $t = 0$ hasta $t = 391$.

TABLA 16.6

Tiempo t	Temperatura T	Tiempo t	Temperatura T
0 min	124°F	128 min	64°F
5	118	144	62
10	114	178	59
16	109	208	55
20	106	244	51
35	97	299	50
50	89	331	49
65	82	391	47
85	74	Toda una noche	45

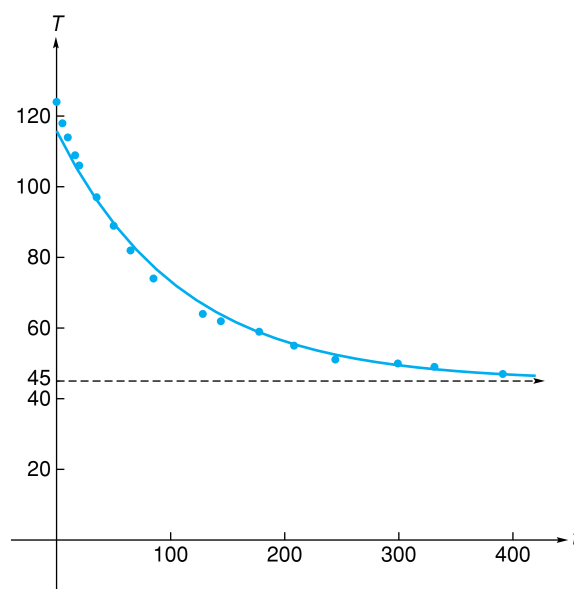


FIGURA 16.24 Puntos de datos y aproximación exponencial.

La tendencia de estos puntos sugiere fuertemente que se encuentran sobre la gráfica de una función exponencial decreciente, como la mostrada en la figura 16.24. En particular, como la temperatura después de una noche es de 45°F, esta función exponencial debería tener $T = 45$ como asíntota horizontal. Tal función tiene la forma

$$\hat{T} = Ce^{at} + 45, \qquad (1)$$

[30]Adaptado de Gloria Barrett, Dot Doyle Dan Teague, "Using Data Analysis in Precalculus to Model Cooling", *The Mathematics Teacher*, 81, núm. 8 (nov. de 1988), 680-684. Con autorización del National Council of Teachers of Mathematics.

donde $\hat{T}$ da la temperatura estimada en el tiempo t, y C y a son constantes con $a < 0$ (note que como $a < 0$, entonces cuando $t \to \infty$, se tiene $Ce^{at} \to 0$, por lo que $Ce^{at} + 45 \to 45$).

Ahora el problema es encontrar los valores de C y a tales que la curva dada por la ecuación (1) se ajuste a los datos de la mejor manera posible. Al escribir la ecuación (1) como

$$\hat{T} - 45 = Ce^{at}$$

y tomando luego logaritmos naturales en ambos lados, se obtiene una forma lineal:

$$\ln(\hat{T} - 45) = \ln(Ce^{at}),$$
$$\ln(\hat{T} - 45) = \ln C + \ln e^{at},$$
$$\ln(\hat{T} - 45) = \ln C + at. \qquad (2)$$

Haciendo $\hat{T}_l = \ln(\hat{T} - 45)$, la ecuación (2) queda expresada como

$$\hat{T}_l = at + \ln C. \qquad (3)$$

Como a y $\ln C$ son constantes, la ecuación (3) es una ecuación lineal en $\hat{T}_l$ y t. Esto significa para los datos originales, que si se grafican los puntos $(t, \ln(T - 45))$, deberán quedar aproximadamente sobre una recta. Esos puntos se muestran en la figura 16.25, donde T_l representa $\ln(T - 45)$. Así, la recta dada por la ecuación (3), que aproxima T_l, puede suponerse que es la

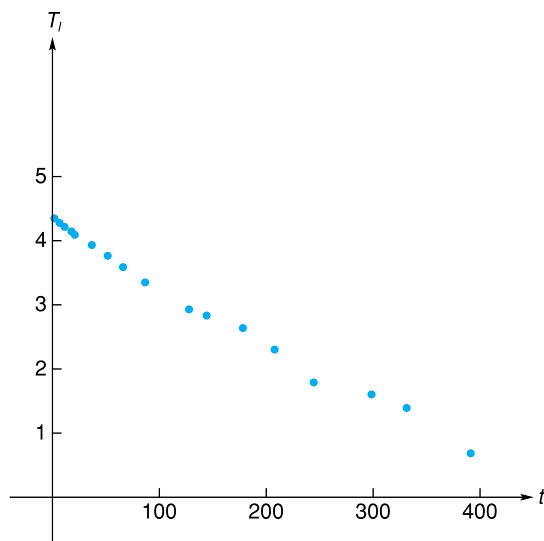


FIGURA 16.25 Los puntos (t, T_l), en donde $T_l = \ln(T - 45)$, está cerca de una recta.

recta de regresión lineal de T_l sobre t. Esto es, a y $\ln C$ son los coeficientes de regresión lineal. Usando las fórmulas para esos coeficientes y una calculadora, se determina que

$$a = \frac{17\left(\sum_{i=1}^{17} t_i T_{l_i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{17} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{17} T_{l_i}\right)}{17\left(\sum_{i=1}^{17} t_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{17} t_i\right)^2} \approx -0.00921$$

y

$$\ln C = \frac{\left(\sum_{i=1}^{17} t_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{17} T_{l_i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{17} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{17} t_i T_{l_i}\right)}{17\left(\sum_{i=1}^{17} t_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{17} t_i\right)^2}$$

$$\approx 4.260074.$$

Como $\ln C \approx 4.260074$, entonces $C \approx e^{4.260074} \approx 70.82$. Así, de la ecuación (1),

$$\hat{T} = 70.82e^{-0.00921t} + 45,$$

el cual es un modelo que predice la temperatura del té al enfriarse. La gráfica de esta función es la curva que se muestra en la figura 16.24.

Ejercicios

1. Trace los puntos correspondientes a los datos que se dan enseguida sobre un plano coordenado x, y:

x	0	1	4	7	10
y	15	12	9	7	6

Suponga que esos puntos se encuentran, aproximadamente, sobre la gráfica de una función exponencial decreciente con asíntota horizontal $y = 5$. Use el procedimiento analizado en esta aplicación práctica para determinar la función.

2. Suponga que ciertos datos observados siguen una relación dada por $y = C/x^r$, donde $x, y, C > 0$. Tomando logaritmos naturales en ambos miembros de la ecuación, demuestre que $\ln x$ y $\ln y$ están relacionados de manera lineal. Así, los puntos $(\ln x, \ln y)$ se encuentran sobre una recta.

3. Use la ley del enfriamiento de Newton (véase la sección 15.7) y los puntos (0, 124) y (128, 64) para determinar la temperatura T del té, en la aplicación práctica, en el tiempo t. Suponga que la temperatura del medio ambiente es de 45°F.

4. Trate de obtener la ecuación final de regresión obtenida en la aplicación práctica, usando la capacidad de regresión de una calculadora gráfica. Primero utilice regresión lineal. ¿Cómo es su resultado comparado con el de la aplicación? Después trate de omitir la transformación a la forma lineal y realice una regresión exponencial. ¿Qué dificultades encuentra, si es que hay dificultades? ¿Cómo superaría estas dificultades?

APÉNDICE A

Conjuntos

OBJETIVO Proporcionar la idea intuitiva de conjunto y utilizar métodos para describir conjuntos.

Agrupaciones y lo que se puede hacer con ellas

En la vida diaria y en la profesional, nos encontramos ante situaciones en las cuales de manera natural agrupamos objetos, personas, proyectos, etc., que tienen alguna cualidad en común. Por ejemplo: los compañeros del grupo de la escuela, las enfermedades del corazón, los contribuyentes menores, los proyectos de inversión de un portafolio financiero, entre otros. Además, nos hacemos preguntas con respecto a esas agrupaciones y sus componentes. Tales agrupaciones y lo que se puede realizar con ellas y sus componentes es materia de estudio de una parte de las matemáticas conocida como teoría de conjuntos.

A.1 Idea intuitiva de conjunto

De manera intuitiva diremos que un conjunto es una colección bien definida de objetos. A cada uno de estos objetos les denominaremos elementos del conjunto.

Básicamente existen dos formas de definir a un conjunto:

La primera, denominada definición por extensión, es aquella en la que listamos todos los elementos del conjunto. Esta lista de elementos la escribimos entre llaves.

EJEMPLO 1

Los conjuntos siguientes están escritos por medio del método de extensión.

A = {Mercurio, Venus, Tierra, Marte}
B = {Bonos, Acciones, Certificados de Tesorería}
C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

La segunda, conocida como definición por comprensión o construcción, es en la que escribimos una propiedad que deben cumplir los elementos que pertenecen al conjunto.

EJEMPLO 2

Los conjuntos siguientes se escriben por medio del método de construcción.

C = {x|x es un número natural par menor que 20}
D = {x|x es la capital de un país de Norteamérica}

E = {x|x es un planeta del sistema solar comprendido entre el Sol y los Asteroides}
F = {x|x es uno de los primeros diez números pares naturales}
G = {x|x es el resultado del tiro de un dado}

Además de los dos métodos anteriores, podemos mencionar una tercera forma de describir o definir conjuntos, la cual es una combinación de las dos anteriores. Se dan los primeros y/o los últimos elementos, a partir de los cuales se infiere cuáles elementos pertenecen al conjunto.

EJEMPLO 3

Para definir los conjuntos siguientes, hicimos uso de una combinación de los métodos de comprensión y extensión

H = {2, 4, 6, . . . , 18, 20}
I = {Argentina, Antigua y Barbuda, Bahamas, . . . , Uruguay, Venezuela}
J = {Mercurio, Venus, Tierra, . . . , Neptuno, Plutón}

Al emplear este método se debe ser cuidadoso al escribir los elementos y del contexto del problema que se trate, ya que puede sugerir más de una respuesta correcta.

Revise la sección 0.2 para un repaso sobre conjuntos de números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.

Ejercicio A.1

En los problemas del 1 al 6 escriba cada conjunto utilizando el método de extensión.

1. El conjunto de los números enteros positivos que son divisores de 24.

2. R es el conjunto de los huesos del cráneo.

3. El conjunto de los países de Europa cuyo nombre de su capital inicia con P.

4. S es el conjunto de nombres de ganadores del premio Nobel de Economía.

5. El conjunto de países que han ganado la copa mundial de fútbol.

6. T es el conjunto de números primos menores que 20.

En los problemas del 7 al 12 escriba cada conjunto y utilice el método de construcción o comprensión.

7. {1, 3, 5, 7, 9}.

8. {España, Portugal}.

9. {2, 4, 6, 8, 10, 12, . . . }.

10. {r, o, m, a}.

11. {7, 14, 21, 28, . . . , 693, 700}.

12. El conjunto de los enteros entre –6 y 6.

En los problemas del 13 al 20 se da un conjunto si utiliza un método, escriba el mismo conjunto utilizando otro método.

13. {1, 2, 3, 4, 6, 12}

14. {x|x es una persona viva que ha sido presidente de Argentina}

15. {Panamá, Costa Rica, . . . , Belice, Guatemala, México}

16. {x|x es un número primo menor a 20}

17. R es el conjunto cuyos elementos son los números enteros mayores a 60.

18. S es el conjunto que consiste en los recíprocos de todos los números naturales menores a 10.

19. T es el conjunto formado por las letras del abecedario español.

20. {k|k es un entero y $k^2 < 10$}

OBJETIVO Introducir la notación usual de conjuntos. Definir conjuntos vacío y universal. Introducir el concepto de subconjunto, la igualdad de conjuntos. Emplear los diagramas de Venn para representar conjuntos.

A.2 Conceptos básicos

En la sección anterior introdujimos la noción de conjunto y sus elementos. El primer conjunto que escribimos fue A = {Mercurio, Venus, Tierra, Marte}, cuyos elementos son los planetas del sistema solar: Mercurio, Venus, Tierra y Marte. Así, podemos decir que "Venus es elemento del conjunto A" y "Júpiter no es elemento del conjunto A". Reemplazamos "es elemento del conjunto" con el símbolo $\in$ y con $\notin$ a la frase "no es elemento del conjunto". Con lo anterior, podemos escribir:

$$\text{Venus} \in A \text{ y Júpiter} \notin A$$

EJEMPLO 1

Considere el conjunto $C = \{x|x \text{ es un número natural par menor que } 20\}$ *decida si cada uno de los números siguientes es o no elemento del conjunto* C *y represente esto por medio de la notación de pertenencia* $\in$ o $\notin$.

a. 4.
b. 20.
c. 0
d. -4
e. 3.

Solución:

a. Puesto que 4 es un número natural par y es menor que 20, entonces pertenece al conjunto C. Escribimos $4 \in C$.

b. Aunque 20 es un número par, no es menor que 20, por lo tanto, $20 \notin C$.

c. El 0 es par, y aunque es menor que 20 no es un número natural, por tanto, no pertenece a C, lo cual escribimos así, $0 \notin C$.

d. El -4 es un número par menor que 20 pero no es un número natural, por lo que no pertenece a C. Escribimos $-4 \notin C$

e. Si bien 3 es un número natural menor que 20, no pertenece al conjunto C ya que 3 no es par, por lo tanto, escribimos $3 \notin C$.

Conjunto universal y conjunto vacío

Al trabajar con conjuntos es necesario indicar el universo del discurso que está formado por un conjunto al cual pertenecen todos los elementos con los cuales estemos trabajando en un problema en particular. A este conjunto se le conoce como **conjunto universal.** Este conjunto se denota típicamente por medio de la letra U o la letra griega omega mayúscula, Ω.

En un problema, el conjunto universal podría ser el conjunto de todos los planetas del sistema solar, mientras que en otro podría ser el conjunto de todas las mujeres menores de 24 años que estudian medicina.

Es muy importante dejar claro cual es el conjunto universal, ya que eso determinará nuestro marco de referencia. Así como es necesario tener un conjunto al cual pertenecen todos los elementos con los que se está trabajando, también lo es definir un conjunto el cual carece de elementos, dicho conjunto se conoce como **conjunto vacío.** A este conjunto lo denotamos con $\varnothing$ o $\{\ \}$.

EJEMPLO 2

Determine cuál(es) de las proposiciones siguientes define a un conjunto vacío.

a. $\{m|m \text{ es un número primo par}\}$
b. $\{x|x \text{ es un número real tal que } x^2 < 0\}$

c. $\{y|y$ es un número entero entre 4 y 5$\}$

d. $\{\varnothing\}$

Solución:

a. 2 es un número par y es primo, por lo tanto, este conjunto no es vacío.

b. Sabemos que no existe número real que al elevarlo al cuadrado nos dé un número negativo, por lo tanto, el conjunto es $\varnothing$.

c. No existe número entero entre 4 y 5, así este conjunto es vacío $\varnothing$.

d. $\{\varnothing\}$ no es el conjunto vacío, es un conjunto que tiene un elemento (el elemento es el conjunto vacío).

Subconjunto

Suponga que en un problema particular estamos interesados en calificaciones determinadas con números enteros del 5 al 10, eso nos sugiere que el conjunto universal es

$$U = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Ahora bien, si $A = \{5, 6, 9\}$ es un conjunto bajo estudio. Podemos observar que todo elemento de A también es un elemento de U. Decimos que A es un subconjunto del conjunto U. Esto nos lleva a la siguiente:

Definición:
Un conjunto A es **subconjunto** de un conjunto B, si y sólo si cada elemento de A también es elemento de B. Esto lo escribimos $A \subseteq B$. Por otro lado, si A no es subconjunto de B, lo denotamos con $A \supseteq B$.

Cuando $A \subseteq B$, también decimos que "A está contenido en B".

Observe que para demostrar que un conjunto, A, *no* es subconjunto de un conjunto B, con base en la definición debemos demostrar que no todo elemento de A pertenece a B, es decir, debemos encontrar **un** elemento en A tal que ese elemento **no** pertenezca a B. Por ejemplo, el conjunto $\{1, 2, 3\} \supseteq \{2, 3, 4, 5\}$, ya que $1 \in A$, pero $1 \notin B$.

El conjunto vacío, $\varnothing$, es subconjunto de todo conjunto A. (Véase el problema 15.)

EJEMPLO 3

Haga una lista con todos los subconjuntos del conjunto

$$M = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Solución: para hacer la lista procedemos de manera ordenada, primero escribimos los conjuntos con cero elementos, es decir, sin elementos. Sólo existe uno, el vacío. $\varnothing \subseteq M$.

La lista de conjuntos con un elemento es:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\} \text{ y } \{4\}$$

Los subconjuntos de M con 2 elementos son:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\} \text{ y } \{3, 4\}.$$

Hay cuatro subconjuntos de M con 3 elementos:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\} \text{ y } \{2, 3, 4\}.$$

Y sólo existe un subconjunto de M con cuatro elementos, éste es el mismo M.

Observe que en el ejemplo anterior tenemos 16 subconjuntos de H. En la lista están incluidos dos ($\varnothing$ y M), que se denominan subconjuntos impropios o triviales de M, los restantes 14 se les conoce como **subconjuntos propios** de M.

Igualdad de conjuntos

Decimos que dos conjuntos son iguales si **tienen los mismos elementos.** Cuando dos conjuntos, A y B, son iguales escribimos $A = B$. Para demostrar que A y B son iguales, tenemos que demostrar que todos los elementos de A pertenecen a B y también que todos los elementos de B pertenece a A. Es decir, se debe cumplir que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Si alguna de las contenciones anteriores no se cumple escribimos $A \neq B$, que se lee "A es diferente de B".

EJEMPLO 4

a. El conjunto $\{1, 2, 3\}$ es igual al conjunto $\{3, 1, 2)$, ya que tienen los mismos elementos. Observe que esto nos indica que el orden en que escribimos los elementos de un conjunto no importa.

b. El conjunto $T = \{2, 4, 6\}$ es igual al conjunto $P = \{2, 4, 2, 6, 2, 4\}$. Note que todos los elementos de T pertenecen a P, y recíprocamente, todos los elementos de P pertenecen a T. Esto nos dice que en un conjunto basta con escribir una sola vez cada elemento.

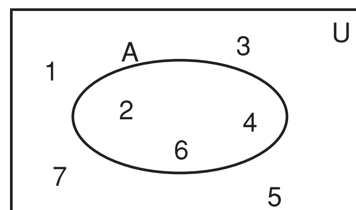
Diagrama de Venn-Euler

Un dibujo dice más que mil palabras, reza un refrán, y las matemáticas no son la excepción. Muchas veces un dibujo o una gráfica nos ayudan a clarificar algunas ideas, en el caso de la teoría de conjuntos se emplean los diagramas de Venn-Euler, o simplemente diagramas de Venn. Por lo regular, en estos diagramas el conjunto universal se representa por medio de un rectángulo y los demás conjuntos de interés por medio de óvalos, círculos u otras formas. En esta sección y la siguiente haremos uso de los diagramas de Venn para ilustrar muchos de los conceptos.

EJEMPLO 5

Represente por medio de un diagrama de Venn al conjunto $A = \{2, 4, 6\}$, *y considere el conjunto universal* $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Solución:

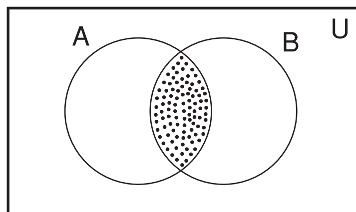


EJEMPLO 6

Por medio de un diagrama de Venn represente a los conjuntos

U = {x|x es una persona que se encuentra en América}
A = {x|x es una persona que padece de miopía}
B = {x|x es una persona que padece de astigmatismo}

Solución:
Representamos por medio de un rectángulo al conjunto universal y por medio de círculos a los conjuntos A y B.



En el diagrama anterior, traslapamos los círculos que representan a los conjuntos A y B, ¿Por qué?

Ejercicio A.2

En los ejercicios del 1 al 6 escriba ∈ o ∉ *para que la expresión dada sea verdadera.*

1. 4 _____ {1, 2, 3, 4}

2. Júpiter _____ {x|x es un planeta}

3. 5 _____ ∅

4. Luna _____ {x|x es un planeta}

5. {4} _____ {1, 2, 3, 4}

6. 5 _____ Ω

En los ejercicios del 7 al 14 decida si es verdadera o falsa cada una de las proposiciones siguientes.

7. {3, 4} = {4, 3}

8. a ∈ {h, o, l ,a}

9. {Marte} ⊆ {k|k es un planeta del sistema solar}

10. {a, m, a, b, a} = {a, b, m}

11. 3 ∉ {2, 4, 6}

12. {2, 3} ⊇ {2, 4, 6, 8}

13. {m|m es un número natural menor a 2} = {1}

14. {Belice, Honduras, Cuba} ⊆ {e|e es un país del Continente Americano}.

15. Demuestre que el conjunto vacío, ∅, es subconjunto de cualquier conjunto, A. *Sugerencia:* Suponga que ∅ ⊇ A y muestre que esto no es posible.

Para los problemas del 16 al 24, decida si la proposición dada es verdadera o falsa. Considere los conjuntos siguientes:

U = {a, b, c, d, f, g, h, i}
A = {a, c, d}
B = {f, g}
C = {a, b, f, g}

16. {g, f, b} ⊆ B

17. ∅ ⊆ B

18. A ⊆ U

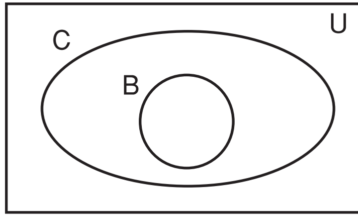
19. C ⊇ A

20. A ⊇ C

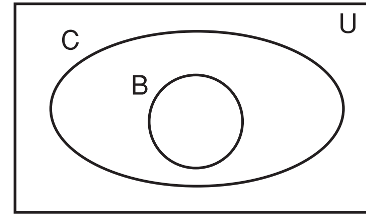
21. El conjunto B tiene exactamente 2 subconjuntos propios.

22. El conjunto C tiene exactamente 32 subconjuntos.

23. El diagrama siguiente ilustra de manera correcta la relación entre U, A y B.



24. El diagrama siguiente ilustra de manera correcta la relación entre U, B y C.



OBJETIVO Definir las operaciones básicas con conjuntos, unión, intersección, complemento y diferencia; ilustrar el uso de las operaciones de conjuntos en diversas situaciones, y representar las operaciones entre conjuntos por medio de diagramas de Venn.

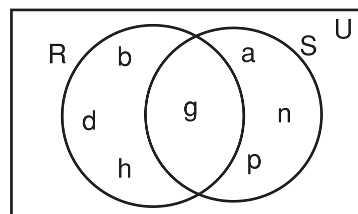
A.3 OPERACIONES CON CONJUNTOS

En un estudio sobre enfermedades en dos regiones del país, se encontró la información que aparece en la tabla siguiente, con respecto a las principales enfermedades en la población de cada región.

Región norte	**Región sur**
Bocio, b	Anemia, a
Diabetes, d	Gripe. g
Gripe, g	Neumonía, n
Hepatitis, h	Paludismo, p

La única enfermedad de mayor incidencia en común a las dos regiones es la g, gripe. Ahora, si representamos las enfermedades de cada región como un conjunto, entonces el conjunto de enfermedades con mayor incidencia en la región norte del país forman el conjunto R = {b, d, g, h}. Mientras que para la región sur tenemos S = {a, g, n, p}.

Estos conjuntos los podemos representar por medio de un diagrama de Venn, como se muestra a continuación, en donde el único elemento común a los dos conjuntos es *g*. Este elemento pertenece a la *intersección* de los conjuntos.



La **intersección** de los conjuntos A y B, denotada por A ∩ B, es el conjunto que se forma con los elementos que son comunes a ambos conjuntos, es decir

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

En el siguiente diagrama de Venn la parte sombreada, que es común a ambos conjuntos, representa la intersección de ellos.

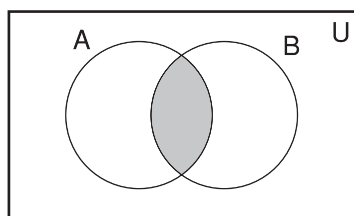


FIGURA A.1 Intersección de los conjuntos A y B, A ∩ B.

Para el caso de las enfermedades tenemos

$$R \cap S = \{g\}$$

EJEMPLO 1

Determine la intersección de los conjuntos siguientes:

a. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 4, 8, 16\}$

b. $C = \{x|x$ es un planeta del sistema solar$\}$ y $D = \{x|x$ es un planeta que está más próximo al Sol que la Tierra$\}$

c. $E = \{h, o, l, a\}$ y $\varnothing$

d. $F = \{3, 6, 9, 12\}$ y $G = \{5, 10, 15\}$

Solución:

a. Puesto que los elementos comunes a los dos conjuntos son 2 y 4, tenemos

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 8, 16\} = \{2, 4\}.$$

b. En este caso tenemos que $C \cap D = \{\text{Mercurio, Venus}\}$, ya que éstos son los únicos planetas del sistema solar que están más próximos al Sol que a la Tierra.

c. Puesto que $\varnothing$ no tiene elementos, no puede haber elementos que pertenezcan a ambos conjuntos, por lo tanto,

$$\{h, o, l, a\} \cap \varnothing = \varnothing.$$

d. Como se puede observar, los conjuntos F y G no tienen elementos en común, por lo que,

$$F \cap G = \varnothing.$$

Los dos últimos nos muestran, en cada caso, dos conjuntos que no tienen elementos en común, éstos conjuntos reciben el nombre de **conjuntos disjuntos.** Con mayor formalidad decimos que los conjuntos A y B son disjuntos si $A \cap B = \varnothing$.

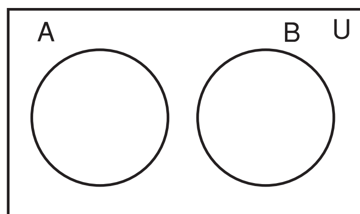


FIGURA A.2 Conjuntos disjuntos, $A \cap B = \varnothing$.

EJEMPLO 2

En un estudio realizado en una universidad se clasificó a los estudiantes en los conjuntos siguientes:

$$S = \{x|x \text{ tiene automóvil}\}$$
$$T = \{x|x \text{ juega baloncesto}\}$$

Describa la intersección de los conjuntos S y T e ilústrelo en un diagrama de Venn

Solución: la intersección está formada por los elementos que cumplen las dos condiciones así que

$$S \cap T = \{x|x \text{ tiene automóvil y juega baloncesto}\}$$

El siguiente diagrama de Venn ilustra lo anterior.

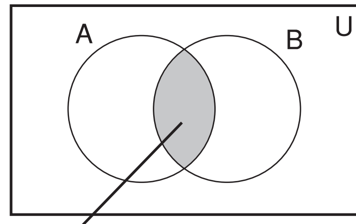


FIGURA A.3

Al inicio de la sección se presentó una tabla con las cuatro enfermedades principales en cada una de las regiones del país (norte y sur). Si un estudiante desea realizar un reporte de las principales enfermedades de las dos regiones, entonces necesita analizar cada una de las enfermedades que tienen una alta incidencia en la región norte o en la región sur, es decir, el conjunto

$$\{a, b, d, g, h, n, p\}$$

que es la *unión* de los conjuntos de enfermedades, este conjunto se representa mediante el siguiente diagrama de Venn.

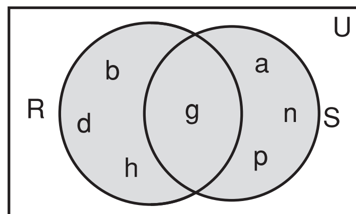


FIGURA A.4 Unión de los conjuntos R y S, $R \cup S$.

Formalizando lo anterior, decimos que la **unión** de los conjuntos A y B, denotado por $A \cup B$, es el conjunto cuyos elementos pertenecen a cualquiera de los dos conjuntos. Es decir,

$$A \cup B = \{x|x \in A \text{ o } x \in B\}$$

EJEMPLO 3

Determine la unión de los conjuntos siguientes:

a. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 4, 8, 16\}$

b. $C = \{x|x$ es un planeta del sistema solar$\}$ y $D = \{x|x$ es un planeta que está más próximo al Sol que la Tierra$\}$

c. $E = \{h, o, l, a\}$ y $\varnothing$

Solución:

a. Para obtener la unión comenzamos por enumerar a todos los elementos del primer conjunto y a continuación escribimos los elementos del segundo conjunto que no hayamos escrito, es decir,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 16\}.$$

b. Note que en este caso, al listar todos los elementos del conjunto C, nos damos cuenta que ya incluimos a todos los del conjunto D, por lo que,

$$C \cup D = \{x|x \text{ es un planeta del sistema solar}\}.$$

Observe que es el mismo conjunto C, ¿por qué?, ¿bajo qué circunstancia se cumple lo anterior?, es decir, ¿cuáles son las condiciones para que al unir dos conjuntos el resultado sea uno de ellos? Véase el problema 27.

c. $E \cup \varnothing = \{h, o, l, a\}$. Note que el resultado fue el conjunto E. Véase el problema 30.

Regresando con el ejemplo dado al inicio de la sección el total de enfermedades que se encontraron en las dos regiones fue de siete. Incluimos Cirrosis hepática, Diabetes y Tuberculosis para formar el conjunto universal para este caso. A continuación, mostramos la tabla con las diez enfermedades bajo estudio.

TABLA A.1 Padecimientos en el estudio de las dos regiones del país

Anemia, a	Gripe, g
Bocio, b	Hepatitis, h
Cirrosis hepática, c	Neumonía, n
Diabetes, d	Paludismo, p
Epilepsia, e	Tuberculosis, t

Con la notación dada en la tabla para las enfermedades, tenemos que

$$U = \{a, b, c, d, e, g, h, n, p, t\}.$$

En el siguiente diagrama de Venn mostramos a los conjuntos U y R definido con anterioridad.

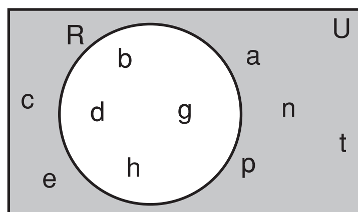


FIGURA A.5

Observe la región sombreada, también forma un conjunto, llamado el **complemento** de R, y se representa por R^c, R' o con $\bar{R}$. Aquí emplearemos la primera de las notaciones. Formalizando lo anterior, tenemos:

El conjunto complemento de A, denotado A^c, es el conjunto que contiene a todos los elementos del universo, U, que no pertenecen al conjunto A. Es decir,

$$A^c = \{x |\ x \in U \text{ y } x \notin A\}.$$

EJEMPLO 4

Considerando el caso de las principales enfermedades en las dos regiones del país, determine:

a. R^c,
b. S^c.

Solución:

a. Para escribir el complemento del conjunto R, basta con listar a todos los elementos del universo y quitar aquellos que pertenezcan a R. Es decir,

$$R^c = \{a, c, e, n, p, t\}.$$

Véase la figura A.5.

b. De manera análoga obtenemos $S^c = \{b, c, d, e, h, t\}$.

Una operación más entre conjuntos es la *diferencia* entre dos conjuntos, ésta la utilizamos cuando nos interesa conocer los elementos de un conjunto que no se encuentran en el otro. En el caso de las enfermedades, la diferencia entre los conjuntos R y S, denotada por $R - S$ es el conjunto

$$R - S = \{b, d, h\}.$$

El conjunto anterior representa a las principales enfermedades en la región norte que no son enfermedades principales en la región sur. Formalizamos lo anterior en la definición siguiente.

La **diferencia** de los conjuntos A y B, denotada por $A - B$, es el conjunto cuyos elementos pertenecen al conjunto A pero no pertenecen al conjunto B, es decir,

$$A - B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

En un diagrama de Venn la diferencia anterior se representa en la figura siguiente

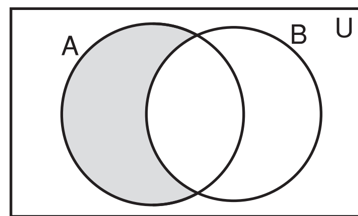


FIGURA A.6 Diferencia de conjuntos, $A - B$.

EJEMPLO 5

Determine la diferencia de los conjuntos siguientes.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 4, 8, 10\}$$

Solución: para obtener la diferencia, $A - B$, listamos todos los elementos de A y eliminamos de esa lista a los elementos que tenga en común con B. Al hacer lo anterior, tenemos

$$A - B = \{1, 3, 5, 6\}.$$

EJEMPLO 6

Se clasificó a estudiantes de la universidad estatal en:

$$F = \{x | x \text{ fuma}\}$$
$$T = \{x | x \text{ tiene automóvil}\}$$
$$M = \{x | x \text{ es mujer}\}$$

En este caso, el conjunto universal, U, *es el de todos los estudiantes (hombres y mujeres) de esa universidad.*

Describa con palabras a cada uno de los conjuntos siguientes:

a. $F - T$.
b. $M - T$.
c. $T - F$.

Solución:

a. $F - T$, representa al conjunto de estudiantes que fuma y no tiene automóvil.
b. $M - F$, es el conjunto de estudiantes mujeres que no fuman.
c. $T - F$, son los estudiantes de la universidad que tienen automóvil pero no fuman. Compare esto con la parte (a).

Las operaciones entre conjuntos tienen propiedades algebraicas interesantes, y éstas se pueden demostrar a partir de sus definiciones, sin embargo, sólo ilustraremos algunas por medio de diagramas de Venn.

La unión y la intersección son conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A.$$

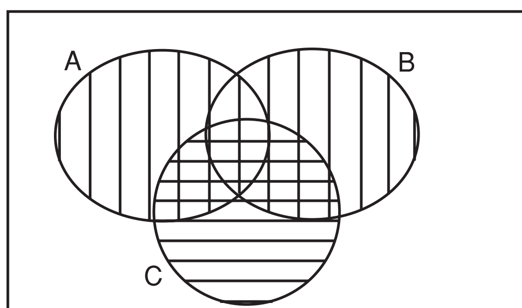
La unión y la intersección son asociativas:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

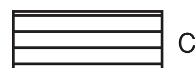
También satisfacen propiedades distributivas:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

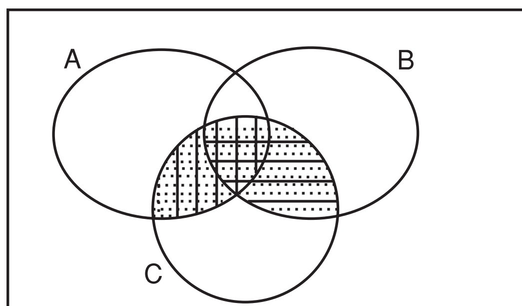
Para ilustrar $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, mostramos los diagramas de Venn siguientes:



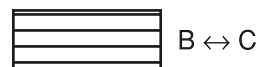


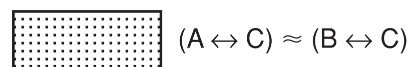












Como se puede observar, el resultado final es el mismo por lo que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

De forma análoga se pueden ilustrar las otras propiedades.

Ejercicio A.3

En los problemas del 1 al 12, realice las operaciones que se indican. Considere los conjuntos siguientes.

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$C = \{2, 3, 5, 7\}$

$D = \{3, 6, 9\}$

1. $A \cup B$

2. $C \cap B$

3. $A \cup (B \cap C)$

4. $A^c \cap B$

5. $D \cap A^c$

6. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

7. $D^c \cup C^c$

8. $D - C$

9. $C - (A \cup B)$

10. $(A - C) - (B - D)$

11. $A^c - B^c$

12. $D - A^c$

En los problemas del 13 al 20, ilustre por medio de diagramas de Venn las igualdades que se dan.

13. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

14. $A - B = A \cap B^c$.

15. $A \cap B = B \cap A$

16. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

17. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

18. $(A - B) \cap C = A \cap (C - B)$.

19. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

20. $A^c - B = (A \cup B)^c$.

Se clasificó a estudiantes de la universidad estatal en:

$F = \{x|x \text{ fuma}\}$

$T = \{x|x \text{ tiene automóvil}\}$

$M = \{x|x \text{ es mujer}\}$

$H = \{x|x \text{ es hombre}\}$

Describa con palabras cada uno de los conjuntos dados en los problemas del 21 al 26.

21. T^c

22. $M \cap (T \cap H)$

23. $H \cap F^c$

24. $(M \cap T^c) \cup (H \cap F^c)$

25. $H - F$

26. $M - (T \cup F)$

27. ¿Qué condiciones se debe(n) cumplir para que $A \cup B = B$ sea cierta?

28. ¿Qué condiciones se debe(n) cumplir para que $A \cap B = B$ sea cierta?

29. ¿Qué condiciones se debe(n) cumplir para que $A - B = A$ sea cierta?

30. Justifique por medio de diagramas de Venn las igualdades siguientes, que se cumplen para cualquier conjunto A.

a. $A \cup \varnothing = A$
b. $A \cap U = A$
c. $A \cup U = U$
d. $A \cap \varnothing = \varnothing$

OBJETIVO Estudiar la cardinalidad de conjuntos. Obtener expresiones para la cardinalidad de la unión de conjuntos.

A.4 Cardinalidad de conjuntos

En diversas situaciones, es importante conocer el número de elementos de un conjunto. Por ejemplo, cuando se hacen encuestas o se estudia probabilidad con el enfoque frecuencial. Al número de elementos de un conjunto se le llama **número cardinal** o **cardinalidad** del conjunto, la cardinalidad del conjunto A se denota por medio del símbolo $n(A)$.

Si el número cardinal de un conjunto es un número entero no negativo particular, decimos que el conjunto es **finito,** en caso contrario le llamamos conjunto infinito.

EJEMPLO 1

Determine el número cardinal de cada uno de los conjuntos siguientes.

a. $\{1, 3, 5, 7\}$
b. $\{x|x$ es un país de Norteamérica$\}$
c. $\{x|x$ es un planeta del sistema solar ubicado entre el Sol y los asteroides$\}$
d. $\varnothing$
e. $\{\varnothing\}$

Solución:

a. $A = \{1, 3, 5, 7\}$ tiene 4 elementos, por lo que $n(A) = 4$.
b. $B = \{x|x$ es un país de Norteamérica$\} = \{$Canadá, Estados Unidos, México$\}$, así $n(B) = 3$.
c. $C = \{x|x$ es un planeta del sistema solar ubicado entre el Sol y los asteroides$\} = \{$Mercurio, Venus, Tierra$\}$, por lo tanto, $n(C) = 3$.
d. $\varnothing$, el vacío no tiene elementos y así $n(\varnothing) = 0$.
e. $E = \{\varnothing\}$, este conjunto tiene un elemento, por lo tanto, $n(E) = 1$.

En muchos problemas en los que de manera natural aparecen conjuntos, se requiere de un análisis de la información conocida acerca de determinados subconjuntos y con esta información determinar la cardinalidad de otros subconjuntos, o bien el total de elementos bajo estudio.

Existen diferentes técnicas para resolver este tipo de problemas, una de las cuales hace uso de los diagramas de Venn, otra de ellas emplea tablas, en donde se representa la información pertinente y una tercer técnica es por medio de fórmulas para obtener el número de elementos. En esta sección analizaremos cada una de ellas.

EJEMPLO 2

En una encuesta realizada a jóvenes acerca de sus preferencias con respecto a los deportes, se obtuvo la información siguiente:

69 prefieren el fútbol.
46 prefieren el béisbol.
32 prefieren el rugby.
18 prefieren el fútbol y el rugby.
9 prefieren el béisbol y el fútbol.
12 prefieren el béisbol y el rugby.
3 prefieren los tres deportes.
19 no les gustan esos tres deportes.

Con base en la información anterior, responda cada una de las preguntas siguientes:

a. *¿Cuántos jóvenes se encuestaron?*
b. *¿Cuántos jóvenes sólo prefieren el rugby y ninguno de los otros dos?*
c. *¿Cuántos prefieren béisbol y rugby pero no fútbol?*
d. *¿Cuántos jóvenes prefieren exactamente uno de los tres deportes?*

Solución:

Debe tener precaución, pues no basta con sumar los 8 números dados ya que existen conjuntos traslapados, como se muestra en el diagrama siguiente, en el que:

$U = \{$jóvenes que participaron en la encuesta$\}$
$F = \{$prefieren fútbol$\}$
$B = \{$prefieren béisbol$\}$
$R = \{$prefieren rugby$\}$

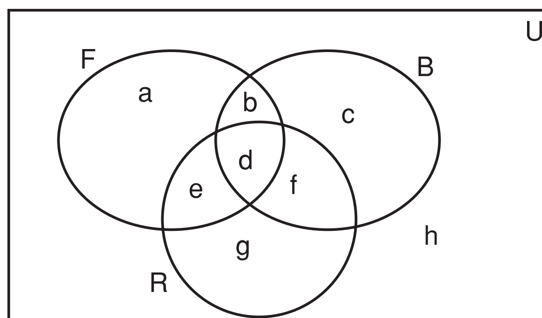


FIGURA A.7 Regiones en que se dividen tres conjuntos traslapados.

Observe que en el diagrama aparecen 8 sectores, cada uno de los cuales lo podemos expresar con palabras. Por ejemplo, el sector f representa a aquellos jóvenes que prefieren el béisbol y el rugby pero no el fútbol; el sector d representa a los que prefieren los tres deportes, mientras que el sector h a los que no les gusta estos tres deportes.

Observe que F está compuesto de cuatro sectores (a, b, d y e) y, por tanto, debemos distribuir a los 69 que prefieren el fútbol en estos sectores, pero, ¿cómo? Notando que el sector d es de aquellos que prefieren los tres deportes (3), nos permite encontrar los valores de b, f y e, ya que las regiones b y d componen a los que prefieren fútbol y béisbol (9); por tanto, en b debe haber 6 (=9 − 3). De forma análoga, en las regiones d y e debe haber 18, por tanto, en e habrá 15 (=18 − 3). Y en la región f debe haber 9.

Ahora bien, el conjunto F lo conforman las regiones a, b, d y e. Y de estas sólo falta por saber cuántos debe haber en la región a. Como en F hay 69, tenemos que en a debe haber 45 (=69 − 6 − 15 − 3). De forma similar, calculamos el número que debe ir en la región c, que es 28 (=46 − 6 . 9 − 3) y en la región g, el cual es 5 (=29 –15 − 3 − 9). El diagrama con el número de jóvenes en cada región se da a continuación.

Con ayuda del diagrama anterior, las respuestas a las preguntas planteadas son fáciles de obtener.

a. El total de encuestados es 45 + 6 + 3 + 15 + 28 + 9 + 5 + 9 = 120.
b. Los que sólo prefieren el rugby y ninguno de los otros dos, se encuentran en la región g, por tanto hay 5.
c. Los que prefieren béisbol y rugby pero no fútbol, están en la región f, así que hay 9.
d. Los jóvenes que prefieren exactamente uno de los tres deportes, son los que están en la región b, en la e o en la f, que en total son 6 + 15 + 9 = 30.

Con base en el ejemplo anterior y en la figura siguiente, podemos deducir una fórmula para $n(A \cup B)$.

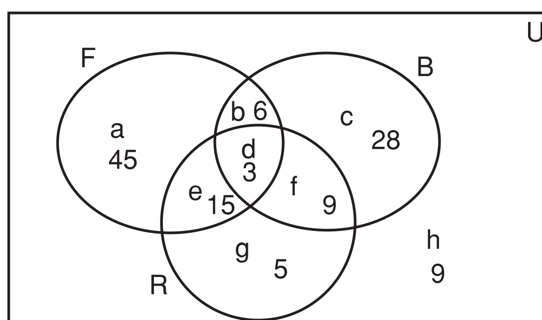


FIGURA A.8 Regiones en que se dividen dos conjuntos que se traslapan.

En general, $n(A \cup B)$ no es igual a $n(A) + n(B)$. Primero vea que

$$n(A \cup B) = a + b + c.$$

Ahora bien, $n(A) = a + b$ y $n(B) = b + c$, si sumamos lo anterior, habremos sumado dos veces b, así que para obtener $a + b + c$, es necesario restar una vez b, que es $n(A \cap B)$, así obtenemos

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Con ayuda del diagrama de la figura A.7, podemos deducir una fórmula análoga para $n(A \cup B \cup C)$, véase el ejercicio 15.

EJEMPLO 3

Si $n(A) = 40$, $n(A \cap B) = 25$ *y* $n(A \cup B) = 70$, *determine* $n(B)$.

Solución:
De la fórmula obtenida antes de este ejemplo, al despejar $n(B)$, tenemos

$$n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B) - n(A).$$

Sustituyendo

$$n(B) = 70 + 25 - 40 = 55.$$

En ocasiones, se muestra la información en forma de tabla como en el ejemplo siguiente, y a partir de esa tabla podemos obtener información valiosa aplicando las ideas básicas de unión e intersección.

EJEMPLO 4

La tabla siguiente muestra el número de defunciones por grupo de edad y sexo en una muestra de 500 fallecimientos de cierta región del planeta.

	Grupo de edad (años)				
	0-10 (D)	**11-30 (T)**	**30-50 (C)**	**Mayor a 50 (V)**	**Totales**
Hombres (H)	200	20	25	60	305
Mujeres (M)	120	15	20	40	195
Totales	320	35	45	100	500

Con base en la tabla anterior, determine el número de elementos en cada uno de los conjuntos siguientes y describa con palabras cada conjunto.

a. $H \cap T$
b. H^c
c. $M \cap (T \cup V)$
d. $T^c \cup H^c$.

Solución:

a. $H \cap T$, representa a los hombres en el grupo de 11 a 30 años. $n(H \cap T)$ se obtiene en la intersección de la fila H con la columna T, es decir, $n(H \cap T) = 20$

b. H^c, representa a los individuos que no son hombres, es decir, a las mujeres. H^c, excluye a la fila H, por lo tanto $n(H^c) = 195$, que se lee al final de la fila M.

c. $M \cap (T \cup V)$ son las mujeres que están en el rango de 11 a 30 o bien mayores de 50 años. El conjunto $T \cup V$ incluye las columnas T y V, al intersecarlas con la fila de M tenemos los números 15 y 40, por tanto,

$$n\emptyset M \cap (T \cup V)] = 55.$$

d. $T^c \cup H^c$, representa a los individuos que no están en el rango de 11 a 30 o bien aquellos que no son hombres. T^c excluye la columna de T, es decir, se consideran las columnas D, C y V, así, $n(T^c) = 320 + 45 + 100 = 465$. Por otro lado, tenemos que H^c es la fila M, ya que excluye la fila H. Se debe tener cuidado de no contar dos veces las regiones que ya se contabilizaron. La única región que falta por agregar de la fila M es el de las mujeres del rango 11 a 30, que son 15. Por lo tanto, $n(T^c \cup H^c) = 465 + 15 = 480$. Observe que del problema 16 de la sección anterior, sabemos que

$$T^c \cup H^c = (T \cap H)^c$$

Y si del total, 500, restamos $n(T \cap H) = 20$, obtenemos $n(T^c \cup H^c) = 500 - 20 = 480$, como antes.

Para concluir, diremos que si dividimos el número cardinal de cada conjunto entre el número cardinal del universo, obtenemos la fracción que representa el conjunto del total, que siempre será un número entre 0 y 1, incluyendo a ambos. Esta fracción se puede considerar como la probabilidad de que al tomar un elemento al azar del universo, éste elemento pertenezca al conjunto dado. Éste enfoque de la probabilidad se le conoce como enfoque frecuencial.

Ejercicio A.4

En los problemas del 1 al 6 clasifique cada conjunto como finito o infinito.

1. {3, 6, 9, 12, . . . , 30}

2. {x|x es un número entero menor a 42}

3. {x|x es un número entero mayor a 42}

4. {x|x es una persona viva al final del año 2002}

5. {x|x es un múltiplo entero de 1000}

6. {x|x es el nombre de un departamento de Colombia}

En los problemas del 7 al 12 determine n(D) para cada conjunto.

7. D = {x|x es una vocal del abecedario español}

8. D = {x|x es departamento de Perú}

9. D = {x|x es un estado de México}

10. D = {x|x es un entero tal que $x^2 = 3$}

11. D = {x|x es un número real tal que $x^2 = 3$}

12. D = {x|x es una letra de la palabra "Venezuela"}

13. En una clínica comunitaria se entrevistó a 100 pacientes y se recabó la información siguiente:

60 iban por problemas respiratorios.

50 asistían por problemas gastrointestinales.

20 iban por ambos problemas.

Emplee un diagrama de Venn para responder las preguntas siguientes:

a. ¿Cuántos iban a consulta por problemas que no fuesen respiratorios ni gastrointestinales?

b. ¿Cuántos asistieron sólo por problemas respiratorios?

14. En una encuesta realizada a adultos de la región norte del país, con respecto al género de cine que preferían, se obtuvo la información siguiente:

120 prefieren la comedia.

100 prefieren el género erótico.

50 les gusta el suspenso.

10 prefieren los géneros erótico y comedia.

16 prefieren comedia y suspenso.

16 prefieren suspenso y erotismo.

6 les agradan los tres géneros.

Se entrevistó a un total de 290 personas adultas.

Responda las preguntas siguientes:

a. ¿Cuántos optan por un género que no es de los tres mencionados?

b. ¿Cuántos prefieren comedia y suspenso pero no cine de erotismo?

c. ¿Cuántos optan por uno sólo de estos géneros?

d. ¿Cuántos sólo prefieren la comedia?

15. Con base en la figura A.7 demuestre que:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cup B) - n(A \cup C) - n(B \cup C) + n(A \cap B \cap C)$$

16. En la tabla siguiente se presenta la información que se recopiló en una población de jóvenes con respecto a sus preferencias musicales.

	Grupo de edad (años)				
	11-14 (C)	**15-17 (S)**	**18-20 (D)**	**20 a 30 (V)**	**Totales**
Rock (R)	22	25	20	15	82
Tropical (T)	8	4	5	9	26
Balada (B)	4	10	8	20	42
Totales	34	39	33	44	150

Determine el número de elementos de cada uno de los conjuntos siguientes:

a. $R \cap (D \cup V)$.

b. $(R \cup B) \cap S$.

c. $T^c \cap S$

d. $V^c \cup B^c$.

A.5 REPASO

Términos y símbolos importantes

Sección A.1 conjunto elemento método por extensión y método por comprensión

Sección A.2 conjunto vacío, ∅ conjunto universal, U, Ω diagrama de Venn-Euler subconjunto, ⊂ y ⊆

Sección A.3 unión, ∪ intersección, ∩ complemento, A^c diferencia

Sección A.4 número cardinal $n(A)$, conjunto finito conjunto infinito

Resumen

Un conjunto es una colección bien definida de objetos, llamados los elementos del conjunto. Si un conjunto no tiene elementos se denomina conjunto vacío. El conjunto al cual, se considera que pertenecen todos los elementos con los que se trabaja, se denomina conjunto universal, o en ocasiones universo del discurso. Un apoyo esquemático para representar conjuntos es el diagrama de Venn-Euler.

Un conjunto A está contenido en otro, B, si todos los elementos de A también pertenece al conjunto B. Escribimos $A \subseteq B$, y decimos que A es subconjunto de B.

Dos conjuntos, A y B son iguales, si se cumple $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Existen varias operaciones básicas entre conjuntos que dan lugar a un nuevo conjunto, éstas son la unión, intersección, complemento y diferencia de conjuntos. La unión de dos conjuntos está formada por los elementos que pertenecen a almenos uno de los conjuntos dados. Mientras que la intersección de dos conjuntos está constituida por aquellos elementos que pertenecen a ambos conjuntos. El conjunto complemento de otro está formado por los elementos del conjunto universal pero que no pertenecen al conjunto dado. Y la diferencia de dos conjuntos la constituyen los elementos que pertenecen al primer conjunto pero no al segundo.

El número de elementos que tiene un conjunto, A, se llama cardinalidad del conjunto, se denota con $n(A)$.

La cardinalidad de la unión de dos conjuntos, $n(A \cup B)$, está dada por

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

El conteo del número de elementos en un conjunto es una parte importante en la comprensión de la probabilidad clásica de eventos.

Problemas de repaso

En los problemas 1 y 2 escriba cada conjunto utilizando el método de extensión.

1. El conjunto de los números enteros positivos que son divisores de 12.

2. El conjunto de los países de América cuyo nombre de su capital inicia con B.

En los problemas del 3 al 6 decida si está o no bien definido el conjunto. Discuta las respuestas con sus compañeros.

3. El conjunto de cantantes de éxito.

4. El conjunto de personas con más de 120 años de edad nacidas el siglo pasado en América.

5. El conjunto de materias difíciles en la escuela.

6. $\{x|x \text{ es un número racional}\}$

7. Construya un diagrama de Venn que ilustre conjuntos A, B y C que cumplan:

$$A \subseteq B \text{ y } A \subseteq C.$$

Hay más de una respuesta correcta.

Para los problemas del 8 al 21 considere:

$U = \{a, b, c, d, e, f\}$

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{b, e, d, a\}$

$C = \{a, f\}$

$D = \{d, e, f\}$

Determine cada uno de los conjuntos siguientes.

8. $A \cup D$

9. $B \cap C$

10. $B \cup (A \cap D)$

11. C^c

12. $D \cap (B \cup A^c)$

13. $C - A$

14. $(A \cap C) - (D \cap B)$

15. $U - B$

Determine si cada una de las proposiciones siguientes es verdadera *o* falsa.

16. $\{b\} \in B$

17. $A \cap D = \varnothing$

18. $n(A \cap B) = 1$

19. $c \in C$

20. $n(A^c \cup B^c) = 5$

21. $A \cap C^c \subseteq B$

Por medio de un práctico diagrama de Venn, sombree la región que corresponde a cada uno de los conjuntos siguientes:

22. $D \cup E^c$

23. $D^c \cap E$

24. $E \cap (D^c \cup F)$

25. $(E \cup D) - (E \cap F^c)$

El año pasado se recibieron quejas de parte de los usuarios de servicio de televisión de paga. La información de las cuatro principales causas de reporte se resume en la tabla siguiente.

Compañía	Cambio de programación	Pérdida de señal	Menos canales de los prometidos	Cobro indebido	Totales
TVO (V)	10	15	18	22	65
CAT (C)	20	14	20	18	72
MVCT (T)	15	20	30	15	80
Totales	45	49	68	55	217

26. Cuántos de los reportes:

a. ¿Son de TVO debido a fallas en la señal?

b. ¿Son de MVCT o TVO debido a cobros indebidos?

Determine el número de elementos de cada uno de los conjuntos siguientes:

27. $(V \cup T) \cap I^c$.

28. $V^c \cap P^c$

29. C^c

30. $(M \cup V) \cap (S \cup M)$

31. En una encuesta realizada a personas que se encontraban de vacaciones en un centro turístico, se obtuvo la información siguiente:

30 prefieren destino de playa.

28 prefieren destino de montaña.

39 prefieren esquiar en nieve.

15 prefieren destino de playa o esquiar en nieve.

13 prefieren destino de playa o de montaña.

11 prefieren destino de montaña o esquiar en nieve.

20 prefieren un destino distinto a los tres anteriores.

Se entrevistó a un total de 86 personas.

Responda las preguntas siguientes:

a. ¿Cuántos prefieren los tres destinos?

b. ¿Cuántos prefieren sólo un tipo de destino, de los tres mencionados?

c. ¿Cuántos optan por exactamente dos de los tres destinos mencionados?

d. ¿Cuántos sólo prefieren el destino de playa?

e. ¿Cuántos se deciden por alguno de los tres destinos mencionados?

Soluciones

EJERCICIO A.1

1. {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}.

3. {Praga, París}

5. {Alemania, Argentina, Brasil, Francia, Inglaterra, Italia, Uruguay}

7. {x|x es un número natural impar menor a 10}

9. {x|x es un número natural par}

11. {x|x es un múltiplo positivo de 7, menor o igual a 700}

13. {x|x es un divisor positivo de 12}

15. {x|x es país de Centroamérica}

17. R = {61, 62, 63, 64, 65, . . .}

19. T = {a, b, c, . . . , x, y, z}

EJERCICIO A.2

1. $\in$

3. $\notin$

5. $\notin$

7. Verdadera

9. Verdadera

11. Verdadera

13. Verdadera

17. Verdadera

19. Verdadera

21. Verdadera

23. Falsa

EJERCICIO A.3

1. U

3. {1, 2, 3, 5, 7, 9}

5. {6}

7. {1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

9. $\varnothing$

11. {2, 4, 6, 8, 10}

21. T^c, es el conjunto de estudiantes que no tiene automóvil.

23. $H \cap F^c$, es el conjunto de estudiantes hombres que no fuman.

25. $H - F$, es el conjunto de estudiantes hombres que no fuman. Igual que el problema 23.

27. Se debe cumplir que $A \subseteq B$

29. Se debe cumplir que $A \cap B = \varnothing$

EJERCICIO A.4

1. Finito

3. Infinito

5. Infinito

7. $n(D) = 5$

9. n(D) = 31

11. $n(D) = 2$

13. **a.** 10, **b.** 40

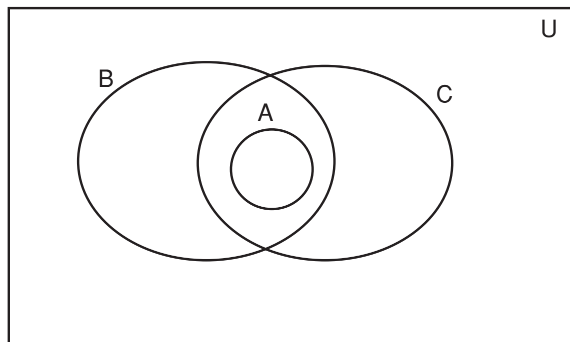
EJERCICIO DE REPASO

1. {1, 2, 3, 4, 6, 12}

3. No está bien definido

5. No está bien definido

7.



Hay más respuestas correctas posibles.

9. {a}

11. {b, c, d, e}

13. {f}

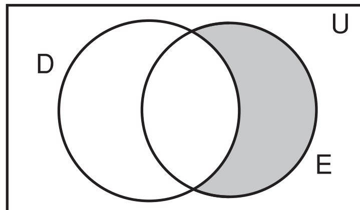
15. {c, f}

17. Verdadera

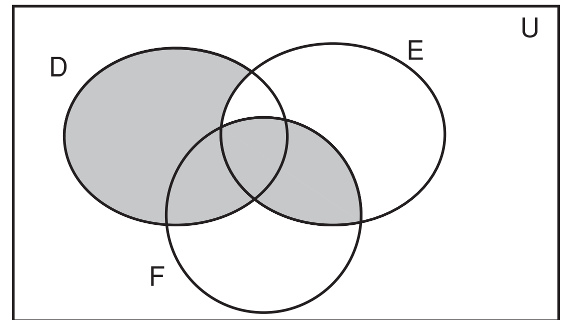
19. Falsa

21. Falsa

23.



25.



27. 108

29. 72

31. **a.** 8, **b.** 43, **c.** 15, **d.** 10, **e.** 66.

APÉNDICE B

Tablas de interés compuesto

$r = 0.005$				
n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\vert r}$	$s_{\overline{n}\vert r}$
1	1.005000	0.995025	0.995025	1.000000
2	1.010025	0.990075	1.985099	2.005000
3	1.015075	0.985149	2.970248	3.015025
4	1.020151	0.980248	3.950496	4.030100
5	1.025251	0.975371	4.925866	5.050251
6	1.030378	0.970518	5.896384	6.075502
7	1.035529	0.965690	6.862074	7.105879
8	1.040707	0.960885	7.822959	8.141409
9	1.045911	0.956105	8.779064	9.182116
10	1.051140	0.951348	9.730412	10.228026
11	1.056396	0.946615	10.677027	11.279167
12	1.061678	0.941905	11.618932	12.335562
13	1.066986	0.937219	12.556151	13.397240
14	1.072321	0.932556	13.488708	14.464226
15	1.077683	0.927917	14.416625	15.536548
16	1.083071	0.923300	15.339925	16.614230
17	1.088487	0.918707	16.258632	17.697301
18	1.093929	0.914136	17.172768	18.785788
19	1.099399	0.909588	18.082356	19.879717
20	1.104896	0.905063	18.987419	20.979115
21	1.110420	0.900560	19.887979	22.084011
22	1.115972	0.896080	20.784059	23.194431
23	1.121552	0.891622	21.675681	24.310403
24	1.127160	0.887186	22.562866	25.431955
25	1.132796	0.882772	23.445638	26.559115
26	1.138460	0.878380	24.324018	27.691911
27	1.144152	0.874010	25.198028	28.830370
28	1.149873	0.869662	26.067689	29.974522
29	1.155622	0.865335	26.933024	31.124395
30	1.161400	0.861030	27.794054	32.280017
31	1.167207	0.856746	28.650800	33.441417
32	1.173043	0.852484	29.503284	34.608624
33	1.178908	0.848242	30.351526	35.781667
34	1.184803	0.844022	31.195548	36.960575
35	1.190727	0.839823	32.035371	38.145378
36	1.196681	0.835645	32.871016	39.336105
37	1.202664	0.831487	33.702504	40.532785
38	1.208677	0.827351	34.529854	41.735449
39	1.214721	0.823235	35.353089	42.944127
40	1.220794	0.819139	36.172228	44.158847
41	1.226898	0.815064	36.987291	45.379642
42	1.233033	0.811009	37.798300	46.606540
43	1.239198	0.806974	38.605274	47.839572
44	1.245394	0.802959	39.408232	49.078770
45	1.251621	0.798964	40.207196	50.324164
46	1.257879	0.794989	41.002185	51.575785
47	1.264168	0.791034	41.793219	52.833664
48	1.270489	0.787098	42.580318	54.097832
49	1.276842	0.783182	43.363500	55.368321
50	1.283226	0.779286	44.142786	56.645163

$r = 0.0075$

n	$(1+r)^n$	$(1+r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\vert r}$	$s_{\overline{n}\vert r}$
1	1.007500	0.992556	0.992556	1.000000
2	1.015056	0.985167	1.977723	2.007500
3	1.022669	0.977833	2.955556	3.022556
4	1.030339	0.970554	3.926110	4.045225
5	1.038067	0.963329	4.889440	5.075565
6	1.045852	0.956158	5.845598	6.113631
7	1.053696	0.949040	6.794638	7.159484
8	1.061599	0.941975	7.736613	8.213180
9	1.069561	0.934963	8.671576	9.274779
10	1.077583	0.928003	9.599580	10.344339
11	1.085664	0.921095	10.520675	11.421922
12	1.093807	0.914238	11.434913	12.507586
13	1.102010	0.907432	12.342345	13.601393
14	1.110276	0.900677	13.243022	14.703404
15	1.118603	0.893973	14.136995	15.813679
16	1.126992	0.887318	15.024313	16.932282
17	1.135445	0.880712	15.905025	18.059274
18	1.143960	0.874156	16.779181	19.194718
19	1.152540	0.867649	17.646830	20.338679
20	1.161184	0.861190	18.508020	21.491219
21	1.169893	0.854779	19.362799	22.652403
22	1.178667	0.848416	20.211215	23.822296
23	1.187507	0.842100	21.053315	25.000963
24	1.196414	0.835831	21.889146	26.188471
25	1.205387	0.829609	22.718755	27.384884
26	1.214427	0.823434	23.542189	28.590271
27	1.223535	0.817304	24.359493	29.804698
28	1.232712	0.811220	25.170713	31.028233
29	1.241957	0.805181	25.975893	32.260945
30	1.251272	0.799187	26.775080	33.502902
31	1.260656	0.793238	27.568318	34.754174
32	1.270111	0.787333	28.355650	36.014830
33	1.279637	0.781472	29.137122	37.284941
34	1.289234	0.775654	29.912776	38.564578
35	1.298904	0.769880	30.682656	39.853813
36	1.308645	0.764149	31.446805	41.152716
37	1.318460	0.758461	32.205266	42.461361
38	1.328349	0.752814	32.958080	43.779822
39	1.338311	0.747210	33.705290	45.108170
40	1.348349	0.741648	34.446938	46.446482
41	1.358461	0.736127	35.183065	47.794830
42	1.368650	0.730647	35.913713	49.153291
43	1.378915	0.725208	36.638921	50.521941
44	1.389256	0.719810	37.358730	51.900856
45	1.399676	0.714451	38.073181	53.290112
46	1.410173	0.709133	38.782314	54.689788
47	1.420750	0.703854	39.486168	56.099961
48	1.431405	0.698614	40.184782	57.520711
49	1.442141	0.693414	40.878195	58.952116
50	1.452957	0.688252	41.566447	60.394257

$r = 0.01$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\vert r}$	$s_{\overline{n}\vert r}$
1	1.010000	0.990099	0.990099	1.000000
2	1.020100	0.980296	1.970395	2.010000
3	1.030301	0.970590	2.940985	3.030100
4	1.040604	0.960980	3.901966	4.060401
5	1.051010	0.951466	4.853431	5.101005
6	1.061520	0.942045	5.795476	6.152015
7	1.072135	0.932718	6.728195	7.213535
8	1.082857	0.923483	7.651678	8.285671
9	1.093685	0.914340	8.566018	9.368527
10	1.104622	0.905287	9.471305	10.462213
11	1.115668	0.896324	10.367628	11.566835
12	1.126825	0.887449	11.255077	12.682503
13	1.138093	0.878663	12.133740	13.809328
14	1.149474	0.869963	13.003703	14.947421
15	1.160969	0.861349	13.865053	16.096896
16	1.172579	0.852821	14.717874	17.257864
17	1.184304	0.844377	15.562251	18.430443
18	1.196147	0.836017	16.398269	19.614748
19	1.208109	0.827740	17.226008	20.810895
20	1.220190	0.819544	18.045553	22.019004
21	1.232392	0.811430	18.856983	23.239194
22	1.244716	0.803396	19.660379	24.471586
23	1.257163	0.795442	20.455821	25.716302
24	1.269735	0.787566	21.243387	26.973465
25	1.282432	0.779768	22.023156	28.243200
26	1.295256	0.772048	22.795204	29.525631
27	1.308209	0.764404	23.559608	30.820888
28	1.321291	0.756836	24.316443	32.129097
29	1.334504	0.749342	25.065785	33.450388
30	1.347849	0.741923	25.807708	34.784892
31	1.361327	0.734577	26.542285	36.132740
32	1.374941	0.727304	27.269589	37.494068
33	1.388690	0.720103	27.989693	38.869009
34	1.402577	0.712973	28.702666	40.257699
35	1.416603	0.705914	29.408580	41.660276
36	1.430769	0.698925	30.107505	43.076878
37	1.445076	0.692005	30.799510	44.507647
38	1.459527	0.685153	31.484663	45.952724
39	1.474123	0.678370	32.163033	47.412251
40	1.488864	0.671653	32.834686	48.886373
41	1.503752	0.665003	33.499689	50.375237
42	1.518790	0.658419	34.158108	51.878989
43	1.533978	0.651900	34.810008	53.397779
44	1.549318	0.645445	35.455454	54.931757
45	1.564811	0.639055	36.094508	56.481075
46	1.580459	0.632728	36.727236	58.045885
47	1.596263	0.626463	37.353699	59.626344
48	1.612226	0.620260	37.973959	61.222608
49	1.628348	0.614119	38.588079	62.834834
50	1.644632	0.608039	39.196118	64.463182

$r = 0.0125$

n	$(1+r)^n$	$(1+r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\rvert r}$	$s_{\overline{n}\rvert r}$
1	1.012500	0.987654	0.987654	1.000000
2	1.025156	0.975461	1.963115	2.012500
3	1.037971	0.963418	2.926534	3.037656
4	1.050945	0.951524	3.878058	4.075627
5	1.064082	0.939777	4.817835	5.126572
6	1.077383	0.928175	5.746010	6.190654
7	1.090850	0.916716	6.662726	7.268038
8	1.104486	0.905398	7.568124	8.358888
9	1.118292	0.894221	8.462345	9.463374
10	1.132271	0.883181	9.345526	10.581666
11	1.146424	0.872277	10.217803	11.713937
12	1.160755	0.861509	11.079312	12.860361
13	1.175264	0.850873	11.930185	14.021116
14	1.189955	0.840368	12.770553	15.196380
15	1.204829	0.829993	13.600546	16.386335
16	1.219890	0.819746	14.420292	17.591164
17	1.235138	0.809626	15.229918	18.811053
18	1.250577	0.799631	16.029549	20.046192
19	1.266210	0.789759	16.819308	21.296769
20	1.282037	0.780009	17.599316	22.562979
21	1.298063	0.770379	18.369695	23.845016
22	1.314288	0.760868	19.130563	25.143078
23	1.330717	0.751475	19.882037	26.457367
24	1.347351	0.742197	20.624235	27.788084
25	1.364193	0.733034	21.357269	29.135435
26	1.381245	0.723984	22.081253	30.499628
27	1.398511	0.715046	22.796299	31.880873
28	1.415992	0.706219	23.502518	33.279384
29	1.433692	0.697500	24.200018	34.695377
30	1.451613	0.688889	24.888906	36.129069
31	1.469759	0.680384	25.569290	37.580682
32	1.488131	0.671984	26.241274	39.050441
33	1.506732	0.663688	26.904962	40.538571
34	1.525566	0.655494	27.560456	42.045303
35	1.544636	0.647402	28.207858	43.570870
36	1.563944	0.639409	28.847267	45.115505
37	1.583493	0.631515	29.478783	46.679449
38	1.603287	0.623719	30.102501	48.262942
39	1.623328	0.616019	30.718520	49.866229
40	1.643619	0.608413	31.326933	51.489557
41	1.664165	0.600902	31.927835	53.133177
42	1.684967	0.593484	32.521319	54.797341
43	1.706029	0.586157	33.107475	56.482308
44	1.727354	0.578920	33.686395	58.188337
45	1.748946	0.571773	34.258168	59.915691
46	1.770808	0.564714	34.822882	61.664637
47	1.792943	0.557742	35.380624	63.435445
48	1.815355	0.550856	35.931481	65.228388
49	1.838047	0.544056	36.475537	67.043743
50	1.861022	0.537339	37.012876	68.881790

$r = 0.015$				
n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\vert r}$	$s_{\overline{n}\vert r}$
1	1.015000	0.985222	0.985222	1.000000
2	1.030225	0.970662	1.955883	2.015000
3	1.045678	0.956317	2.912200	3.045225
4	1.061364	0.942184	3.854385	4.090903
5	1.077284	0.928260	4.782645	5.152267
6	1.093443	0.914542	5.697187	6.229551
7	1.109845	0.901027	6.598214	7.322994
8	1.126493	0.887711	7.485925	8.432839
9	1.143390	0.874592	8.360517	9.559332
10	1.160541	0.861667	9.222185	10.702722
11	1.177949	0.848933	10.071118	11.863262
12	1.195618	0.836387	10.907505	13.041211
13	1.213552	0.824027	11.731532	14.236830
14	1.231756	0.811849	12.543382	15.450382
15	1.250232	0.799852	13.343233	16.682138
16	1.268986	0.788031	14.131264	17.932370
17	1.288020	0.776385	14.907649	19.201355
18	1.307341	0.764912	15.672561	20.489376
19	1.326951	0.753607	16.426168	21.796716
20	1.346855	0.742470	17.168639	23.123667
21	1.367058	0.731498	17.900137	24.470522
22	1.387564	0.720688	18.620824	25.837580
23	1.408377	0.710037	19.330861	27.225144
24	1.429503	0.699544	20.030405	28.633521
25	1.450945	0.689206	20.719611	30.063024
26	1.472710	0.679021	21.398632	31.513969
27	1.494800	0.668986	22.067617	32.986678
28	1.517222	0.659099	22.726717	34.481479
29	1.539981	0.649359	23.376076	35.998701
30	1.563080	0.639762	24.015838	37.538681
31	1.586526	0.630308	24.646146	39.101762
32	1.610324	0.620993	25.267139	40.688288
33	1.634479	0.611816	25.878954	42.298612
34	1.658996	0.602774	26.481728	43.933092
35	1.683881	0.593866	27.075595	45.592088
36	1.709140	0.585090	27.660684	47.275969
37	1.734777	0.576443	28.237127	48.985109
38	1.760798	0.567924	28.805052	50.719885
39	1.787210	0.559531	29.364583	52.480684
40	1.814018	0.551262	29.915845	54.267894
41	1.841229	0.543116	30.458961	56.081912
42	1.868847	0.535089	30.994050	57.923141
43	1.896880	0.527182	31.521232	59.791988
44	1.925333	0.519391	32.040622	61.688868
45	1.954213	0.511715	32.552337	63.614201
46	1.983526	0.504153	33.056490	65.568414
47	2.013279	0.496702	33.553192	67.551940
48	2.043478	0.489362	34.042554	69.565219
49	2.074130	0.482130	34.524683	71.608698
50	2.105242	0.475005	34.999688	73.682828

$r = 0.02$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\|r}$	$s_{\overline{n}\|r}$
1	1.020000	0.980392	0.980392	1.000000
2	1.040400	0.961169	1.941561	2.020000
3	1.061208	0.942322	2.883883	3.060400
4	1.082432	0.923845	3.807729	4.121608
5	1.104081	0.905731	4.713460	5.204040
6	1.126162	0.887971	5.601431	6.308121
7	1.148686	0.870560	6.471991	7.434283
8	1.171659	0.853490	7.325481	8.582969
9	1.195093	0.836755	8.162237	9.754628
10	1.218994	0.820348	8.982585	10.949721
11	1.243374	0.804263	9.786848	12.168715
12	1.268242	0.788493	10.575341	13.412090
13	1.293607	0.773033	11.348374	14.680332
14	1.319479	0.757875	12.106249	15.973938
15	1.345868	0.743015	12.849264	17.293417
16	1.372786	0.728446	13.577709	18.639285
17	1.400241	0.714163	14.291872	20.012071
18	1.428246	0.700159	14.992031	21.412312
19	1.456811	0.686431	15.678462	22.840559
20	1.485947	0.672971	16.351433	24.297370
21	1.515666	0.659776	17.011209	25.783317
22	1.545980	0.646839	17.658048	27.298984
23	1.576899	0.634156	18.292204	28.844963
24	1.608437	0.621721	18.913926	30.421862
25	1.640606	0.609531	19.523456	32.030300
26	1.673418	0.597579	20.121036	33.670906
27	1.706886	0.585862	20.706898	35.344324
28	1.741024	0.574375	21.281272	37.051210
29	1.775845	0.563112	21.844385	38.792235
30	1.811362	0.552071	22.396456	40.568079
31	1.847589	0.541246	22.937702	42.379441
32	1.884541	0.530633	23.468335	44.227030
33	1.922231	0.520229	23.988564	46.111570
34	1.960676	0.510028	24.498592	48.033802
35	1.999890	0.500028	24.998619	49.994478
36	2.039887	0.490223	25.488842	51.994367
37	2.080685	0.480611	25.969453	54.034255
38	2.122299	0.471187	26.440641	56.114940
39	2.164745	0.461948	26.902589	58.237238
40	2.208040	0.452890	27.355479	60.401983
41	2.252200	0.444010	27.799489	62.610023
42	2.297244	0.435304	28.234794	64.862223
43	2.343189	0.426769	28.661562	67.159468
44	2.390053	0.418401	29.079963	69.502657
45	2.437854	0.410197	29.490160	71.892710
46	2.486611	0.402154	29.892314	74.330564
47	2.536344	0.394268	30.286582	76.817176
48	2.587070	0.386538	30.673120	79.353519
49	2.638812	0.378958	31.052078	81.940590
50	2.691588	0.371528	31.423606	84.579401

$r = 0.025$

n	$(1+r)^n$	$(1+r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\rvert r}$	$s_{\overline{n}\rvert r}$
1	1.025000	0.975610	0.975610	1.000000
2	1.050625	0.951814	1.927424	2.025000
3	1.076891	0.928599	2.856024	3.075625
4	1.103813	0.905951	3.761974	4.152516
5	1.131408	0.883854	4.645828	5.256329
6	1.159693	0.862297	5.508125	6.387737
7	1.188686	0.841265	6.349391	7.547430
8	1.218403	0.820747	7.170137	8.736116
9	1.248863	0.800728	7.970866	9.954519
10	1.280085	0.781198	8.752064	11.203382
11	1.312087	0.762145	9.514209	12.483466
12	1.344889	0.743556	10.257765	13.795553
13	1.378511	0.725420	10.983185	15.140442
14	1.412974	0.707727	11.690912	16.518953
15	1.448298	0.690466	12.381378	17.931927
16	1.484506	0.673625	13.055003	19.380225
17	1.521618	0.657195	13.712198	20.864730
18	1.559659	0.641166	14.353364	22.386349
19	1.598650	0.625528	14.978891	23.946007
20	1.638616	0.610271	15.589162	25.544658
21	1.679582	0.595386	16.184549	27.183274
22	1.721571	0.580865	16.765413	28.862856
23	1.764611	0.566697	17.332110	30.584427
24	1.808726	0.552875	17.884986	32.349038
25	1.853944	0.539391	18.424376	34.157764
26	1.900293	0.526235	18.950611	36.011708
27	1.947800	0.513400	19.464011	37.912001
28	1.996495	0.500878	19.964889	39.859801
29	2.046407	0.488661	20.453550	41.856296
30	2.097568	0.476743	20.930293	43.902703
31	2.150007	0.465115	21.395407	46.000271
32	2.203757	0.453771	21.849178	48.150278
33	2.258851	0.442703	22.291881	50.354034
34	2.315322	0.431905	22.723786	52.612885
35	2.373205	0.421371	23.145157	54.928207
36	2.432535	0.411094	23.556251	57.301413
37	2.493349	0.401067	23.957318	59.733948
38	2.555682	0.391285	24.348603	62.227297
39	2.619574	0.381741	24.730344	64.782979
40	2.685064	0.372431	25.102775	67.402554
41	2.752190	0.363347	25.466122	70.087617
42	2.820995	0.354485	25.820607	72.839808
43	2.891520	0.345839	26.166446	75.660803
44	2.963808	0.337404	26.503849	78.552323
45	3.037903	0.329174	26.833024	81.516131
46	3.113851	0.321146	27.154170	84.554034
47	3.191697	0.313313	27.467483	87.667885
48	3.271490	0.305671	27.773154	90.859582
49	3.353277	0.298216	28.071369	94.131072
50	3.437109	0.290942	28.362312	97.484349

$r = 0.03$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\vert r}$	$s_{\overline{n}\vert r}$
1	1.030000	0.970874	0.970874	1.000000
2	1.060900	0.942596	1.913470	2.030000
3	1.092727	0.915142	2.828611	3.090900
4	1.125509	0.888487	3.717098	4.183627
5	1.159274	0.862609	4.579707	5.309136
6	1.194052	0.837484	5.417191	6.468410
7	1.229874	0.813092	6.230283	7.662462
8	1.266770	0.789409	7.019692	8.892336
9	1.304773	0.766417	7.786109	10.159106
10	1.343916	0.744094	8.530203	11.463879
11	1.384234	0.722421	9.252624	12.807796
12	1.425761	0.701380	9.954004	14.192030
13	1.468534	0.680951	10.634955	15.617790
14	1.512590	0.661118	11.296073	17.086324
15	1.557967	0.641862	11.937935	18.598914
16	1.604706	0.623167	12.561102	20.156881
17	1.652848	0.605016	13.166118	21.761588
18	1.702433	0.587395	13.753513	23.414435
19	1.753506	0.570286	14.323799	25.116868
20	1.806111	0.553676	14.877475	26.870374
21	1.860295	0.537549	15.415024	28.676486
22	1.916103	0.521893	15.936917	30.536780
23	1.973587	0.506692	16.443608	32.452884
24	2.032794	0.491934	16.935542	34.426470
25	2.093778	0.477606	17.413148	36.459264
26	2.156591	0.463695	17.876842	38.553042
27	2.221289	0.450189	18.327031	40.709634
28	2.287928	0.437077	18.764108	42.930923
29	2.356566	0.424346	19.188455	45.218850
30	2.427262	0.411987	19.600441	47.575416
31	2.500080	0.399987	20.000428	50.002678
32	2.575083	0.388337	20.388766	52.502759
33	2.652335	0.377026	20.765792	55.077841
34	2.731905	0.366045	21.131837	57.730177
35	2.813862	0.355383	21.487220	60.462082
36	2.898278	0.345032	21.832252	63.275944
37	2.985227	0.334983	22.167235	66.174223
38	3.074783	0.325226	22.492462	69.159449
39	3.167027	0.315754	22.808215	72.234233
40	3.262038	0.306557	23.114772	75.401260
41	3.359899	0.297628	23.412400	78.663298
42	3.460696	0.288959	23.701359	82.023196
43	3.564517	0.280543	23.981902	85.483892
44	3.671452	0.272372	24.254274	89.048409
45	3.781596	0.264439	24.518713	92.719861
46	3.895044	0.256737	24.775449	96.501457
47	4.011895	0.249259	25.024708	100.396501
48	4.132252	0.241999	25.266707	104.408396
49	4.256219	0.234950	25.501657	108.540648
50	4.383906	0.228107	25.729764	112.796867

$r = 0.035$				
n	$(1+r)^n$	$(1+r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\vert r}$	$s_{\overline{n}\vert r}$
1	1.035000	0.966184	0.966184	1.000000
2	1.071225	0.933511	1.899694	2.035000
3	1.108718	0.901943	2.801637	3.106225
4	1.147523	0.871442	3.673079	4.214943
5	1.187686	0.841973	4.515052	5.362466
6	1.229255	0.813501	5.328553	6.550152
7	1.272279	0.785991	6.114544	7.779408
8	1.316809	0.759412	6.873956	9.051687
9	1.362897	0.733731	7.607687	10.368496
10	1.410599	0.708919	8.316605	11.731393
11	1.459970	0.684946	9.001551	13.141992
12	1.511069	0.661783	9.663334	14.601962
13	1.563956	0.639404	10.302738	16.113030
14	1.618695	0.617782	10.920520	17.676986
15	1.675349	0.596891	11.517411	19.295681
16	1.733986	0.576706	12.094117	20.971030
17	1.794676	0.557204	12.651321	22.705016
18	1.857489	0.538361	13.189682	24.499691
19	1.922501	0.520156	13.709837	26.357180
20	1.989789	0.502566	14.212403	28.279682
21	2.059431	0.485571	14.697974	30.269471
22	2.131512	0.469151	15.167125	32.328902
23	2.206114	0.453286	15.620410	34.460414
24	2.283328	0.437957	16.058368	36.666528
25	2.363245	0.423147	16.481515	38.949857
26	2.445959	0.408838	16.890352	41.313102
27	2.531567	0.395012	17.285365	43.759060
28	2.620172	0.381654	17.667019	46.290627
29	2.711878	0.368748	18.035767	48.910799
30	2.806794	0.356278	18.392045	51.622677
31	2.905031	0.344230	18.736276	54.429471
32	3.006708	0.332590	19.068865	57.334502
33	3.111942	0.321343	19.390208	60.341210
34	3.220860	0.310476	19.700684	63.453152
35	3.333590	0.299977	20.000661	66.674013
36	3.450266	0.289833	20.290494	70.007603
37	3.571025	0.280032	20.570525	73.457869
38	3.696011	0.270562	20.841087	77.028895
39	3.825372	0.261413	21.102500	80.724906
40	3.959260	0.252572	21.355072	84.550278
41	4.097834	0.244031	21.599104	88.509537
42	4.241258	0.235779	21.834883	92.607371
43	4.389702	0.227806	22.062689	96.848629
44	4.543342	0.220102	22.282791	101.238331
45	4.702359	0.212659	22.495450	105.781673
46	4.866941	0.205468	22.700918	110.484031
47	5.037284	0.198520	22.899438	115.350973
48	5.213589	0.191806	23.091244	120.388257
49	5.396065	0.185320	23.276564	125.601846
50	5.584927	0.179053	23.455618	130.997910

$r = 0.04$

n	$(1+r)^n$	$(1+r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\vert r}$	$s_{\overline{n}\vert r}$
1	1.040000	0.961538	0.961538	1.000000
2	1.081600	0.924556	1.886095	2.040000
3	1.124864	0.888996	2.775091	3.121600
4	1.169859	0.854804	3.629895	4.246464
5	1.216653	0.821927	4.451822	5.416323
6	1.265319	0.790315	5.242137	6.632975
7	1.315932	0.759918	6.002055	7.898294
8	1.368569	0.730690	6.732745	9.214226
9	1.423312	0.702587	7.435332	10.582795
10	1.480244	0.675564	8.110896	12.006107
11	1.539454	0.649581	8.760477	13.486351
12	1.601032	0.624597	9.385074	15.025805
13	1.665074	0.600574	9.985648	16.626838
14	1.731676	0.577475	10.563123	18.291911
15	1.800944	0.555265	11.118387	20.023588
16	1.872981	0.533908	11.652296	21.824531
17	1.947900	0.513373	12.165669	23.697512
18	2.025817	0.493628	12.659297	25.645413
19	2.106849	0.474642	13.133939	27.671229
20	2.191123	0.456387	13.590326	29.778079
21	2.278768	0.438834	14.029160	31.969202
22	2.369919	0.421955	14.451115	34.247970
23	2.464716	0.405726	14.856842	36.617889
24	2.563304	0.390121	15.246963	39.082604
25	2.665836	0.375117	15.622080	41.645908
26	2.772470	0.360689	15.982769	44.311745
27	2.883369	0.346817	16.329586	47.084214
28	2.998703	0.333477	16.663063	49.967583
29	3.118651	0.320651	16.983715	52.966286
30	3.243398	0.308319	17.292033	56.084938
31	3.373133	0.296460	17.588494	59.328335
32	3.508059	0.285058	17.873551	62.701469
33	3.648381	0.274094	18.147646	66.209527
34	3.794316	0.263552	18.411198	69.857909
35	3.946089	0.253415	18.664613	73.652225
36	4.103933	0.243669	18.908282	77.598314
37	4.268090	0.234297	19.142579	81.702246
38	4.438813	0.225285	19.367864	85.970336
39	4.616366	0.216621	19.584485	90.409150
40	4.801021	0.208289	19.792774	95.025516
41	4.993061	0.200278	19.993052	99.826536
42	5.192784	0.192575	20.185627	104.819598
43	5.400495	0.185168	20.370795	110.012382
44	5.616515	0.178046	20.548841	115.412877
45	5.841176	0.171198	20.720040	121.029392
46	6.074823	0.164614	20.884654	126.870568
47	6.317816	0.158283	21.042936	132.945390
48	6.570528	0.152195	21.195131	139.263206
49	6.833349	0.146341	21.341472	145.833734
50	7.106683	0.140713	21.482185	152.667084

$r = 0.05$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\vert r}$	$s_{\overline{n}\vert r}$
1	1.050000	0.952381	0.952381	1.000000
2	1.102500	0.907029	1.859410	2.050000
3	1.157625	0.863838	2.723248	3.152500
4	1.215506	0.822702	3.545951	4.310125
5	1.276282	0.783526	4.329477	5.525631
6	1.340096	0.746215	5.075692	6.801913
7	1.407100	0.710681	5.786373	8.142008
8	1.477455	0.676839	6.463213	9.549109
9	1.551328	0.644609	7.107822	11.026564
10	1.628895	0.613913	7.721735	12.577893
11	1.710339	0.584679	8.306414	14.206787
12	1.795856	0.556837	8.863252	15.917127
13	1.885649	0.530321	9.393573	17.712983
14	1.979932	0.505068	9.898641	19.598632
15	2.078928	0.481017	10.379658	21.578564
16	2.182875	0.458112	10.837770	23.657492
17	2.292018	0.436297	11.274066	25.840366
18	2.406619	0.415521	11.689587	28.132385
19	2.526950	0.395734	12.085321	30.539004
20	2.653298	0.376889	12.462210	33.065954
21	2.785963	0.358942	12.821153	35.719252
22	2.925261	0.341850	13.163003	38.505214
23	3.071524	0.325571	13.488574	41.430475
24	3.225100	0.310068	13.798642	44.501999
25	3.386355	0.295303	14.093945	47.727099
26	3.555673	0.281241	14.375185	51.113454
27	3.733456	0.267848	14.643034	54.669126
28	3.920129	0.255094	14.898127	58.402583
29	4.116136	0.242946	15.141074	62.322712
30	4.321942	0.231377	15.372451	66.438848
31	4.538039	0.220359	15.592811	70.760790
32	4.764941	0.209866	15.802677	75.298829
33	5.003189	0.199873	16.002549	80.063771
34	5.253348	0.190355	16.192904	85.066959
35	5.516015	0.181290	16.374194	90.320307
36	5.791816	0.172657	16.546852	95.836323
37	6.081407	0.164436	16.711287	101.628139
38	6.385477	0.156605	16.867893	107.709546
39	6.704751	0.149148	17.017041	114.095023
40	7.039989	0.142046	17.159086	120.799774
41	7.391988	0.135282	17.294368	127.839763
42	7.761588	0.128840	17.423208	135.231751
43	8.149667	0.122704	17.545912	142.993339
44	8.557150	0.116861	17.662773	151.143006
45	8.985008	0.111297	17.774070	159.700156
46	9.434258	0.105997	17.880066	168.685164
47	9.905971	0.100949	17.981016	178.119422
48	10.401270	0.096142	18.077158	188.025393
49	10.921333	0.091564	18.168722	198.426663
50	11.467400	0.087204	18.255925	209.347996

$r = 0.06$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\vert r}$	$s_{\overline{n}\vert r}$
1	1.060000	0.943396	0.943396	1.000000
2	1.123600	0.889996	1.833393	2.060000
3	1.191016	0.839619	2.673012	3.183600
4	1.262477	0.792094	3.465106	4.374616
5	1.338226	0.747258	4.212364	5.637093
6	1.418519	0.704961	4.917324	6.975319
7	1.503630	0.665057	5.582381	8.393838
8	1.593848	0.627412	6.209794	9.897468
9	1.689479	0.591898	6.801692	11.491316
10	1.790848	0.558395	7.360087	13.180795
11	1.898299	0.526788	7.886875	14.971643
12	2.012196	0.496969	8.383844	16.869941
13	2.132928	0.468839	8.852683	18.882138
14	2.260904	0.442301	9.294984	21.015066
15	2.396558	0.417265	9.712249	23.275970
16	2.540352	0.393646	10.105895	25.672528
17	2.692773	0.371364	10.477260	28.212880
18	2.854339	0.350344	10.827603	30.905653
19	3.025600	0.330513	11.158116	33.759992
20	3.207135	0.311805	11.469921	36.785591
21	3.399564	0.294155	11.764077	39.992727
22	3.603537	0.277505	12.041582	43.392290
23	3.819750	0.261797	12.303379	46.995828
24	4.048935	0.246979	12.550358	50.815577
25	4.291871	0.232999	12.783356	54.864512
26	4.549383	0.219810	13.003166	59.156383
27	4.822346	0.207368	13.210534	63.705766
28	5.111687	0.195630	13.406164	68.528112
29	5.418388	0.184557	13.590721	73.639798
30	5.743491	0.174110	13.764831	79.058186
31	6.088101	0.164255	13.929086	84.801677
32	6.453387	0.154957	14.084043	90.889778
33	6.840590	0.146186	14.230230	97.343165
34	7.251025	0.137912	14.368141	104.183755
35	7.686087	0.130105	14.498246	111.434780
36	8.147252	0.122741	14.620987	119.120867
37	8.636087	0.115793	14.736780	127.268119
38	9.154252	0.109239	14.846019	135.904206
39	9.703507	0.103056	14.949075	145.058458
40	10.285718	0.097222	15.046297	154.761966
41	10.902861	0.091719	15.138016	165.047684
42	11.557033	0.086527	15.224543	175.950545
43	12.250455	0.081630	15.306173	187.507577
44	12.985482	0.077009	15.383182	199.758032
45	13.764611	0.072650	15.455832	212.743514
46	14.590487	0.068538	15.524370	226.508125
47	15.465917	0.064658	15.589028	241.098612
48	16.393872	0.060998	15.650027	256.564529
49	17.377504	0.057546	15.707572	272.958401
50	18.420154	0.054288	15.761861	290.335905

$r = 0.07$

n	$(1 + r)^n$	$(1 + r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\vert r}$	$s_{\overline{n}\vert r}$
1	1.070000	0.934579	0.934579	1.000000
2	1.144900	0.873439	1.808018	2.070000
3	1.225043	0.816298	2.624316	3.214900
4	1.310796	0.762895	3.387211	4.439943
5	1.402552	0.712986	4.100197	5.750739
6	1.500730	0.666342	4.766540	7.153291
7	1.605781	0.622750	5.389289	8.654021
8	1.718186	0.582009	5.971299	10.259803
9	1.838459	0.543934	6.515232	11.977989
10	1.967151	0.508349	7.023582	13.816448
11	2.104852	0.475093	7.498674	15.783599
12	2.252192	0.444012	7.942686	17.888451
13	2.409845	0.414964	8.357651	20.140643
14	2.578534	0.387817	8.745468	22.550488
15	2.759032	0.362446	9.107914	25.129022
16	2.952164	0.338735	9.446649	27.888054
17	3.158815	0.316574	9.763223	30.840217
18	3.379932	0.295864	10.059087	33.999033
19	3.616528	0.276508	10.335595	37.378965
20	3.869684	0.258419	10.594014	40.995492
21	4.140562	0.241513	10.835527	44.865177
22	4.430402	0.225713	11.061240	49.005739
23	4.740530	0.210947	11.272187	53.436141
24	5.072367	0.197147	11.469334	58.176671
25	5.427433	0.184249	11.653583	63.249038
26	5.807353	0.172195	11.825779	68.676470
27	6.213868	0.160930	11.986709	74.483823
28	6.648838	0.150402	12.137111	80.697691
29	7.114257	0.140563	12.277674	87.346529
30	7.612255	0.131367	12.409041	94.460786
31	8.145113	0.122773	12.531814	102.073041
32	8.715271	0.114741	12.646555	110.218154
33	9.325340	0.107235	12.753790	118.933425
34	9.978114	0.100219	12.854009	128.258765
35	10.676581	0.093663	12.947672	138.236878
36	11.423942	0.087535	13.035208	148.913460
37	12.223618	0.081809	13.117017	160.337402
38	13.079271	0.076457	13.193473	172.561020
39	13.994820	0.071455	13.264928	185.640292
40	14.974458	0.066780	13.331709	199.635112
41	16.022670	0.062412	13.394120	214.609570
42	17.144257	0.058329	13.452449	230.632240
43	18.344355	0.054513	13.506962	247.776496
44	19.628460	0.050946	13.557908	266.120851
45	21.002452	0.047613	13.605522	285.749311
46	22.472623	0.044499	13.650020	306.751763
47	24.045707	0.041587	13.691608	329.224386
48	25.728907	0.038867	13.730474	353.270093
49	27.529930	0.036324	13.766799	378.999000
50	29.457025	0.033948	13.800746	406.528929

$r = 0.08$

n	$(1+r)^n$	$(1+r)^{-n}$	$a_{\overline{n}\vert r}$	$s_{\overline{n}\vert r}$
1	1.080000	0.925926	0.925926	1.000000
2	1.166400	0.857339	1.783265	2.080000
3	1.259712	0.793832	2.577097	3.246400
4	1.360489	0.735030	3.312127	4.506112
5	1.469328	0.680583	3.992710	5.866601
6	1.586874	0.630170	4.622880	7.335929
7	1.713824	0.583490	5.206370	8.922803
8	1.850930	0.540269	5.746639	10.636628
9	1.999005	0.500249	6.246888	12.487558
10	2.158925	0.463193	6.710081	14.486562
11	2.331639	0.428883	7.138964	16.645487
12	2.518170	0.397114	7.536078	18.977126
13	2.719624	0.367698	7.903776	21.495297
14	2.937194	0.340461	8.244237	24.214920
15	3.172169	0.315242	8.559479	27.152114
16	3.425943	0.291890	8.851369	30.324283
17	3.700018	0.270269	9.121638	33.750226
18	3.996019	0.250249	9.371887	37.450244
19	4.315701	0.231712	9.603599	41.446263
20	4.660957	0.214548	9.818147	45.761964
21	5.033834	0.198656	10.016803	50.422921
22	5.436540	0.183941	10.200744	55.456755
23	5.871464	0.170315	10.371059	60.893296
24	6.341181	0.157699	10.528758	66.764759
25	6.848475	0.146018	10.674776	73.105940
26	7.396353	0.135202	10.809978	79.954415
27	7.988061	0.125187	10.935165	87.350768
28	8.627106	0.115914	11.051078	95.338830
29	9.317275	0.107328	11.158406	103.965936
30	10.062657	0.099377	11.257783	113.283211
31	10.867669	0.092016	11.349799	123.345868
32	11.737083	0.085200	11.434999	134.213537
33	12.676050	0.078889	11.513888	145.950620
34	13.690134	0.073045	11.586934	158.626670
35	14.785344	0.067635	11.654568	172.316804
36	15.968172	0.062625	11.717193	187.102148
37	17.245626	0.057986	11.775179	203.070320
38	18.625276	0.053690	11.828869	220.315945
39	20.115298	0.049713	11.878582	238.941221
40	21.724521	0.046031	11.924613	259.056519
41	23.462483	0.042621	11.967235	280.781040
42	25.339482	0.039464	12.006699	304.243523
43	27.366640	0.036541	12.043240	329.583005
44	29.555972	0.033834	12.077074	356.949646
45	31.920449	0.031328	12.108402	386.505617
46	34.474085	0.029007	12.137409	418.426067
47	37.232012	0.026859	12.164267	452.900152
48	40.210573	0.024869	12.189136	490.132164
49	43.427419	0.023027	12.212163	530.342737
50	46.901613	0.021321	12.233485	573.770156

Tabla de integrales seleccionadas

Formas racionales que contienen $(a + bu)$

1. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$

2. $\int \dfrac{du}{a+bu} = \dfrac{1}{b}\ln|a+bu| + C.$

3. $\int \dfrac{u\,du}{a+bu} = \dfrac{u}{b} - \dfrac{a}{b^2}\ln|a+bu| + C.$

4. $\int \dfrac{u^2\,du}{a+bu} = \dfrac{u^2}{2b} - \dfrac{au}{b^2} + \dfrac{a^2}{b^3}\ln|a+bu| + C.$

5. $\int \dfrac{du}{u(a+bu)} = \dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{u}{a+bu}\right| + C.$

6. $\int \dfrac{du}{u^2(a+bu)} = -\dfrac{1}{au} + \dfrac{b}{a^2}\ln\left|\dfrac{a+bu}{u}\right| + C.$

7. $\int \dfrac{u\,du}{(a+bu)^2} = \dfrac{1}{b^2}\left(\ln|a+bu| + \dfrac{a}{a+bu}\right) + C.$

8. $\int \dfrac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \dfrac{u}{b^2} - \dfrac{a^2}{b^3(a+bu)} - \dfrac{2a}{b^3}\ln|a+bu| + C.$

9. $\int \dfrac{du}{u(a+bu)^2} = \dfrac{1}{a(a+bu)} + \dfrac{1}{a^2}\ln\left|\dfrac{u}{a+bu}\right| + C.$

10. $\int \dfrac{du}{u^2(a+bu)^2} = -\dfrac{a+2bu}{a^2u(a+bu)} + \dfrac{2b}{a^3}\ln\left|\dfrac{a+bu}{u}\right| + C.$

11. $\int \dfrac{du}{(a+bu)(c+ku)} = \dfrac{1}{bc-ak}\ln\left|\dfrac{a+bu}{c+ku}\right| + C.$

12. $\int \dfrac{u\,du}{(a+bu)(c+ku)} = \dfrac{1}{bc-ak}\left[\dfrac{c}{k}\ln|c+ku| - \dfrac{a}{b}\ln|a+bu|\right] + C.$

Formas que contienen $\sqrt{a + bu}$

13. $\int u\sqrt{a+bu}\,du = \dfrac{2(3bu-2a)(a+bu)^{3/2}}{15b^2} + C.$

14. $\int u^2\sqrt{a+bu}\,du = \dfrac{2(8a^2-12abu+15b^2u^2)(a+bu)^{3/2}}{105b^3} + C.$

15. $$\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2(bu-2a)\sqrt{a+bu}}{3b^2} + C.$$

16. $$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2(3b^2u^2-4abu+8a^2)\sqrt{a+bu}}{15b^3} + C.$$

17. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C, \quad a > 0.$$

18. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}.$$

Formas que contienen $\sqrt{a^2-u^2}$

19. $$\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C.$$

20. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C.$$

21. $$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + C.$$

22. $$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}\,du}{u} = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C, \quad a > 0.$$

Formas que contienen $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

23. $$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2\ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C.$$

24. $$\int u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$$

25. $$\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}\,du}{u} = \sqrt{u^2+a^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + C.$$

26. $$\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$$

27. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$$

28. $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2+a^2}-a}{u}\right| + C.$$

29. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right) + C.$

30. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} = -\frac{\pm\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C.$

31. $\displaystyle\int (u^2 \pm a^2)^{3/2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 \pm 5a^2)\sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

32. $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C.$

33. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{-u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

Formas racionales que contienen $a^2 - u^2$ y $u^2 - a^2$

34. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C.$

35. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C.$

Formas exponenciales y logarítmicas

36. $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C.$

37. $\displaystyle\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1.$

38. $\displaystyle\int ue^{au}\,du = \frac{e^{au}}{a^2}(au - 1) + C.$

39. $\displaystyle\int u^n e^{au}\,du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du.$

40. $\displaystyle\int \frac{e^{au}\,du}{u^n} = -\frac{e^{au}}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{e^{au}\,du}{u^{n-1}}.$

41. $\displaystyle\int \ln u\,du = u\ln u - u + C.$

42. $\displaystyle\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}\ln u}{n+1} - \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} + C, \quad n \neq -1.$

43. $\displaystyle\int u^n \ln^m u\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1}\ln^m u - \frac{m}{n+1}\int u^n \ln^{m-1} u\,du, \quad m, n \neq -1.$

44. $\displaystyle\int \frac{du}{u\ln u} = \ln\left|\ln u\right| + C.$

45. $\displaystyle\int \frac{du}{a + be^{cu}} = \frac{1}{ac}\left(cu - \ln\left|a + be^{cu}\right|\right) + C.$

Formas diversas

46. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a + u}{b + u}}\,du = \sqrt{(a + u)(b + u)} + (a - b)\ln\left(\sqrt{a + u} + \sqrt{b + u}\right) + C.$

47. $$\int \frac{du}{\sqrt{(a+u)(b+u)}} = \ln\left|\frac{a+b}{2} + u + \sqrt{(a+u)(b+u)}\right| + C.$$

48. $$\int \sqrt{a+bu+cu^2}\,du = \frac{2cu+b}{4c}\sqrt{a+bu+cu^2} - \frac{b^2-4ac}{8c^{3/2}}\ln\left|2cu+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bu+cu^2}\right| + C, \quad c > 0.$$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS CON NÚMERO IMPAR

EJERCICIO 0.2 (página 3)

1. Verdadero. **3.** Falso; los números naturales son 1, 2, 3…, etc. **5.** Verdadero. **7.** Falso; $\sqrt{25} = 5$, un entero positivo. **9.** Verdadero. **11.** Verdadero.

EJERCICIO 0.3 (página 7)

1. Falso. **3.** Falso. **5.** Falso. **7.** Verdadero. **9.** Falso. **11.** Distributiva. **13.** Asociativa. **15.** Conmutativa. **17.** Definición de resta. **19.** Distributiva.

EJERCICIO 0.4 (página 10)

1. -6. **3.** 2. **5.** 11. **7.** -2. **9.** -63. **11.** -6. **13.** $6 - x$. **15.** $-12x + 12y$ (o $12y - 12x$). **17.** $-\frac{1}{5}$. **19.** -2. **21.** 18. **23.** 64. **25.** $3x - 12$. **27.** $-x + 2$. **29.** $\frac{8}{11}$. **31.** $-\frac{5x}{7y}$. **33.** $\frac{2}{3x}$. **35.** 3. **37.** $\frac{7}{xy}$. **39.** $\frac{5}{6}$. **41.** $-\frac{1}{6}$. **43.** $\frac{x-y}{9}$. **45.** $\frac{1}{40}$. **47.** $\frac{k}{9n}$. **49.** No definida. **51.** No definida.

EJERCICIO 0.5 (página 16)

1. $2^5\ (= 32)$. **3.** w^{12}. **5.** $\frac{x^8}{x^{17}}$. **7.** $\frac{a^{21}}{b^{20}}$. **9.** $8x^6y^9$. **11.** x^6. **13.** x^{14}. **15.** 5. **17.** -2. **19.** $\frac{1}{2}$. **21.** 7. **23.** 8. **25.** $\frac{1}{4}$. **27.** $\frac{1}{16}$. **29.** $4\sqrt{2}$. **31.** $x\sqrt[3]{2}$. **33.** $4x^2$. **35.** $-2\sqrt{3} + 4\sqrt[3]{2}$. **37.** $3z^2$. **39.** $\frac{9t^2}{4}$. **41.** $\frac{x^3}{y^2z^2}$. **43.** $\frac{5}{m^9}$. **45.** $\frac{1}{9t^2}$. **47.** $7^{1/3}s^{2/3}$. **49.** $x^{1/2} - y^{1/2}$. **51.** $\frac{x^{9/4}z^{3/4}}{y^{1/2}}$. **53.** $\sqrt[5]{(8x-y)^4}$. **55.** $\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$. **57.** $\frac{3}{\sqrt[5]{w^3}} - \frac{1}{\sqrt[5]{27w^3}}$. **59.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}$. **61.** $\frac{2\sqrt{2x}}{x}$. **63.** $\frac{\sqrt[3]{9x^2}}{3x}$. **65.** 4. **67.** $\frac{\sqrt[20]{16a^{10}b^{15}}}{ab}$. **69.** $\frac{2x^6}{y^3}$. **71.** $t^{2/3}$. **73.** $\frac{64y^6x^{1/2}}{x^2}$. **75.** xyz. **77.** $\frac{1}{3}$. **79.** $\frac{4y^4}{x^2}$. **81.** $x^2y^{5/2}$. **83.** $\frac{y^{10}}{z^2}$. **85.** x^8. **87.** $-\frac{4}{s^5}$. **89.** $\frac{4x^4z^4}{9y^4}$.

EJERCICIO 0.6 (página 22)

1. $11x - 2y - 3$. **3.** $6t^2 - 2s^2 + 6$. **5.** $2\sqrt{x} + \sqrt{2y} + \sqrt{3z}$. **7.** $6x^2 - 9xy - 2z + \sqrt{2} - 4$. **9.** $\sqrt{2y} - \sqrt{3z}$. **11.** $-15x + 15y - 27$. **13.** $x^2 + 9y^2 + xy$. **15.** $6x^2 + 96$. **17.** $-6x^2 - 18x - 18$. **19.** $x^2 + 9x + 20$. **21.** $w^2 - 3w - 10$. **23.** $10x^2 + 19x + 6$. **25.** $x^2 + 6x + 9$. **27.** $x^2 - 10x + 25$. **29.** $2y + 6\sqrt{2y} + 9$. **31.** $4s^2 - 1$. **33.** $x^3 + 4x^2 - 3x - 12$. **35.** $3x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 8x + 4$. **37.** $5x^3 + 5x^2 + 6x$. **39.** $3x^2 + 2y^2 + 5xy + 2x - 8$. **41.** $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$. **43.** $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$. **45.** $z - 18$. **47.** $3x^3 + 2x - \frac{1}{2x^2}$. **49.** $x + \frac{-1}{x+3}$. **51.** $3x^2 - 8x + 17 + \frac{-37}{x+2}$. **53.** $t + 8 + \frac{64}{t-8}$. **55.** $x - 2 + \frac{7}{3x+2}$.

EJERCICIO 0.7 (página 25)

1. $2(3x+2)$. **3.** $5x(2y+z)$. **5.** $4bc(2a^3 - 3ab^2d + b^3cd^2)$. **7.** $(z+7)(z-7)$. **9.** $(p+3)(p+1)$. **11.** $(4x+3)(4x-3)$. **13.** $(z+4)(z+2)$. **15.** $(x+3)^2$. **17.** $5(x+3)(x+2)$. **19.** $3(x-1)(x+1)$. **21.** $(6y+1)(y+2)$. **23.** $2s(3s+4)(2s-1)$. **25.** $x^{2/3}y(1+2xy)(1-2xy)$. **27.** $2x(x+3)(x-2)$. **29.** $4(2x+1)^2$. **31.** $x(xy-7)^2$. **33.** $(x-2)^2(x+2)$. **35.** $(y+4)^2(y+1)(y-1)$. **37.** $(x+2)(x^2-2x+4)$. **39.** $(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$. **41.** $2(x+3)^2(x+1)(x-1)$. **43.** $P(1+r)^2$. **45.** $(x^2+4)(x+2)(x-2)$. **47.** $(y^4+1)(y^2+1)(y+1)(y-1)$. **49.** $(x^2+2)(x+1)(x-1)$. **51.** $y(x+1)^2(x-1)^2$.

EJERCICIO 0.8 (página 31)

1. $\frac{x+2}{x}$. **3.** $\frac{x-5}{x+5}$. **5.** $\frac{3x+2}{x+2}$. **7.** $-\frac{y^2}{(y-3)(y+2)}$. **9.** $\frac{3-2x}{3+2x}$. **11.** $\frac{2(x+4)}{(x-4)(x+2)}$. **13.** $\frac{x}{2}$. **15.** $\frac{n}{3}$. **17.** $\frac{2}{3}$.

19. $-27x^2$. **21.** 1. **23.** $\frac{2x^2}{x-1}$. **25.** 1.

27. $-\frac{(2x+3)(1+x)}{x+4}$. **29.** $x+2$. **31.** $\frac{7}{3t}$.

33. $\frac{1}{1-p^2}$. **35.** $\frac{2x^2+3x+12}{(2x-1)(x+3)}$.

37. $\frac{2x-3}{(x-2)(x+1)(x-1)}$. **39.** $\frac{35-8x}{(x-1)(x+5)}$.

41. $\frac{x^2+2x+1}{x^2}$. **43.** $\frac{x}{1-xy}$. **45.** $\frac{4x+1}{3x}$.

47. $\frac{(x+2)(6x-1)}{2x^2(x+3)}$. **49.** $\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$.

51. $2-\sqrt{3}$. **53.** $-\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3}$. **55.** $-4-2\sqrt{6}$.

57. $\frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}$. **59.** $4\sqrt{2}-5\sqrt{3}+14$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 0 (página 33)

1. Los resultados coinciden. **3.** Los resultados coinciden.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1.1

1. $P = 2(w+2) + 2w = 2w + 4 + 2w = 4w + 4$.
2. 200 cafés especiales. **3.** 46 semanas; $1715.
4. $r = \frac{d}{t}$. **5.** $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

EJERCICIO 1.1 (página 41)

1. 0. **3.** $\frac{10}{3}$. **5.** -2.

7. Sumando 5 a ambos lados; se garantiza la equivalencia.
9. Elevando ambos lados a la cuarta potencia; la equivalencia *no* se garantiza.
11. Dividiendo ambos lados entre x; la equivalencia *no* se garantiza.
13. Multiplicando ambos lados por $x-1$; la equivalencia *no* se garantiza.
15. Multiplicando ambos lados por $(x-5)/x$; la equivalencia *no* se garantiza.

17. $\frac{5}{2}$. **19.** 0. **21.** 1. **23.** $\frac{12}{5}$. **25.** -1.

27. 2. **29.** $\frac{10}{3}$. **31.** 126. **33.** 8. **35.** $-\frac{26}{9}$.

37. $-\frac{37}{18}$. **39.** $\frac{60}{17}$. **41.** $\frac{14}{3}$. **43.** 3. **45.** $\frac{7}{8}$.

47. $P = \frac{I}{rt}$. **49.** $q = \frac{p+1}{8}$. **51.** $r = \frac{S-P}{Pt}$.

53. $a_1 = \frac{2S - na_n}{n}$. **55.** 120 m.

57. $c = x + 0.0825x = 1.0825x$. **59.** 3 años.

61. 31 horas. **63.** 0.00001. **65.** $\frac{1}{8}, -\frac{1}{14}$. **67.** $\frac{14}{61}$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1.2

1. $\frac{10}{r+2} = \frac{6}{r-2}$; 8 mi/h. **2.** $t = \frac{d}{r+w}$; $w = \frac{d}{t} - r$.
3. $\sqrt{x^2+16} - x = 2$; $x = 3$; la rampa es de 5 pies de largo.

EJERCICIO 1.2 (página 46)

1. $\frac{1}{5}$. **3.** $\varnothing$. **5.** $\frac{8}{3}$. **7.** 2. **9.** 0. **11.** $\frac{5}{3}$.

13. $\frac{1}{8}$. **15.** 3. **17.** $\frac{5}{13}$. **19.** $\varnothing$. **21.** 11.

23. $\frac{262}{5}$. **25.** $-\frac{10}{9}$. **27.** 2. **29.** 7. **31.** $\frac{49}{36}$.

33. $-\frac{9}{4}$. **35.** $t = \frac{r-d}{rd}$. **37.** $n = \frac{2mI}{rB} - 1$.

39. 20. **41.** $t = \frac{d}{r-c}$; $r = \frac{d}{t} + c$.

43. La antena B: 4 m; la antena A: 12.25 m.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1.3

1. El número es -5 o 6. **2.** 50 pies por 60 pies.
3. $1 \times 1 \times 5$. **4.** 15 artículos a $15 por artículo.
5. 2.5 segundos y 7.5 segundos. **6.** $100 **7.** Nunca.

EJERCICIO 1.3 (página 53)

1. 2. **3.** 4, 3. **5.** 3, -1. **7.** 4, 9. **9.** ± 2.

11. 0, 8. **13.** $\frac{1}{2}$. **15.** $1, -\frac{5}{2}$. **17.** $5, -2$. **19.** $0, \frac{3}{2}$.

21. $0, 1, -4$. **23.** $0, \pm 8$. **25.** $0, \frac{1}{2}, -\frac{4}{3}$. **27.** $-3, -1, 2$.

29. 3, 4. **31.** $4, -6$. **33.** $\frac{3}{2}$. **35.** $\frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}$.

37. No tiene raíces reales. **39.** $\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}$. **41.** $40, -25$.

43. $\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$. **45.** $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}$. **47.** $2, -\frac{1}{2}$.

49. $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}, \pm\frac{1}{2}$. **51.** $-4, 1$. **53.** $\frac{15}{7}, \frac{11}{5}$. **55.** $\frac{3}{2}, -1$.

57. $6, -2$. **61.** $5, -2$. **63.** $\frac{3}{2}$. **65.** -2. **67.** 6.

69. 4, 8. **71.** 2. **73.** 0, 4. **75.** 4. **77.** 64.15, 3.35.
79. 6 pulgadas por 8 pulgadas. **83.** 1 año y 10 años.
85. 86.8 cm o 33.2 cm. **87.** **a.** 9 s; **b.** 3 s o 6 s.
89. 1.5, 0.75. **91.** No tiene raíces reales. **93.** 1.999, 0.963.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 1 (página 56)

1. $\frac{1}{4}$. **3.** $-\frac{2}{15}$. **5.** $-\frac{1}{2}$. **7.** $\varnothing$. **9.** $\frac{5}{2}$. **11.** $\frac{1}{3}$.

13. $-\frac{9}{7}$. **15.** $-\frac{5}{3}, 1$. **17.** $0, \frac{7}{5}$. **19.** 5. **21.** $\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

23. $\frac{5}{8}, -3$. **25.** $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$. **27.** $\pm 2, \pm 3$. **29.** $\frac{1}{2}$.

31. $\frac{4 \pm \sqrt{13}}{3}$. **33.** 9. **35.** 5. **37.** No tiene solución.

39. 10. **41.** 4, 8. **43.** $-8, 1$. **45.** $Q = \frac{EA}{4\pi k}$.

47. $C' = \lambda^2(n - 1 - C)$. **49.** $T = \pm 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

51. $\omega = \pm\sqrt{\frac{2mgh - mv^2}{I}}$. **55.** $6, \frac{5}{4}$.

57. $-0.757, 0.384$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 1 (página 58)

1. a. \$107.15; **b.** \$10.26; **c.** 10 lb; **d.** 10.44 lb; **e.** 4.4% **3.** −1.9%.

EJERCICIO 2.1 (página 66)

1. 120. **3.** 48 de A, 80 de B. **5.** $5\frac{1}{3}$. **7.** 1 m. **9.** 13,000. **11.** \$4000 al 6%, \$16,000 al $7\frac{1}{2}$%. **13.** \$4.25. **15.** 4%. **17.** 80. **19.** \$8000. **21.** 1138. **23.** \$116.25. **25.** 40. **27.** 46,000. **29.** \$440 o \$460. **31.** \$100. **33.** 77. **35.** 80 pies por 140 pies. **37.** 9 cm de largo, 4 cm de ancho. **39.** \$112,000. **41.** 60. **43.** 125 unidades de A y 100 unidades de B o bien 150 unidades de A y 125 unidades de B.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2.2

1. 5375.
2. $150 - x_4 \geq 0; 3x_4 - 210 \geq 0; x_4 + 60 \geq 0; x_4 \geq 0$.

EJERCICIO 2.2 (página 74)

1. $(4, \infty)$. **3.** $(-\infty, 5]$. **5.** $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$. **7.** $\left(-\infty, \frac{2}{7}\right)$. **9.** $(0, \infty)$. **11.** $\left[-\frac{7}{5}, \infty\right)$. **13.** $\left(-\frac{2}{7}, \infty\right)$. **15.** $\varnothing$. **17.** $\left(-\infty, \frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$. **19.** $(-\infty, 48)$. **21.** $(-\infty, -5]$. **23.** $(-\infty, \infty)$. **25.** $\left(\frac{17}{9}, \infty\right)$. **27.** $\left[-\frac{34}{3}, \infty\right)$. **29.** $(0, \infty)$. **31.** $(-\infty, 0)$. **33.** $(-\infty, -2]$. **35.** $444{,}000 < S < 636{,}000$. **37.** $x < 70$ grados.

EJERCICIO 2.3 (página 78)

1. 120,001. **3.** 17,000. **5.** 60,000. **7.** \$25,714.29. **9.** 1000. **11.** $t > 36.5$. **13.** Al menos \$67,400.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2.4

1. $|w - 22 \text{ oz}| \leq 0.3$ oz.

EJERCICIO 2.4 (página 82)

1. 13. **3.** 6. **5.** 5. **7.** $-4 < x < 4$. **9.** $\sqrt{5} - 2$. **11. a.** $|x - 7| < 3$; **b.** $|x - 2| < 3$; **c.** $|x - 7| \leq 5$; **d.** $|x - 7| = 4$; **e.** $|x + 4| < 2$; **f.** $|x| < 3$; **g.** $|x| > 6$; **h.** $|x - 6| > 4$; **i.** $|x - 105| < 3$; **j.** $|x - 850| < 100$. **13.** $|p_1 - p_2| \leq 8$. **15.** ± 7. **17.** ± 6. **19.** $13, -3$. **21.** $\frac{2}{5}$. **23.** $\frac{1}{2}, 3$. **25.** $(-4, 4)$. **27.** $(-\infty, -8) \cup (8, \infty)$. **29.** $(-9, -5)$. **31.** $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. **33.** $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$. **35.** $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{16}{3}, \infty\right)$. **37.** $|d - 17.2| \leq 0.03$ m **39.** $(-\infty, \mu - h\sigma) \cup (\mu + h\sigma, \infty)$.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 2 (página 84)

1. $(-\infty, 0]$. **3.** $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$. **5.** $\varnothing$. **7.** $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$. **9.** $(-\infty, \infty)$. **11.** $-2, 5$. **13.** $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. **15.** $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}, \infty\right)$. **17.** 542. **19.** 6000. **21.** $c <$ \$212,814.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 2 (página 85)

1. 1 hora. **3.** 1 hora. **5.** 600; 310.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3.1

1. a. $a(r) = \pi r^2$; **b.** Todos los números reales; **c.** $r \geq 0$.
2. a. $t(r) = \frac{300}{r}$; **b.** Todos los números reales excepto 0; **c.** $r > 0$; **d.** $t(x) = \frac{300}{x}$; $t\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{600}{x}$; $t\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1200}{x}$; **e.** El tiempo está escalado por un factor de c; $t\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{300c}{x}$.
3. a. 300 pizzas; **b.** \$21.00 por pizza; **c.** \$16.00 por pizza.

EJERCICIO 3.1 (página 93)

1. Todos los números reales excepto 0.
3. Todos los números reales ≥ 3.
5. Todos los números reales.
7. Todos los números reales excepto $-\frac{7}{2}$.
9. Todos los números reales excepto 0 y 1.
11. Todos los números reales excepto 4 y $-\frac{1}{2}$.
13. $1, 7, -7$. **15.** $-62, 2 - u^2, 2 - u^4$.
17. $2, (2v)^2 + 2v = 4v^2 + 2v, (-x^2)^2 + (-x^2) = x^4 - x^2$.
19. $4, 0, (x + h)^2 + 2(x + h) + 1 = x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h + 1$.
21. $\frac{1}{30}, \frac{3x - 4}{(3x)^2 + 5} = \frac{3x - 4}{9x^2 + 5}, \frac{(x + h) - 4}{(x + h)^2 + 5} = \frac{x + h - 4}{x^2 + 2xh + h^2 + 5}$.

23. $0, 256, \frac{1}{16}$. **25. a.** $4x + 4h - 5$; **b.** 4.
27. a. $x^2 + 2hx + h^2 + 2x + 2h$; **b.** $2x + h + 2$.
29. a. $2 - 4x - 4h - 3x^2 - 6hx - 3h^2$;
b. $-4 - 6x - 3h$. **31. a.** $\frac{1}{x+h}$; **b.** $-\frac{1}{x(x+h)}$.
33. 9. **35.** y es una función de x; x es una función de y.
37. y es una función de x; x no es una función de y.
39. Sí. **41.** $V = f(t) = 20{,}000 + 800t$.
43. Sí; P; q. **45.** 400 libras por semana; 1000 libras por semana; la cantidad suministrada aumenta cuando el precio aumenta.
47. a. 4; **b.** $8\sqrt[3]{2}$; **c.** $f(2I_0) = 2\sqrt[3]{2}\, f(I_0)$; al duplicar la intensidad la respuesta se incrementa por un factor de $2\sqrt[3]{2}$.
49. a. 3000, 2900, 2300, 2000; 12, 10;
b. 10, 12, 17, 20; 3000, 2300. **51. a.** −5.13; **b.** 2.64;
c. −17.43. **53. a.** 11.33; **b.** 50.62; **c.** 2.29.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3.2

1. a. $p(n) = \$125$; **b.** Las primas no cambian;
c. Función constante.
2. a. Función cuadrática; **b.** 2; **c.** 3.
3. $c(n) = \begin{cases} 3.50n & \text{si } n \le 5, \\ 3.00n & \text{si } 5 < n \le 10, \\ 2.75n & \text{si } n > 10. \end{cases}$ **4.** $7! = 5040$.

EJERCICIO 3.2 (página 98)

1. Sí. **3.** No. **5.** Sí. **7.** No.
9. Todos los números reales. **11.** Todos los números reales.
13. a. 3; **b.** 7. **15. a.** 4; **b.** −3. **17.** 8, 8, 8.
19. 1, −1, 0, −1. **21.** 8, 3, 1, 1. **23.** 720. **25.** 2.
27. 5. **29.** $c(i) = \$4.50$; función constante.
31. a. $C = 850 + 3q$; **b.** 250.
33. $c(n) = \begin{cases} 8.50n & \text{si } n < 10, \\ 8.00n & \text{si } n \ge 10. \end{cases}$ **35.** $\frac{9}{64}$.
37. a. Toda T tal que $30 \le T \le 39$; **b.** $4, \frac{17}{4}, \frac{33}{4}$.
39. a. 237,077.34; **b.** −434.97; **c.** 52.19.
41. a. 2.21; **b.** 9.98; **c.** −14.52.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3.3

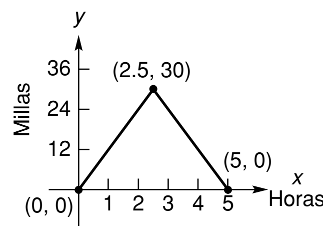
1. $c(s(x)) = c(x + 3) = 2(x + 3) = 2x + 6$.
2. Si la longitud de un lado es representada por la función $l(x) = x + 3$ y el área de un cuadrado con lados de longitud x es representada por $a(x) = x^2$. Entonces $g(x) = (x + 3)^2 = [l(x)]^2 = a(l(x))$.

EJERCICIO 3.3 (página 103)

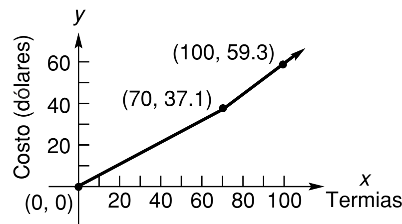
1. a. $2x + 8$; **b.** 8; **c.** −2; **d.** $x^2 + 8x + 15$; **e.** 3;
f. $\frac{x+3}{x+5}$; **g.** $x + 8$; **h.** 11; **i.** $x + 8$. **3. a.** $2x^2 + x$;
b. $-x$; **c.** $\frac{1}{2}$; **d.** $x^4 + x^3$; **e.** $\frac{x^2}{x^2+x} = \frac{x}{x+1}$ (para $x \ne 0$);
f. −1; **g.** $(x^2 + x)^2 = x^4 + 2x^3 + x^2$; **h.** $x^4 + x^2$; **i.** 90.
5. 6; −32. **7.** $\frac{4}{(t-1)^2} + \frac{14}{t-1} + 1$; $\frac{2}{t^2 + 7t}$.
9. $\frac{1}{v+3}$; $\sqrt{\frac{2w^2+3}{w^2+1}}$. **11.** $f(x) = x^5$, $g(x) = 4x - 3$.
13. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2 - 2$.
15. $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $g(x) = \frac{x+1}{3}$.
17. a. $r(x) = 9.75x$; **b.** $e(x) = 4.25x + 4500$;
c. $(r - e)(x) = 5.5x - 4500$.
19. $400m - 10m^2$; el ingreso total recibido cuando se vende la producción total de m empleados.
21. a. 14.05; **b.** 1169.64. **23. a.** 345.03; **b.** −1.94.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3.4

1. $y = -600x + 7250$; intersección x $\left(12\frac{1}{12}, 0\right)$; intersección y (0, 7250).
2. $y = 24.95$; recta horizontal; no hay intersección con el eje x; intersección con el eje y (0, 24.95).
3.

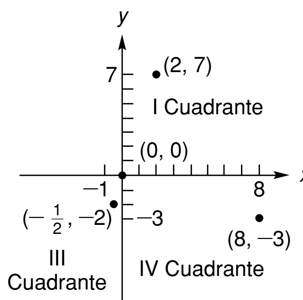


4.



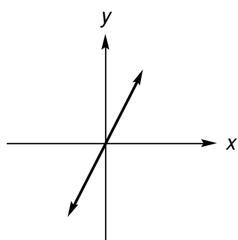
EJERCICIO 3.4 (página 112)

1.

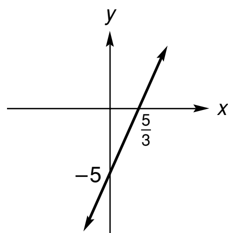


3. a. 1, 2, 3, 0; **b.** Todos los números reales;
c. Todos los números reales;
d. −2. **5. a.** 0, −1, −1; **b.** Todos los números reales;
c. Todos los números reales no positivos; **d.** 0.

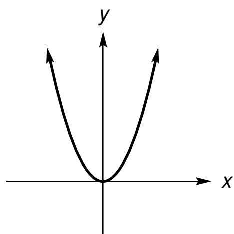
7. $(0, 0)$; función; todos los números reales; todos los números reales.



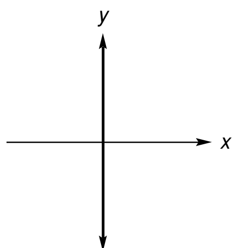
9. $(0, -5), \left(\frac{5}{3}, 0\right)$; función; todos los números reales; todos los números reales.



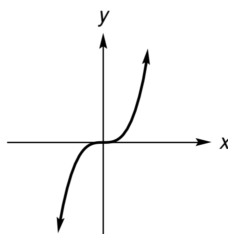
11. $(0, 0)$; función; todos los números reales; todos los números reales no negativos.



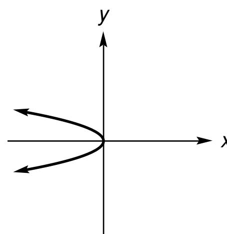
13. Todo punto en el eje y; no es función de x.



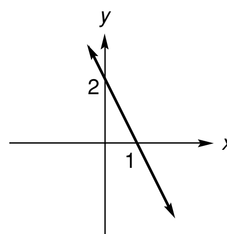
15. $(0, 0)$; función; todos los números reales; todos los números reales.



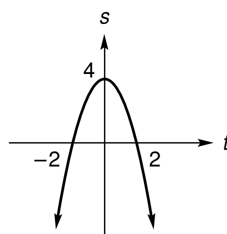
17. $(0, 0)$; no es una función de x.



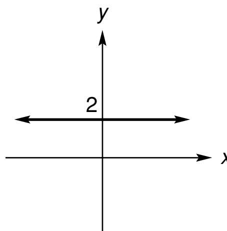
19. $(0, 2), (1, 0)$; función; todos los números reales; todos los números reales.



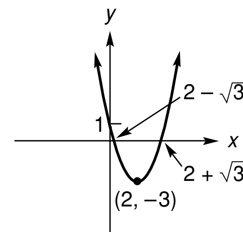
21. Todos los números reales; todos los números reales ≤ 4; $(0, 4), (2, 0), (-2, 0)$.



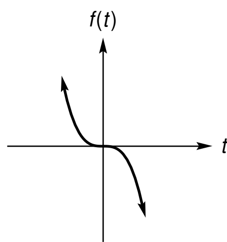
23. Todos los números reales; 2; $(0, 2)$.



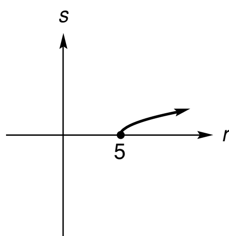
25. Todos los números reales; todos los números reales ≥ -3; $(0, 1), (2 \pm \sqrt{3}, 0)$.



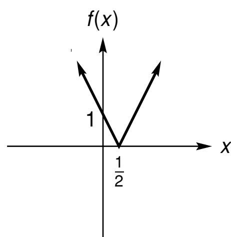
27. Todos los números reales; todos los números reales; $(0, 0)$.



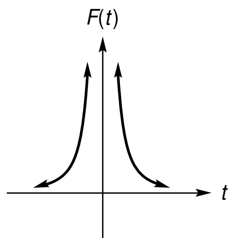
29. Todos los números reales ≥ 5; todos los números reales no negativos; $(5, 0)$.



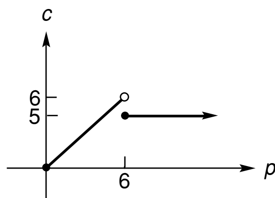
31. Todos los números reales; todos los números reales no negativos; $(0, 1), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.



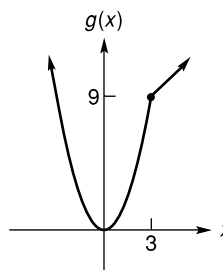
33. Todos los números reales distintos de cero; todos los números reales positivos; no hay intersecciones.



35. Todos los números reales no negativos; todos los números reales c, donde $0 \leq c < 6$.

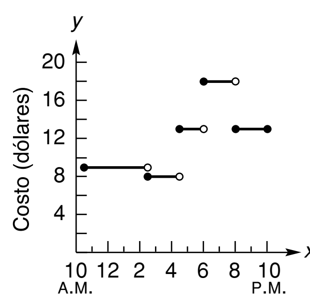


37. Todos los números reales; todos los números reales no negativos.

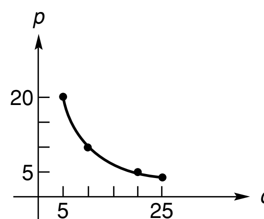


39. (a), (b), (d).

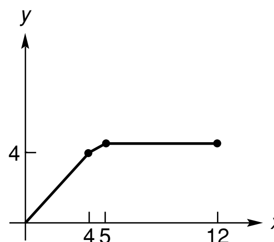
41.



43. Cuando el precio disminuye, la cantidad aumenta; p es una función de q.



45.

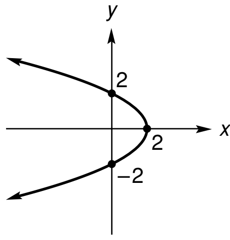


47. $-1, -0.35$. **49.** $0.62, 1.73, 4.65$. **51.** $-0.84, 2.61$.
53. $-0.49, 0.52, 1.25$. **55.** **a.** 3.94; **b.** -1.94.
57. **a.** $(-\infty, \infty)$; **b.** $(-1.73, 0), (0, 4.00)$.
59. **a.** 2.07; **b.** $[2.07, \infty)$; **c.** $(0, 2.39)$; **d.** no.

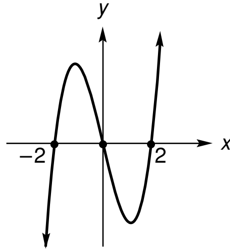
EJERCICIO 3.5 (página 119)

1. $(0, 0)$; simétrica con respecto al origen.
3. $(\pm 2, 0)$, $(0, 8)$; simétrica con respecto al eje y.
5. $(\pm 2, 0)$; simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.
7. $(-2, 0)$; simétrica con respecto al eje x.
9. Simétrica con respecto al eje x.
11. $(-21, 0)$, $(0, -7)$, $(0, 3)$.
13. $(0, 0)$; simétrica con respecto al origen. **15.** $\left(0, \frac{3}{8}\right)$.

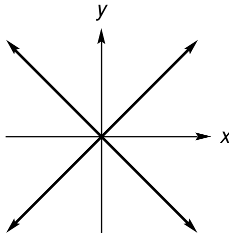
17. $(2, 0), (0, \pm 2)$; simétrica con respecto al eje x.



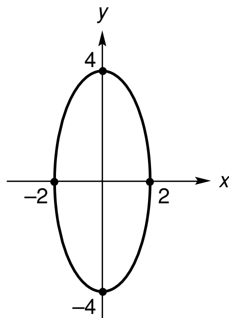
19. $(\pm 2, 0), (0, 0)$; simétrica con respecto al origen.



21. $(0, 0)$; simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.



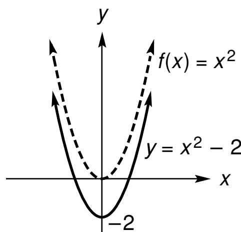
23. $(\pm 2, 0), (0, \pm 4)$; simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.



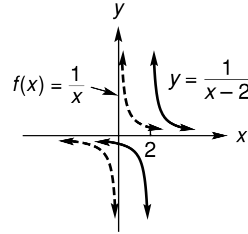
25. **a.** $(\pm 1.18, 0), (0, 2)$; **b.** 2; **c.** $(-\infty, 2]$.

EJERCICIO 3.6 (página 122)

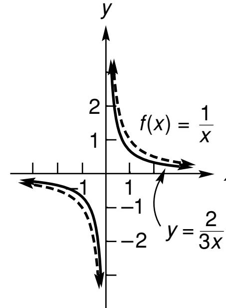
1.



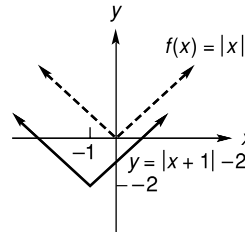
3.



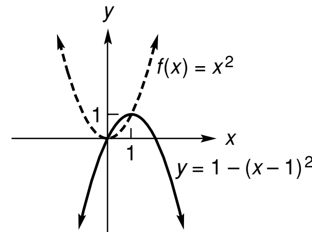
5.



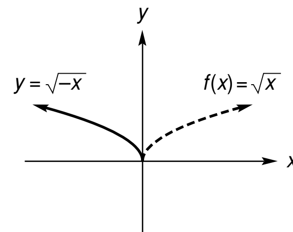
7.



9.



11.



13. Trasladar 4 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba.

15. Reflejar con respecto al eje y y trasladar 5 unidades hacia abajo.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 3 (página 123)

1. Todos los números reales excepto 1 y 2.

3. Todos los números reales.

5. Todos los números reales no negativos excepto 1.

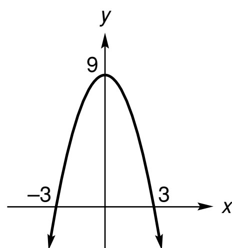
7. $7, 46, 62, 3t^2 - 4t + 7$.

9. $0, 2, \sqrt{t}, \sqrt{x^3 - 1}$.

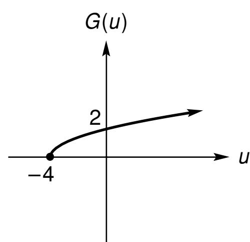
11. $\frac{3}{5}, 0, \frac{\sqrt{x+4}}{x}, \frac{\sqrt{u}}{u-4}$.

13. $-8, 4, 4, -92$.

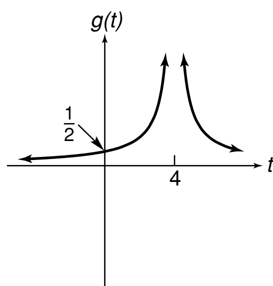
15. a. $3 - 7x - 7h$; **b.** -7.
17. a. $4x^2 + 8hx + 4h^2 + 2x + 2h - 5$;
b. $8x + 4h + 2$. **19. a.** $5x + 2$; **b.** 22; **c.** $x - 4$;
d. $6x^2 + 7x - 3$; **e.** 10; **f.** $\frac{3x - 1}{2x + 3}$;
g. $3(2x + 3) - 1 = 6x + 8$; **h.** 38;
i. $2(3x - 1) + 3 = 6x + 1$.
21. $\frac{1}{x - 1}, \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$. **23.** $\sqrt{x^3 + 2}$, $(x + 2)^{3/2}$.
25. $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{2/3}, 0)$; simétrica con respecto al origen.
27. $(0, 9)$, $(\pm 3, 0)$; simétrica con respecto al eje y.



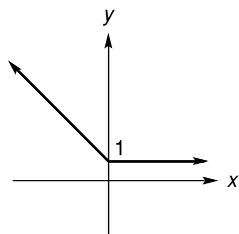
29. $(0, 2)$, $(-4, 0)$; toda $u \geq -4$; todos los números reales ≥ 0.



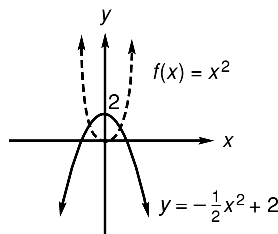
31. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; toda $t \neq 4$; todos los números reales positivos.



33. Todos los números reales; todos los números reales ≥ 1.



35.



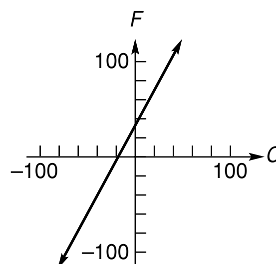
37. a, c. **39.** $-0.67, 0.34, 1.73$.
41. $-1.50, -0.88, -0.11, 1.09, 1.40$.
43. a. $(-\infty, \infty)$; **b.** $(1.92, 0)$, $(0, 7)$
45. a. Ninguna; **b.** 1, 3.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 3 (página 125)

1. \$28,321. **3.** \$87,507.90. **5.** Las respuestas pueden variar.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.1

1. -2000; el automóvil se deprecia \$2000 por año.
2. $S = 14T + 8$. **3.** $F = \frac{9}{5}C + 32$.
4. Pendiente $= \frac{125}{3}$; intersección $y = \frac{125}{3}$.
5. $9C - 5F + 160 = 0$.
6.



7. La pendiente de $\overline{AB}$ es 0; la pendiente de $\overline{BC}$ es 7; la pendiente de $\overline{CA}$ es 1. Ninguna de las pendientes es el recíproco negativo de alguna otra, de modo que el triángulo no tiene un ángulo recto. Los puntos no definen un triángulo rectángulo.

EJERCICIO 4.1 (página 134)

1. 3. **3.** $-\frac{1}{2}$. **5.** Indefinida. **7.** 0.
9. $6x - y - 4 = 0$. **11.** $x + 4y - 18 = 0$.
13. $3x - 7y + 25 = 0$. **15.** $8x - 5y - 29 = 0$.
17. $2x - y + 4 = 0$. **19.** $x + 2y + 6 = 0$.
21. $y + 2 = 0$. **23.** $x - 2 = 0$. **25.** 4; -6.
27. $-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}$. **29.** La pendiente está indefinida; no hay intersección con el eje y.
31. 3; 0. **33.** 0; 1.
35. $2x + 3y - 5 = 0$; $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.
37. $4x + 9y - 5 = 0$; $y = -\frac{4}{9}x + \frac{5}{9}$.
39. $3x - 2y + 24 = 0$; $y = \frac{3}{2}x + 12$.
41. Paralelas. **43.** Paralelas. **45.** Ninguna.
47. Perpendiculares. **49.** Perpendiculares.

51. $y = 4x + 14$. **53.** $y = 1$. **55.** $y = -\frac{1}{3}x + 5$.

57. $x = 7$. **59.** $y = -\frac{2}{3}x - \frac{29}{3}$. **61.** $(5, -4)$.

63. -2; el precio de la acción cae un promedio de $2 por año. **65.** $y = 3x + 5$. **67.** Pendiente ≈ 0.65; intersección $y \approx 4.38$.

69. **a.** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$; **b.** $y = 3x - \frac{3}{2}$.

71. $y = -x + 3300$; sin modificación, el ángulo de acercamiento causa que el aeroplano choque 700 pies antes del aeropuerto. **73.** $R = 50{,}000T + 80{,}000$.

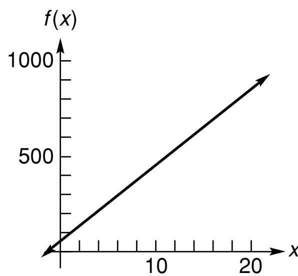
75. Las rectas son paralelas. Esto se esperaba ya que cada una tiene pendiente de 1.5.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.2

1. $x =$ número de esquís producidos; $y =$ número de botas fabricadas; $8x + 14y = 1000$.

2. $p = -\frac{3}{8}q + 1025$.

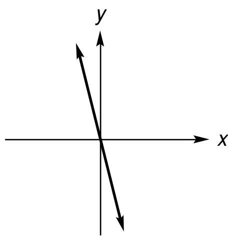
3. Las respuestas pueden variar, pero dos posibles puntos son $(0, 60)$ y $(2, 140)$.

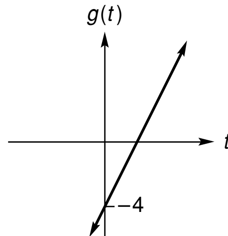


4. $f(t) = 2.3t + 32.2$. **5.** $f(x) = 70x + 150$.

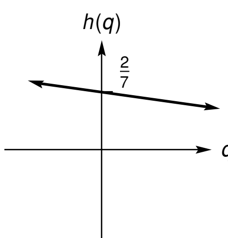
EJERCICIO 4.2 (página 141)

1. -4; 0. **3.** 2; -4.





5. $-\frac{1}{7}$; $\frac{2}{7}$.



7. $f(x) = 4x$.

9. $f(x) = -2x + 4$.

11. $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$.

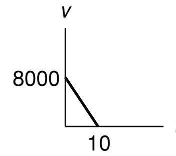
13. $f(x) = x + 1$.

15. $p = -\frac{2}{5}q + 28$; $16.

17. $p = \frac{1}{4}q + 190$.

19. $c = 3q + 10$; $115. **21.** $f(x) = 0.125x + 4.15$.

23. $v = -800t + 8000$; pendiente $= -800$.



25. $f(x) = 45{,}000x + 735{,}000$. **27.** $f(x) = 65x + 85$.

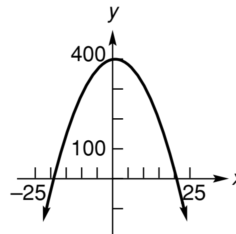
29. $x + 10y = 100$. **31.** **a.** $y = \frac{5}{11}$, $x = \frac{600}{11}$; **b.** 12.

33. **a.** $p = 0.059t + 0.025$; **b.** 0.556.

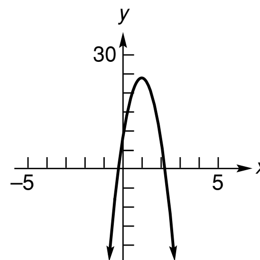
35. **a.** $t = \frac{1}{4}c + 37$; **b.** Sume 37 al número de chirridos en 15 segundos. **37.** $P = \frac{T}{4} + 80$. **39.** **a.** Sí; **b.** 1.8704.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.3

1. Vértice: $(1, 400)$; intersección y: $(0, 399)$; intersecciones x: $(-19, 0)$, $(21, 0)$.



2. Vértice: $(1, 24)$; intersección y: $(0, 8)$; intersecciones x: $\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$, $\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$.

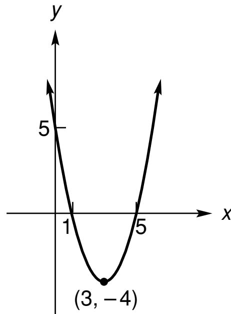


3. 1000 unidades; $3000 de ingreso máximo.

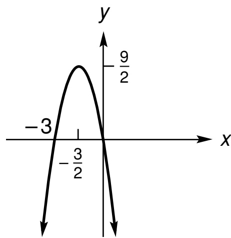
EJERCICIO 4.3 (página 149)

1. Cuadrática. **3.** No es cuadrática. **5.** Cuadrática.
7. Cuadrática. **9.** **a.** $(1, 11)$; **b.** Más alto.
11. **a.** -8; **b.** $-4, 2$; **c.** $(-1, -9)$.

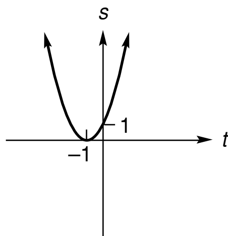
13. Vértice: $(3, -4)$; intersecciones: $(1, 0)$, $(5, 0)$, $(0, 5)$; rango: toda $y \geq -4$.



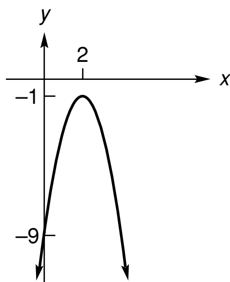
15. Vértice: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$; intersecciones: $(0, 0)$, $(-3, 0)$; rango: toda $y \leq \frac{9}{2}$.



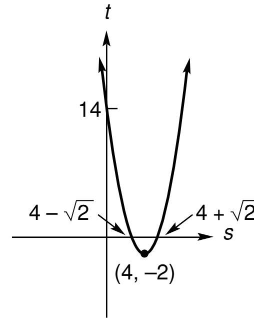
17. Vértice: $(-1, 0)$; intersecciones: $(-1, 0)$, $(0, 1)$; rango: toda $s \geq 0$.



19. Vértice: $(2, -1)$; intersecciones: $(0, -9)$; rango: toda $y \leq -1$.



21. Vértice: $(4, -2)$; intersecciones: $(4 + \sqrt{2}, 0)$, $(4 - \sqrt{2}, 0)$, $(0, 13)$; rango: toda $t \geq -3$.

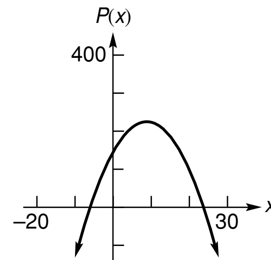


23. Mínimo; 24. **25.** Máximo; -10.

27. $q = 200$; $r = \$120{,}000$.

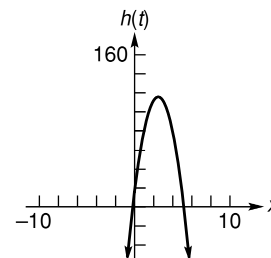
29. 200 unidades; ingreso máximo \$240,000.

31. Vértice: $(9, 225)$; intersección y: $(0, 144)$; intersecciones x: $(-6, 0)$, $(24, 0)$.



33. 70 gramos. **35.** 132 pies; 2.5 segundos.

37. Vértice: $\left(\frac{5}{2}, 116\right)$; intersección y: $(0, 16)$, intersecciones x: $\left(\frac{5 + \sqrt{29}}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{5 - \sqrt{29}}{2}, 0\right)$.



39. **a.** 2.5; **b.** 8.7 m. **41.** **a.** $\frac{l}{2}$; **b.** $\frac{wl^2}{8}$; **c.** 0 y l.

43. 50 pies × 100 pies. **45.** $(1.11, 2.88)$.

47. **a.** 0; **b.** 1; **c.** 2. **49.** 4.89.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4.4

1. \$120,000 al 9% y \$80,000 al 8%.
2. 500 especies A y 1000 especies B.
3. Un número infinito de soluciones de la forma $A = \frac{20{,}000}{3} - \frac{4}{3}r$, $B = r$ donde $0 \leq r \leq 5000$.
4. $\frac{1}{6}$ lb de A; $\frac{1}{3}$ lb de B; $\frac{1}{2}$ lb de C.

EJERCICIO 4.4 (página 161)

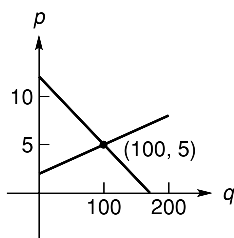
1. $x = -1, y = 1.$ **3.** $x = 3, y = -1.$
5. $v = 0, w = 18.$ **7.** $x = -3, y = 2.$
9. No hay solución. **11.** $x = 12, y = -12.$
13. $p = \frac{3}{2} - 3r, q = r$; r es cualquier número real.
15. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{4}.$ **17.** $x = 1, y = 1, z = 1.$
19. $x = 1 + 2r, y = 3 - r, z = r$; r es cualquier número real.
21. $x = -\frac{1}{3}r, y = \frac{5}{3}r, z = r$; r es cualquier número real.
23. $x = \frac{3}{2} - r + \frac{1}{2}s, y = r, z = s$; r y s son cualesquiera números reales.
25. 420 galones de solución al 20%, 280 galones de solución al 30%.
27. 0.5 lb de algodón; 0.25 lb de poliéster; 0.25 lb de nylon.
29. 275 mi/h (velocidad del aeroplano en aire calmo), 21 mi/h (velocidad del viento).
31. 240 unidades (Early American), 200 unidades (Contemporáneo).
33. 800 calculadoras de la planta Exton, 700 de la planta Whyton.
35. 4% sobre los primeros $100,000, 6% sobre el resto.
37. 60 unidades de Argón I, 40 unidades de Argón II.
39. 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sillones reclinables.
41. 40 trabajadores semicalificados, 20 trabajadores calificados y 10 empleados de envíos. **45.** $x = 3, y = 2.$
47. $x = 8.3, y = 14.0.$

EJERCICIO 4.5 (página 165)

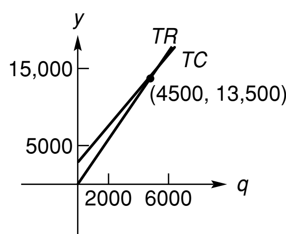
1. $x = 4, y = -12; x = -1, y = 3.$
3. $p = -3, q = -4; p = 2, q = 1.$
5. $x = 0, y = 0; x = 1, y = 1.$
7. $x = 4, y = 8; x = -1, y = 3.$
9. $p = 0, q = 0; p = 1, q = 1.$
11. $x = \sqrt{17}, y = 2;\ x = -\sqrt{17}, y = 2; x = \sqrt{14}, y = -1; x = -\sqrt{14}, y = -1.$ **13.** $x = 21, y = 15.$
15. En (10, 8.1) y (−10, 7.9). **17.** Tres.
19. $x = -1.3, y = 5.1.$ **21.** $x = 1.76.$ **23.** $x = -1.46.$

EJERCICIO 4.6 (página 174)

1.



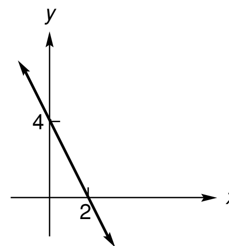
3. (5, 212.50). **5.** (9, 38). **7.** (15, 5).
9.



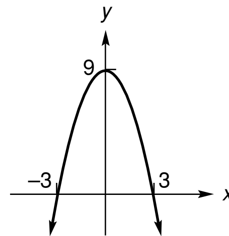
11. No puede tener punto de equilibrio para ningún nivel de producción.
13. 15 unidades o 45 unidades. **15. a.** $12; **b.** $12.18.
17. 5840 unidades; 840 unidades; 1840 unidades. **19.** $4.
21. El costo total siempre excede al ingreso total, no hay punto de equilibrio. **23.** Disminuye en $0.70.
25. $p_A = 5; p_B = 10.$ **27.** 2.4 y 11.3.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 4 (página 176)

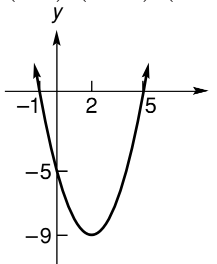
1. 9. **3.** $y = -x + 1; x + y - 1 = 0.$
5. $y = \frac{1}{2}x - 1; x - 2y - 2 = 0.$ **7.** $y = 4; y - 4 = 0.$
9. $y = \frac{1}{3}x + 2; x - 3y + 6 = 0.$
11. Perpendiculares. **13.** Ninguna. **15.** Paralelas.
17. $y = \frac{3}{2}x - 2; \frac{3}{2}.$ **19.** $y = \frac{4}{3}; 0.$
21. −2; (0, 4).



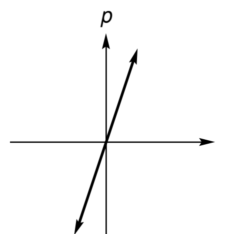
23. (3, 0), (−3, 0), (0, 9); (0, 9).



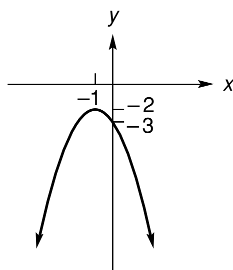
25. (5, 0), (−1, 0), (0, −5); (2, −9).



27. 3; (0, 0).



29. $(0, -3)$; $(-1, -2)$.



31. $x = \frac{17}{7}, y = -\frac{8}{7}$. **33.** $x = 2, y = -1$.
35. $x = 8, y = 4$. **37.** $x = 0, y = 1, z = 0$.
39. $x = -3, y = -4$; $x = 2, y = 1$.
41. $x = -2 - 2r, y = 7 + r, z = r$; r es cualquier número real.
43. $x = r, y = r, z = 0$; r es cualquier número real.
45. $a + b - 3 = 0$; 0. **47.** $f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{19}{3}$.
49. 50 unidades; $5000. **51.** 6.
53. 1250 unidades; $20,000.
55. 2.36 toneladas por km cuadrado.
57. $x = 230, y = -130$. **59.** $x = 0.75, y = 1.43$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 4 (página 179)

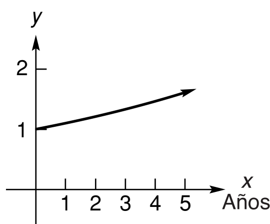
1. Advantage I es el mejor plan para tiempo aire de 85 a $153\frac{1}{3}$ minutos. Advantage II es el mejor plan para tiempo aire de $153\frac{1}{3}$ a $233\frac{1}{3}$ minutos.
3. Si la aproximación inicial está sobre la parte horizontal de ambas gráficas, la calculadora no puede determinar el punto de intersección.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5.1

1. La forma de las gráficas es la misma. El valor de A escala la ordenada de cualquier punto en A.
2.

Año	Aumento multiplicativo	Expresión
0	1	1.1^0
1	1.1	1.1^1
2	1.21	1.1^2
3	1.33	1.1^3
4	1.46	1.1^4

1.1; la inversión aumenta en 10% cada año $(1 + 1(0.1) = 1 + 0.1 = 1.1)$.

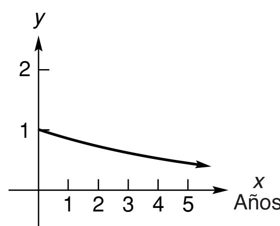


Entre 7 y 8 años.

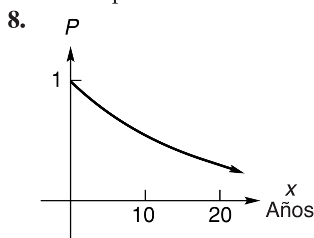
3.

Año	Disminución multiplicativa	Expresión
0	1	0.85^0
1	0.85	0.85^1
2	0.72	0.85^2
3	0.61	0.85^3

0.85; el automóvil se deprecia en 15% cada año $(1 - 1(0.15) = 1 - 0.15 = 0.85)$.

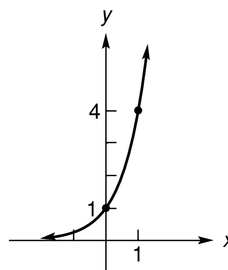


Entre 4 y 5 años.
4. $y = 1.08^{t-3}$; recorra la gráfica 3 unidades hacia la derecha.
5. $3684.87; $1684.87. **6.** $2753.79; $753.79.
7. 117 empleados.
8.

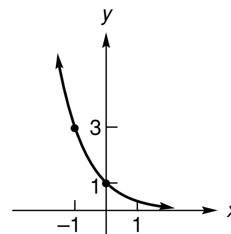


EJERCICIO 5.1 (página 192)

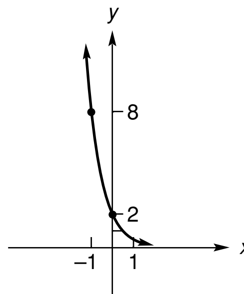
1.



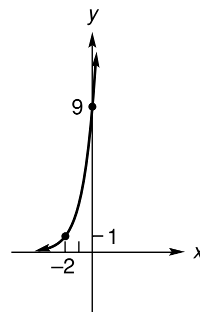
3.



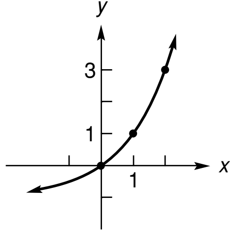
5.



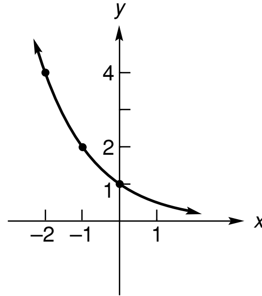
7.



9.



11.



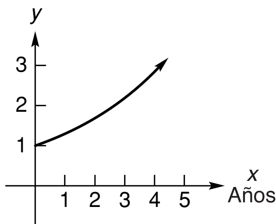
13. *B*. **15.** 138,750. **17.** $\frac{1}{2}$.

19. a. \$6014.52; **b.** \$2014.52.
21. a. \$1964.76; **b.** \$1264.76.
23. a. \$14,124.86; **b.** \$10,124.86.
25. a. \$6256.36; **b.** \$1256.36.
27. a. \$9649.69; **b.** \$1649.69.
29. \$10,446.15.
31. a. $N = 400(1.05)^t$; **b.** 420; **c.** 486.

33.

Año	Aumento multiplicativo	Expresión
0	1	1.3^0
1	1.3	1.3^1
2	1.69	1.3^2
3	2.20	1.3^3

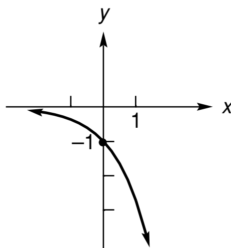
1.3; el reciclado aumenta en 30% cada año $(1 + 1(0.3) = 1 + 0.3 = 1.3)$.



Entre 4 y 5 años.

35. 97,030. **37.** 4.4817. **39.** 0.4966.

41.

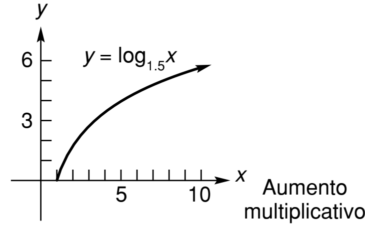


43. 0.2240.
45. $(e^k)^t$, donde $b = e^k$.
47. a. 10; **b.** 7.6; **c.** 2.5; **d.** 25 horas.
49. 32 años.
51. 0.1465.
55. 3.17.
57. 4.2 min.
59. 16.

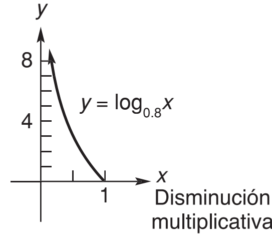
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5.2

1. $t = \log_2 16$; $t =$ número de veces que el número de bacterias se ha duplicado. **2.** $\frac{I}{I_0} = 10^{8.3}$.

3.



4.

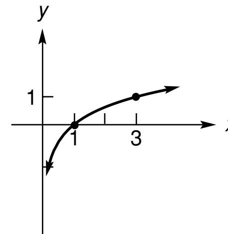


5. Aproximadamente 13.9%.
6. Aproximadamente 9.2%.

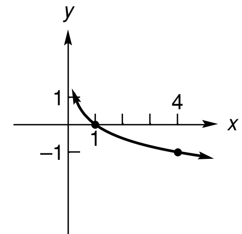
EJERCICIO 5.2 (página 201)

1. $\log 10{,}000 = 4$. **3.** $2^6 = 64$. **5.** $\ln 7.3891 = 2$.
7. $e^{1.09861} = 3$.

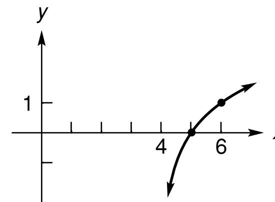
9.



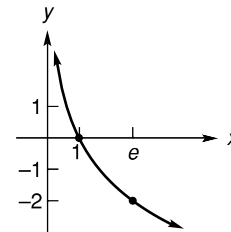
11.



13.



15.



17. 2. **19.** 3.
21. 1. **23.** −2.
25. 0. **27.** −3.
29. 9. **31.** 125.
33. $\frac{1}{10}$. **35.** e^{-3}.
37. 2. **39.** 6.
41. $\frac{1}{81}$. **43.** 2.

45. $\frac{5}{3}$. **47.** 4. **49.** $\frac{\ln 2}{3}$. **51.** $\frac{5 + \ln 3}{2}$.

53. 1.60944. **55.** 2.00013. **57.** $\frac{1}{h} = 10^{5.5}$.

59. 41.50. **61.** $E = 2.5 \times 10^{11+1.5M}$.

63. a. 305.2 mm de mercurio; **b.** 5.13 km.

65. $e^{[u_0-(x_2^2/2)]/A}$. **67.** 21.7 años.

69. $y = \frac{1}{3}\ln\frac{10 - x}{2}$. **71.** $(1, 0)$. **73.** 7.39.

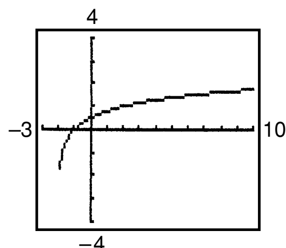
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5.3

1. $\log(900{,}000) - \log(9000) = \log\left(\frac{900{,}000}{9000}\right) = \log(100) = 2.$

2. $\log(10{,}000) = \log(10^4) = 4.$

EJERCICIO 5.3 (página 208)

1. $b + c$. **3.** $a - b$. **5.** $3a - b$. **7.** $2(a + b)$.
9. $\frac{b}{a}$. **11.** 48. **13.** −4. **15.** 5.01. **17.** −2.
19. 2. **21.** $\ln x + 2\ln(x + 1)$.
23. $2\ln x - 3\ln(x + 1)$. **25.** $3[\ln x - \ln(x + 1)]$.
27. $\ln x - \ln(x + 1) - \ln(x + 2)$.
29. $\frac{1}{2}\ln x - 2\ln(x + 1) - 3\ln(x + 2)$.
31. $\frac{2}{5}\ln x - \frac{1}{5}\ln(x + 1) - \ln(x + 2)$.
33. $\log 24$. **35.** $\log_2 \frac{2x}{x + 1}$. **37.** $\log[7^9(23)^5]$.
39. $\log[100(1.05)^{10}]$. **41.** $\frac{81}{64}$. **43.** 1. **45.** $\frac{5}{2}$.
47. ±2. **49.** $\frac{\ln(x + 6)}{\ln 10}$. **51.** $\frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln 3}$.
53. $y = \ln\frac{z}{7}$. **57. a.** 3; **b.** $2 + M_1$. **59.** 3.5229.
61. 12.4771.
63.



65. ln 4.

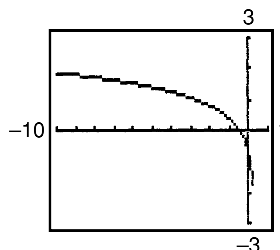
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5.4

1. 18. **2.** Día 20. **3.** El otro sismo es 67.5 veces más intenso que un sismo de nivel cero.

EJERCICIO 5.4 (página 214)

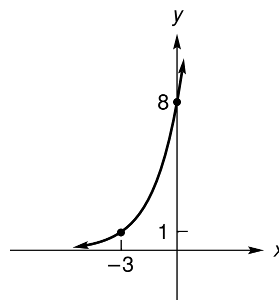
1. 5.000. **3.** 2.750. **5.** −3.000. **7.** 2.000.
9. 0.083. **11.** 1.099. **13.** 0.203. **15.** 5.140.
17. −0.073. **19.** 2.322. **21.** 3.183. **23.** 0.483.
25. 2.496. **27.** 1003.000. **29.** 2.222. **31.** 3.082.
33. 3.000. **35.** 0.500. **37.** $S = 12.4A^{0.26}$.
39. a. 100; **b.** 46. **41.** 20.5.
43. $p = \frac{\log(80 - q)}{\log 2}$; 4.32. **45.** 7.
47. a. 91; **b.** 432; **c.** 8. **49.** 1.20.

51.

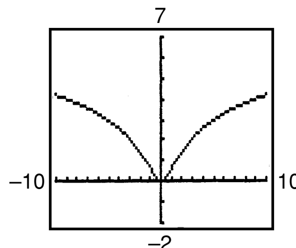


PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 5 (página 216)

1. $\log_3 243 = 5$. **3.** $16^{1/4} = 2$. **5.** $\ln 54.598 = 4$.
7. 3. **9.** −4. **11.** −2. **13.** 4. **15.** $\frac{1}{100}$.
17. −1. **19.** $3(a + 1)$. **21.** $\log\frac{25}{27}$. **23.** $\ln\frac{x^2 y}{z^3}$.
25. $\log_2 \frac{x^{9/2}}{(x + 1)^3(x + 2)^4}$. **27.** $2\ln x + \ln y - 3\ln z$.
29. $\frac{1}{3}(\ln x + \ln y + \ln z)$. **31.** $\frac{1}{2}(\ln y - \ln z) - \ln x$.
33. $\frac{\ln(x + 5)}{\ln 3}$. **35.** 1.8295. **37.** $2x + \frac{1}{2}x$.
39. $2x$. **41.** $y = e^{x^2+2}$.
43.



45. $\frac{1}{3}$.
47. 1.
49. 10.
51. 2^e.
53. 0.880.
55. −3.222.
57. −1.596.
59. a. $3829.04; **b.** $1229.04.
61. 14%.
63. a. $P = 8000(1.02)^t$; **b.** 8323.
65. a. 10 mg; **b.** 4.4; **c.** 0.2; **d.** 1.7; **e.** 5.6.
67. a. 6; **b.** 28. **71.** $(-\infty, 0.37]$. **73.** 2.93.
75.



APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 5 (página 220)

1. a. $P = \frac{T(e^{kI} - 1)}{- e^{-dkI}}$; **b.** $d = \frac{1}{kI}\ln\left[\frac{P}{P - T(e^{kI} - 1)}\right]$.
3. a. 156; **b.** 65.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.1

1. 3×2 o 2×3. **2.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$.

EJERCICIO 6.1 (página 229)

1. a. 2×3, 3×3, 3×2, 2×2, 4×4, 1×2, 3×1, 3×3, 1×1; **b. B, D, E, H, J;** **c. H, J** triangulares superiores; **D, J** triangulares inferiores; **d. F, J;** **e. G, J.**
3. 2. **5.** 4. **7.** 0. **9.** 7, 2, 1, 0.
11. $\begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 & 12 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 14 & 16 & 18 & 20 \end{bmatrix}$. **13.** 120 entradas, 1, 0, 1, 0.
15. a. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; **b.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
17. $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$. **19.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
21. a. A y **C;** **b.** Todas.
25. $x = 6, y = \frac{2}{3}, z = \frac{7}{2}$. **27.** $x = 0, y = 0$.
29. a. 7; **b.** 3; **c.** Febrero; **d.** Azul de lujo; **e.** Febrero; **f.** Febrero; **g.** 38. **31.** −2001. **33.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.2

1. $\begin{bmatrix} 230 & 220 \\ 190 & 255 \end{bmatrix}$. **2.** $x_1 = 670, x_2 = 835, x_3 = 1405$.

EJERCICIO 6.2 (página 237)

1. $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 10 & 5 \\ 10 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. **3.** $\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -9 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$. **5.** $[-9 \quad -7 \quad 11]$.
7. No definida. **9.** $\begin{bmatrix} -12 & 36 & -42 & -6 \\ -42 & -6 & -36 & 12 \end{bmatrix}$.
11. $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \\ -3 & 3 & 13 \end{bmatrix}$. **13.** $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. **15. O.**
17. $\begin{bmatrix} 28 & 22 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$. **19.** No definida. **21.** $\begin{bmatrix} -22 & -15 \\ -11 & 9 \end{bmatrix}$.
23. $\begin{bmatrix} 21 & \frac{29}{2} \\ \frac{19}{2} & -\frac{15}{2} \end{bmatrix}$. **29.** $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 20 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$. **31.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$.
33. Imposible. **35.** $x = \frac{146}{13}, y = -\frac{28}{13}$.
37. $x = 6, y = \frac{4}{3}$. **39.** $x = -6, y = -14, z = 1$.

41. $\begin{bmatrix} 35 & 65 \\ 75 & 55 \\ 25 & 15 \end{bmatrix}$. **43.** 1.1. **45.** $\begin{bmatrix} 15 & -4 & 26 \\ 4 & 7 & 30 \end{bmatrix}$.
47. $\begin{bmatrix} -10 & 22 & 12 \\ 24 & 36 & -44 \end{bmatrix}$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.3

1. \$5780. **2.** \$22,843.75. **3.** $\begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{5} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$.

EJERCICIO 6.3 (página 249)

1. −12. **3.** 19. **5.** 7. **7.** 2×2; 4.
9. 3×5; 15. **11.** 2×1; 2. **13.** 3×3; 9.
15. 3×1; 3. **17.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **19.** $\begin{bmatrix} 12 & -12 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$.
21. $\begin{bmatrix} 23 \\ 50 \end{bmatrix}$. **23.** $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. **25.** $[-6 \quad 16 \quad 10 \quad -6]$.
27. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & -4 & 6 \\ 6 & 9 & -6 & 9 \\ -8 & -12 & 8 & -12 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. **29.** $\begin{bmatrix} 78 & 84 \\ -21 & -12 \end{bmatrix}$.
31. $\begin{bmatrix} -5 & -8 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$. **33.** $\begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix}$. **35.** $\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 \end{bmatrix}$.
37. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. **39.** $\begin{bmatrix} -1 & -20 \\ -2 & 23 \end{bmatrix}$. **41.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.
43. $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 17 \\ 1 & 31 \end{bmatrix}$. **45.** Imposible. **47.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.
49. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. **51.** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
53. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. **55.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **57.** $\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$.
59. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$.
61. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}$. **63.** \$2075. **65.** \$1,133,850.
67. a. \$180,000, \$520,000, \$400,000, \$270,000, \$380,000, \$640,000; **b.** \$390,000, \$100,000, \$800,000; **c.** \$2,390,000; **d.** $\frac{110}{239}, \frac{129}{239}$. **71.** $\begin{bmatrix} 72.82 & -9.8 \\ 51.32 & -36.32 \end{bmatrix}$.
73. $\begin{bmatrix} 15.606 & 64.08 \\ -739.428 & 373.056 \end{bmatrix}$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.4

1. 5 bloques de A, 2 bloques de B y 1 bloque de C.
2. 3 de X; 4 de Y; 2 de Z. **3.** A = 3D; B = 1000 − 2D; C = 500 − D; D = cualquier cantidad (≤ 500).

EJERCICIO 6.4 (página 261)

1. No reducida. **3.** Reducida. **5.** No reducida.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **9.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

13. $x = 2, y = 1$. **15.** No hay solución.

17. $x = -\frac{2}{3}r + \frac{5}{3}, y = -\frac{1}{6}r + \frac{7}{6}, z = r$, en donde r es cualquier número real. **19.** No hay solución.

21. $x = -3, y = 2, z = 0$. **23.** $x = 2, y = -5, z = -1$.

25. $x_1 = 0, x_2 = -r, x_3 = -r, x_4 = -r, x_5 = r$, donde r es cualquier número real. **27.** Federal, \$72,000; estatal, \$24,000.

29. A, 2000; B, 4000; C, 5000. **31. a.** 3 de X, 4 de Z; 2 de X, 1 de Y, 5 de Z; 1 de X; 2 de Y, 6 de Z; 3 de Y, 7 de Z; **b.** 3 de X, 4 de Z; **c.** 3 de X, 4 de Z; 3 de Y, 7 de Z.

33. a. Sean s, d, g el número de unidades de S, D y G, respectivamente. Las seis combinaciones están dadas por:

s	5	4	3	2	1	0
d	8	7	6	5	4	3
g	0	1	2	3	4	5

b. La combinación $s = 0$, $d = 3, g = 5$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.5

1. Un número infinito de soluciones:

$x + \frac{1}{2}z = 0, y + \frac{1}{2}z = 0$; en forma paramétrica:

$x = -\frac{1}{2}r, y = -\frac{1}{2}r, z = r$, donde r es cualquier número real.

EJERCICIO 6.5 (página 267)

1. $w = -r - 3s + 2, x = -2r + s - 3, y = r, z = s$ (donde r y s son cualesquiera números reales).

3. $w = -s, x = -3r - 4s + 2, y = r, z = s$ (donde r y s son cualesquiera números reales).

5. $w = -2r + s - 2, x = -r + 4, y = r, z = s$ (donde r y s son cualesquiera números reales).

7. $x_1 = -2r + s - 2t + 1, x_2 = -r - 2s + t + 4$, $x_3 = r, x_4 = s, x_5 = t$ (donde r, s y t son cualesquiera números reales).

9. Un número infinito de soluciones. **11.** Solución trivial.

13. Un número infinito de soluciones. **15.** $x = 0, y = 0$.

17. $x = -\frac{6}{5}r, y = \frac{8}{15}r, z = r$. **19.** $x = 0, y = 0$.

21. $x = r, y = -2r, z = r$.

23. $w = -2r, x = -3r, y = r, z = r$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.6

1. Sí. **2.** TE VERÉ EL VIERNES.

3. $\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$; **F** no es invertible.

4. A: 5000 acciones; B: 2500 acciones; C: 2500 acciones.

EJERCICIO 6.6 (página 275)

1. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$. **3.** No es invertible. **5.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

7. No es invertible.

9. No es invertible (no es una matriz cuadrada).

11. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **13.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

15. $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. **17.** $\begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -3 & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

19. $x_1 = 10, x_2 = 20$. **21.** $x = 17, y = -20$.

23. $x = 1, y = 3$. **25.** $x = -3r + 1, y = r$.

27. $x = 0, y = 1, z = 2$. **29.** $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$.

31. No hay solución. **33.** $w = 1, x = 3, y = -2, z = 7$.

35. $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. **37. a.** 40 del modelo A, 60 del modelo B; **b.** 45 del modelo A, 50 del modelo B. **39. b.** $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$.

41. Sí. **43.** D: 5000 acciones; E: 1000 acciones; F: 4000 acciones.

45. a. $\begin{bmatrix} 1.46 & 0.56 \\ 0.51 & 1.35 \end{bmatrix}$; **b.** $\begin{bmatrix} \frac{130}{89} & \frac{50}{89} \\ \frac{45}{89} & \frac{120}{89} \end{bmatrix}$.

47. $\begin{bmatrix} 1.80 & 1.10 & -0.46 \\ 0.35 & 1.31 & -0.17 \\ 0.44 & 0.42 & 0.59 \end{bmatrix}$.

49. $w = 14.44, x = 0.03, y = -0.80, z = 10.33$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 6.7

1. 6.

EJERCICIO 6.7 (página 285)

1. 1. **3.** -16. **5.** y. **7.** $-\frac{2}{7}$. **9.** 12.

11. -12. **13.** 6. **15.** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$. **19.** -16. **21.** 98. **23.** -89.

25. -1. **27.** 2. **29.** -90. **31.** 1. **33.** 24.

35. 0. **37.** 0. **39.** 3, 4. **41.** 192. **43. b.** $\frac{1}{3}$.

45. $c = -1$ o $c = 4$. **47.** -1630. **49.** -3864.

EJERCICIO 6.8 (página 290)

1. $x = \frac{3}{2}, y = -1$. **3.** $x = \frac{7}{16}, y = \frac{13}{8}$.

5. $x = -\frac{1}{3}, y = -1$. **7.** $x = \frac{6}{5}, z = \frac{16}{5}$.

9. $x = 4, y = 2, z = 0$. **11.** $x = \frac{2}{3}, y = -\frac{28}{15}, z = -\frac{26}{15}$.

13. $x = 3 - r, y = 0, z = r$. **15.** $x = 1, y = 3, z = 5$.

17. $y = 6, w = 1.$ **19.** Ya que $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ no es aplicable la regla de Cramer. Pero la ecuación en $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = -3, \end{cases}$ representa rectas paralelas distintas y por tanto no existe solución. **21.** Cuatro juegos.
23. $x = 17.85, y = -0.42, z = -24.09.$

EJERCICIO 6.9 (página 294)

1. $\begin{bmatrix} 1290 \\ 1425 \end{bmatrix}$; 1405. **3. a.** $\begin{bmatrix} 297.80 \\ 349.54 \\ 443.12 \end{bmatrix}$; **b.** $\begin{bmatrix} 102.17 \\ 125.28 \\ 175.27 \end{bmatrix}$.
5. $\begin{bmatrix} 1301 \\ 1215 \\ 1188 \end{bmatrix}$. **7.** $\begin{bmatrix} 1073 \\ 1016 \\ 952 \end{bmatrix}$.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 6 (página 296)

1. $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -16 & -10 \end{bmatrix}$. **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 42 & 5 \\ 2 & -18 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. **5.** $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 22 \end{bmatrix}$.
7. $\begin{bmatrix} 6 \\ 32 \end{bmatrix}$. **9.** $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. **11.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$.
13. $x = 3, y = 21.$ **15.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **17.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
19. $x = 0, y = 0.$ **21.** No hay solución. **23.** $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$.
25. No existe la inversa. **27.** $x = 0, y = 1, z = 0.$
29. 18. **31.** 3. **33.** *rich.* **35.** $x = 1, y = 2.$
37. $-2.$ **39.** $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_3, \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}, \mathbf{A}^{2000} = \mathbf{I}_3.$
41. $x = 2 - \frac{c}{a}, y = \frac{c}{a} - 1, z = 1 - \frac{a}{c}.$
43. a. Sean x, y, z las dosis de cápsulas semanales de las marcas I, II, III, respectivamente. Las combinaciones están dadas por:

	x	y	z
combinación 1	4	9	0
combinación 2	3	6	1
combinación 3	2	3	2
combinación 4	1	0	3

b. Combinación 4: $x = 1, y = 0, z = 3.$

45. $\begin{bmatrix} 215 & 87 \\ 89 & 141 \end{bmatrix}$. **47.** $\begin{bmatrix} 40.8 \\ 40.56 \end{bmatrix}$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 6 (página 298)

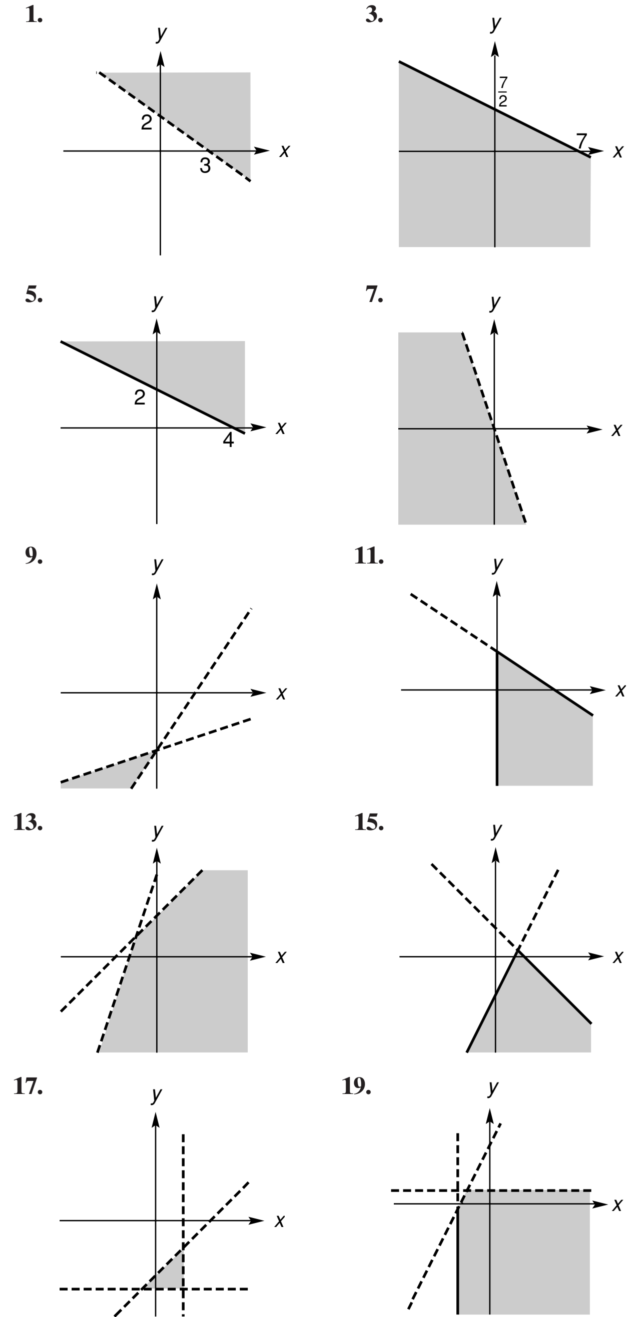
1. $151.40. **3.** No es posible, ya que los huéspedes 3 y 4 le cuestan a la posada la misma cantidad por día.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.1

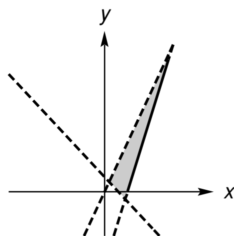
1. $2x + 1.5y > 0.9x + 0.7y + 50, y > -1.375x + 62.5;$ haga el bosquejo de la recta punteada $y = -1.375x + 62.5$ y sombree el semiplano por arriba de la recta. Para producir una utilidad, el número de imanes producidos y vendidos de tipos A y B, debe ser un par ordenado en la región.

2. $x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 50, x \geq 2y$. La región consiste en los puntos en o por arriba del eje x, y en o a la derecha del eje y, los puntos deben estar en o por arriba de la recta $x + y = 50$, y en o por debajo de la recta $x = 2y$.

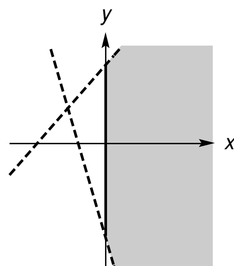
EJERCICIO 7.1 (página 306)



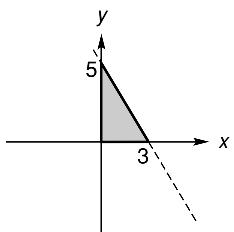
21.



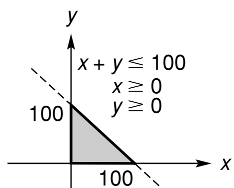
23.



25.



27.



x: número de libras de *A*
y: número de libras de *B*

29. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + 2y \leq 240$, $0.5x + y \leq 80$.

EJERCICIO 7.2 (página 315)

1. $P = 640$ cuando $x = 40$, $y = 20$.
3. $Z = -10$ cuando $x = 2$, $y = 3$.
5. No tiene solución óptima (la región factible es vacía).
7. $Z = 3$ cuando $x = 0$, $y = 1$.
9. $C = 2.4$ cuando $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{6}{5}$.
11. No tiene solución óptima (no acotado).
13. 15 muñecas, 25 soldados; $210.
15. 4 unidades de alimento A, 4 unidades de alimento B; $8.
17. 10 toneladas de la mina I, 10 toneladas de la mina II; $1100.
19. 6 cámaras de tipo A y 10 cámaras de tipo B.
21. c. $x = y = 75$.
23. $Z = 15.54$ cuando $x = 2.56$, $y = 6.74$.
25. $Z = -75.98$ cuando $x = 9.48$, $y = 16.67$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.3

1. Enviar $10t + 15$ televisores de C a A, $-10t + 30$ televisores de C a B, $-10t + 10$ televisores de D a A y $10t$ televisores de D a B, para $0 \leq t \leq 1$; costo mínimo $780.

EJERCICIO 7.3 (página 318)

1. $Z = 33$ cuando $x = (1 - t)(2) + 5t = 2 + 3t$, $y = (1 - t)(3) + 2t = 3 - t$ y $0 \leq t \leq 1$.
3. $Z = 72$ cuando $x = (1 - t)(3) + 4t = 3 + t$, $y = (1 - t)(2) + 0t = 2 - 2t$ y $0 \leq t \leq 1$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.4

1. 0 aparatos de tipo 1, 72 aparatos de tipo 2, 12 aparatos de tipo 3; utilidad máxima de $20,400.

EJERCICIO 7.4 (página 330)

1. $Z = 8$ cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.
3. $Z = 14$ cuando $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.
5. $Z = 28$ cuando $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.
7. $Z = 20$ cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$.
9. $Z = 2$ cuando $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.
11. $Z = \frac{16}{3}$ cuando $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{14}{3}$.
13. $W = 13$ cuando $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$.
15. $Z = 600$ cuando $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$.
17. 0 de A, 2400 de B; $1200.
19. 0 sillas, 300 mecedoras, 100 sillones; $10,800.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.5

1. $35 - 7t$ dispositivos 1, $6t$ dispositivos 2, 0 dispositivos 3 para $0 \leq t \leq 1$.

EJERCICIO 7.5 (página 337)

1. Sí; para la tabla, x_2 es la variable que entra y los cocientes $\frac{6}{2}$ y $\frac{3}{1}$ empatan como los más pequeños.
3. No existe solución óptima (no acotado).
5. $Z = 12$ cuando $x_1 = 4 + t$, $x_2 = t$ y $0 \leq t \leq 1$.
7. No tiene solución óptima (no acotado).
9. $Z = 13$ cuando $x_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}t$, $x_2 = 6t$, $x_3 = 4 - 3t$, y $0 \leq t \leq 1$.
11. $15,200. Si x_1, x_2, x_3 denotan a los números de sillas, mecedoras y sillones producidos, respectivamente, entonces
$x_1 = 100 - 100t$,
$x_2 = 100 + 150t$,
$x_3 = 200 - 50t$, y
$0 \leq t \leq 1$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.6

1. Planta I: 500 estándar, 700 de lujo; planta II: 500 estándar, 100 de lujo; utilidad máxima $89,500.

EJERCICIO 7.6 (página 348)

1. $Z = 7$ cuando $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.
3. $Z = 4$ cuando $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$.
5. $Z = \frac{58}{3}$ cuando $x_1 = \frac{14}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 0$.
7. $Z = -17$ cuando $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.
9. No tiene solución óptima (región factible vacía).
11. $Z = 2$ cuando $x_1 = 6$, $x_2 = 10$.
13. 255 libreros estándar, 0 libreros ejecutivos.
15. 30% en A, 0% en AA, 70% en AAA; 6.6%.

EJERCICIO 7.7 (página 352)

1. $Z = 54$ cuando $x_1 = 2$, $x_2 = 8$.
3. $Z = 216$ cuando $x_1 = 18$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.
5. $Z = 4$ cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$.
7. $Z = 0$ cuando $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.
9. $Z = 28$ cuando $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$.
11. Instalar el dispositivo A en los hornos produce 700,000 barriles anualmente y el dispositivo B en los hornos produce 2,600,000 barriles al año. **13.** A Exton, 5 de A y 10 de B; a Whyton, 15 de A; $380. **15. a.** Columna 3: 1, 3, 3; columna 4: 0, 4, 8; **b.** $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $x_3 = 20$, $x_4 = 0$; **c.** 90 pulgadas.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 7.8

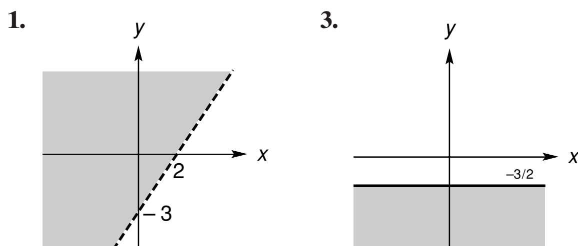
1. Minimizar $W = 60{,}000y_1 + 2000y_2 + 120y_3$ sujeta a
$300y_1 + 20y_2 + 3y_3 \geq 300$,
$220y_1 + 40y_2 + y_3 \geq 200$,
$180y_1 + 20y_2 + 2y_3 \geq 200$,
y $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.
2. Maximizar $W = 98y_1 + 80y_2$ sujeta a
$20y_1 + 8y_2 \leq 6$,
$6y_1 + 16y_2 \leq 2$,
y $y_1, y_2 \geq 0$.
3. 5 dispositivos 1, 0 dispositivos 2, 15 dispositivos 3.

EJERCICIO 7.8 (página 361)

1. Minimizar $W = 6y_1 + 4y_2$ sujeta a
$y_1 - y_2 \geq 2$,
$y_1 + y_2 \geq 3$,
$y_1, y_2 \geq 0$.
3. Maximizar $W = 8y_1 + 2y_2$ sujeta a
$y_1 - y_2 \leq 1$,
$y_1 + 2y_2 \leq 8$,
$y_1 + y_2 \leq 5$,
$y_1, y_2 \geq 0$.
5. Minimizar $W = 13y_1 - 3y_2 - 11y_3$ sujeta a
$-y_1 + y_2 - y_3 \geq 1$,
$2y_1 - y_2 - y_3 \geq -1$,
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$.
7. Maximizar $W = -3y_1 + 3y_2$ sujeta a
$-y_1 + y_2 \leq 4$,
$y_1 - y_2 \leq 4$,
$y_1 + y_2 \leq 6$,
$y_1, y_2 \geq 0$.
9. $Z = 11$ cuando $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{2}$.
11. $Z = 26$ cuando $x_1 = 6, x_2 = 1$.
13. $Z = 14$ cuando $x_1 = 1, x_2 = 2$.
15. $250 en publicidad en periódico, $1400 en publicidad en radio; $1650.
17. 20 aprendices de embarque, 40 trabajadores de embarque, 90 trabajadores semicalificados, 0 trabajadores calificados; $1200.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 7 (página 362)

1. **3.**



5. **7.**

9.

11. $Z = 3$ cuando $x = 3, y = 0$.
13. $Z = -2$ cuando $x = 0, y = 2$.
15. No existe solución óptima (región factible vacía).
17. $Z = 36$ cuando $x = 2 + 2t$, $y = 3 - 3t$, y $0 \leq t \leq 1$.
19. $Z = 32$ cuando $x_1 = 8, x_2 = 0$.
21. $Z = 2$ cuando $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 2$.
23. $Z = 24$ cuando $x_1 = 0, x_2 = 12$.
25. $Z = \frac{7}{2}$ cuando $x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = 0, x_3 = \frac{9}{4}$.
27. No tiene solución óptima (no acotado).
29. $Z = 70$ cuando $x_1 = 35, x_2 = 0, x_3 = 0$.
31. 0 unidades de X, 6 unidades de Y, 14 unidades de Z; $398.
33. 500,000 galones de A a D, 100,000 galones de A a C, 400,000 galones de B a C; $19,000.
35. Sólo 10 kg del alimento A.
37. $Z = 117.88$ cuando $x = 7.23, y = 3.40$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 7 (página 365)

1. 2 minutos de radiación. **3.** Las respuestas pueden variar.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 8.1

1. 4.9%. **2.** 7 años, 16 días. **3.** 7.7208%.
4. La inversión a 20 años de $10,000 es ligeramente mejor.

EJERCICIO 8.1 (página 372)

1. a. $11,105.58; **b.** $5105.58. **3.** 4.060%. **5.** 4.081%.
7. a. 10%; **b.** 10.25%; **c.** 10.381%; **d.** 10.471%; **e.** 10.516%.
9. 8.08%. **11.** 9.0 años. **13.** $10,282.95.
15. $38,503.23. **17. a.** 18%; **b.** 19.56%.
19. $3198.54. **21.** 8% compuesto anualmente.
23. a. 5.47%; **b.** 5.39%. **25.** 11.61%. **27.** 6.29%.

EJERCICIO 8.2 (página 376)

1. $2261.34. **3.** $1751.83. **5.** $5118.10.
7. $4862.31. **9.** $6838.95. **11.** $9419.05.
13. $14,091.10. **15.** $1238.58. **17.** $3244.63
19. a. $515.62; **b.** Rentable. **21.** Cuenta de ahorros.
23. $226.25. **25.** 9.55%.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 8.3

1. 48 pies, 36 pies, 27 pies, $20\frac{1}{4}$ pies, $15\frac{3}{16}$ pies.
2. 750, 1125, 1688, 2531, 3797, 5695. **3.** 35.72 m.

4. \$176,994.65. **5.** 6.20%. **6.** \$101,925; \$121,925.
7. \$723.03. **8.** \$13,962.01. **9.** \$45,502.06.
10. \$48,095.67.

EJERCICIO 8.3 (página 386)

1. 64, 32, 16, 8, 4. **3.** 100, 102, 104.04. **5.** $\frac{422}{243}$.
7. 1.11111. **9.** 18.664613. **11.** 8.213180.
13. \$2050.10. **15.** \$29,984.06. **17.** \$8001.24.
19. \$90,231.01. **21.** \$204,977.46. **23.** \$24,594.36.
25. \$1937.14. **27.** \$458.40.
29. **a.** \$3048.85; **b.** \$648.85. **31.** \$3474.12.
33. \$1725. **35.** 102.91305. **37.** 55,360.30.
39. \$131.34. **41.** \$1,872,984.02.
43. \$205,073; \$142,146.

EJERCICIO 8.4 (página 391)

1. \$69.33. **3.** \$502.84.
5. **a.** \$221.43; **b.** \$25; **c.** \$196.43.

7.

Periodo	Saldo insoluto al inicio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Principal saldado al final del periodo
1	5000.00	350.00	1476.14	1126.14
2	3873.86	271.17	1476.14	1204.97
3	2668.89	186.82	1476.14	1289.32
4	1379.57	96.57	1476.14	1379.57
Total		904.56	5904.56	5000.00

9.

Periodo	Saldo insoluto al inicio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Principal saldado al final del periodo
1	900.00	22.50	193.72	171.22
2	728.78	18.22	193.72	175.50
3	553.28	13.83	193.72	179.89
4	373.39	9.33	193.72	184.39
5	189.00	4.73	193.73	189.00
Total		68.61	968.61	900.00

11. 11. **13.** \$1273.
15. **a.** \$2089.69; **b.** \$1878.33; **c.** \$211.36; **d.** \$381,907.
17. 23. **19.** \$113,302.45. **21.** \$38.64.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 8 (página 394)

1. $\frac{63}{16}$. **3.** 8.5% compuesto anualmente.
5. \$586.60. **7.** **a.** \$1997.13; **b.** \$3325.37.
9. \$936.85. **11.** \$886.98. **13.** \$314.00.

15.

Periodo	Saldo insoluto al inicio del periodo	Interés por periodo	Pago al final del periodo	Principal saldado al final del periodo
1	15,000.00	112.50	3067.84	2955.34
2	12,044.66	90.33	3067.84	2977.51
3	9067.15	68.00	3067.84	2999.84
4	6067.31	45.50	3067.84	3022.34
5	3044.97	22.84	3067.81	3044.97
Total		339.17	15,339.17	15,000.00

17. \$1279.36.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 8 (página 395)

1. \$15,597.85. **3.** Cuando los inversionistas esperan una caída en las tasas de interés, las inversiones a largo plazo son más atractivas que las de corto plazo.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 9.1

1. El límite cuando $x \to a$ no existe, si a es un entero, pero existe si a es cualquier otro valor.
2. 36π cc. **3.** 3616. **4.** 20. **5.** 2.

EJERCICIO 9.1 (página 406)

1. **a.** 1; **b.** 0; **c.** 1. **3.** **a.** 1; **b.** no existe; **c.** 3.
5. $f(0.9) = 2.8, f(0.99) = 2.98, f(0.999) = 2.998,$ $f(1.001) = 3.002, f(1.01) = 3.02, f(1.1) = 3.2$; 3.
7. $f(-0.1) \approx 0.9516, f(-0.01) \approx 0.9950,$ $f(-0.001) \approx 0.9995, f(0.001) \approx 1.0005, f(0.01) \approx 1.0050.$ $f(0.1) \approx 1.0517$; 1.
9. 16. **11.** 20. **13.** -1. **15.** $-\frac{5}{2}$. **17.** 0.
19. 5. **21.** -2. **23.** 3. **25.** 0. **27.** $\frac{1}{6}$.
29. $-\frac{1}{5}$. **31.** $\frac{11}{9}$. **33.** 4. **35.** $2x$. **37.** -1.
39. $2x$. **41.** $2x - 3$. **43.** $\frac{1}{4}$. **45.** **a.** 1; **b.** 0.
47. 11.00. **49.** -7.00.

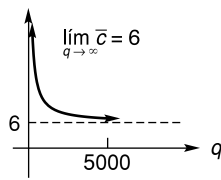
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 9.2

1. $\lim_{x\to\infty} p(x) = 0$. La gráfica inicia arriba y rápidamente desciende hacia cero. De acuerdo con esto, los consumidores están dispuestos a comprar cantidades grandes del producto a precios cercanos a cero.
2. $\lim_{x\to\infty} y(x) = 500$. Las mayores ventas anuales que se pueden esperar con publicidad ilimitada es de \$500,000.
3. $\lim_{x\to\infty} C(x) = \infty$. Esto significa que el costo continúa aumentando sin cota conforme se fabrican más unidades.
4. El límite no existe; \$250.

EJERCICIO 9.2 (página 417)

1. **a.** 2; **b.** 3; **c.** No existe; **d.** $-\infty$; **e.** ∞; **f.** ∞; **g.** ∞; **h.** 0; **i.** 1; **j.** 1; **k.** 1. **3.** 1. **5.** $-\infty$. **7.** $-\infty$.
9. ∞. **11.** 0. **13.** No existe. **15.** 0.
17. ∞. **19.** 0. **21.** 1. **23.** 0. **25.** ∞.
27. 0. **29.** $-\frac{2}{5}$. **31.** $-\infty$. **33.** $\frac{2}{5}$. **35.** $-\infty$.

37. $\frac{11}{5}$. **39.** $-\frac{1}{2}$. **41.** ∞. **43.** ∞. **45.** ∞.
47. No existe. **49.** $-\infty$. **51.** 0. **53.** 1.
55. a. 1; **b.** 2; **c.** No existe; **d.** 1; **e.** 2.
57. a. 0; **b.** 0; **c.** 0; **d.** $-\infty$; **e.** $-\infty$.
59.



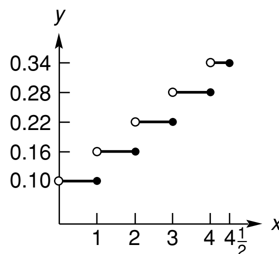
61. 20,000. **63.** 20.
65. 1, 0.5, 0.525, 0.631, 0.912, 0.986, 0.998; se concluye que el límite es 1.
67. 0. **69. a.** 11; **b.** 9; **c.** No existe.

EJERCICIO 9.3 (página 421)

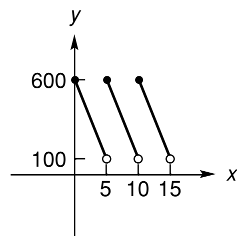
1. \$5563.87; \$1563.87. **3.** \$1456.87. **5.** 4.08%.
7. 3.05%. **9.** \$109.42. **11.** \$778,800.78.
13. a. \$21,911; **b.** \$6599. **15.** \$4.88%.
17. \$1264. **19.** 16 años.
21. Opción (a): \$1072.51; Opción (b): \$1093.30; Opción (c): \$1072.18.
23. a. \$9458.51; **b.** Esta estrategia es mejor por \$26.90.

EJERCICIO 9.4 (página 429)

7. Continua en -2 y 0. **9.** Discontinua en ± 3.
11. Continua en 2 y 0. **13.** f es una función polinomial.
15. f es una función racional y el denominador nunca es cero.
17. Ninguna. **19.** $x = -4$. **21.** Ninguna.
23. $x = -5, 3$. **25.** $x = 0, \pm 1$. **27.** Ninguna.
29. $x = 0$. **31.** Ninguna. **33.** $x = 2$.
35. Discontinuidades en $t = 1, 2, 3, 4$.



37. Sí, no, no.



PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 9.5

1. $0 < x < 4$.

EJERCICIO 9.5 (página 433)

1. $(-\infty, -1), (4, \infty)$. **3.** $[2, 3]$. **5.** $\left(-\frac{7}{2}, -2\right)$.
7. No hay solución. **9.** $(-\infty, -6], [-2, 3]$.
11. $(-\infty, -4), (0, 5)$. **13.** $[0, \infty)$. **15.** $(-3, 0), (1, \infty)$.
17. $(-\infty, -3), (0, 3)$. **19.** $(1, \infty)$.
21. $(-\infty, -5), [-2, 1), [3, \infty)$. **23.** $(-5, -1)$.
25. $(-\infty, -1 - \sqrt{3}], [-1 + \sqrt{3}, \infty)$.
27. Entre 50 y 150, inclusive. **29.** 17 pulgadas por 17 pulgadas.
31. $(-\infty, -7.72]$. **33.** $(-\infty, -0.5), (0.667, \infty)$.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 9 (página 436)

1. -5. **3.** 2. **5.** x. **7.** $-\frac{8}{3}$. **9.** 0. **11.** $\frac{3}{7}$.
13. No existe. **15.** -1. **17.** $\frac{1}{9}$. **19.** $-\infty$.
21. ∞. **23.** $-\infty$. **25.** 1. **27.** $-\infty$. **29.** 8.
31. 23. **33. a.** \$5034.38; **b.** \$1241.46. **35.** 6.18%.
37. 20 ln 2.
41. Continua en todas partes; f es una función polinomial.
43. $x = -3$. **45.** Ninguna. **47.** $x = -4, 1$.
49. $x = -2$. **51.** $(-\infty, -6), (2, \infty)$.
53. $[2, \infty), x = 0$. **55.** $(-\infty, -5), (-1, 1)$.
57. $(-\infty, -4), [-3, 0], (2, \infty)$. **59.** 1.00.
61. 0. **63.** $[2.00, \infty)$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 9 (página 438)

1. 17%.
3. Un modelo exponencial supone una tasa de pago fija.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 10.1

1. $\frac{dH}{dt} = 40 - 32t$.

EJERCICIO 10.1 (página 450)

1. a.

Valor x de Q	3	2.5	2.2	2.1	2.01	2.001
m_{PQ}	19	15.25	13.24	12.61	12.0601	12.0060

b. Estimamos que $m_{tan} = 12$.
3. 1. **5.** 4. **7.** -4. **9.** 0. **11.** $2x + 4$.
13. $4q + 5$. **15.** $-\frac{6}{x^2}$. **17.** $\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$. **19.** -4.
21. 0. **23.** $y = x + 4$. **25.** $y = -3x - 7$.
27. $y = -3x + 9$. **29.** $\dfrac{r}{r_L - r - \dfrac{dC}{dD}}$.
31. $-3.000, 13.445$. **33.** $-5.120, 0.038$.
35. Para los valores x de los puntos en donde la tangente a la gráfica de f es horizontal, los valores correspondientes de $f'(x)$ son cero. Esto es de esperarse, ya que la pendiente de una recta horizontal es cero y la derivada da la pendiente de la recta tangente.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 10.2

1. $50 - 0.6q$.

EJERCICIO 10.2 (página 457)

1. 0. **3.** $6x^5$. **5.** $80x^{79}$. **7.** $18x$. **9.** $20w^4$.

11. $\frac{8}{3}x^3$. **13.** $\frac{1}{2}t^8$. **15.** 1. **17.** $8x - 2$.

19. $4p^3 - 9p^2$. **21.** $-8x^7 + 5x^4$.

23. $-39x^2 + 28x - 2$. **25.** $-8x^3$. **27.** $-\frac{4}{3}x^3$.

29. $16x^3 + 3x^2 - 9x + 8$. **31.** $\frac{6}{5}x^3 + 7x^2$. **33.** $\frac{7}{2}x^{5/2}$.

35. $\frac{3}{4}x^{-1/4} + \frac{10}{3}x^{2/3}$. **37.** $\frac{11}{2}x^{-1/2}$ o $\frac{11}{2\sqrt{x}}$. **39.** $2r^{-2/3}$.

41. $-4x^{-5}$. **43.** $-3x^{-4} - 5x^{-6} + 12x^{-7}$.

45. $-x^{-2}$ o $-\frac{1}{x^2}$. **47.** $-40x^{-6}$. **49.** $-4x^{-4}$.

51. $-\frac{1}{2}t^{-2}$. **53.** $\frac{1}{7} - 7x^{-2}$. **55.** $-3x^{-2/3} - 2x^{-7/5}$.

57. $-\frac{1}{5}x^{-6/5}$. **59.** $-x^{-3/2}$. **61.** $\frac{5}{2}x^{3/2}$.

63. $9x^2 - 20x + 7$. **65.** $45x^4$.

67. $\frac{1}{3}x^{-2/3} - \frac{10}{3}x^{-5/3} = \frac{1}{3}x^{-5/3}(x - 10)$. **69.** $8q + \frac{4}{q^2}$.

71. $2(x + 2)$. **73.** 1. **75.** 4, 16, −14. **77.** 0, 0, 0.

79. $y = 13x + 2$. **81.** $y = -4x + 6$.

83. $y = x + 3$. **85.** $(0, 0), \left(2, -\frac{4}{3}\right)$. **87.** $(3, -3)$.

89. 0. **91.** La recta tangente es $y = 9x - 16$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 10.3

1. 2.5 unidades. **2.** $\frac{dy}{dt} = 16 - 32t. \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0.5} = 0$ pies/s.
Cuando $t = 0.5$ el objeto alcanza su altura máxima.
3. 1.2 y 120%.

EJERCICIO 10.3 (página 468)

1.

Δt	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$\Delta s/\Delta t$	9	6.75	5.64	5.31	5.0301	5.003001

Estimamos la velocidad en $t = 1$, como 5.0000 m/s.
Con diferenciación la velocidad es 5 m/s.

3. **a.** 4 m; **b.** 5.5 m/s; **c.** 5 m/s.
5. **a.** 8 m; **b.** 6.1208 m/s; **c.** 6 m/s.
7. **a.** 2 m; **b.** 10.261 m/s; **c.** 9 m/s. **9.** 0.65.
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{25}{2}x^{3/2}$; 337.50. **13.** 0.27.
15. $dc/dq = 10$; 10. **17.** $dc/dq = 0.6q + 2$; 3.8.
19. $dc/dq = 2q + 50$; 80, 82, 84.
21. $dc/dq = 0.02q + 5$; 6, 7.
23. $dc/dq = 0.00006q^2 - 0.02q + 6$; 4.6, 11.
25. $dr/dq = 0.7$; 0.7, 0.7, 0.7.
27. $dr/dq = 250 + 90q - 3q^2$; 625, 850, 625.
29. $dc/dq = 6.750 - 0.000656q$; 3.47.
31. $dP/dR = -4{,}650{,}000R^{-1.93}$. **33.** **a.** −7.5; **b.** 4.5.
35. **a.** 1; **b.** $\frac{1}{x + 4}$; **c.** 1; **d.** $\frac{1}{9} \approx 0.111$; **e.** 11.1%.
37. **a.** $6x$; **b.** $\frac{6x}{3x^2 + 7}$; **c.** 12; **d.** $\frac{12}{19} \approx 0.632$; **e.** 63.2%.
39. **a.** $-3x^2$; **b.** $-\frac{3x^2}{8 - x^3}$; **c.** −3; **d.** $-\frac{3}{7} \approx -0.429$;
e. −42.9%. **41.** 3.2; 21.3%.
43. **a.** $dr/dq = 30 - 0.6q$; **b.** $\frac{4}{45} \approx 0.089$; **c.** 9%.
45. $\frac{0.432}{t}$. **47.** \$3125. **49.** \$5.07/unidad.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 10.5

1. $\frac{dR}{dx} = 6.25 - 6x$. **2.** $T'(x) = 2x - x^2; T'(1) = 1$.

EJERCICIO 10.5 (página 480)

1. $(4x + 1)(6) + (6x + 3)(4) = 48x + 18 = 6(8x + 3)$.
3. $(8 - 7t)(2t) + (t^2 - 2)(-7) = 14 + 16t - 21t^2$.
5. $(3r^2 - 4)(2r - 5) + (r^2 - 5r + 1)(6r)$
$= 12r^3 - 45r^2 - 2r + 20$.
7. $8x^3 - 10x$.
9. $(x^2 + 3x - 2)(4x - 1) + (2x^2 - x - 3)(2x + 3)$
$= 8x^3 + 15x^2 - 20x - 7$.
11. $(8w^2 + 2w - 3)(15w^2) + (5w^3 + 2)(16w + 2)$
$= 200w^4 + 40w^3 - 45w^2 + 32w + 4$.
13. $(x^2 - 1)(9x^2 - 6) + (3x^3 - 6x + 5)(2x) - 4(8x + 2)$
$= 15x^4 - 27x^2 - 22x - 2$.
15. $\frac{3}{2}\left[(p^{1/2} - 4)(4) + (4p - 5)\left(\frac{1}{2}p^{-1/2}\right)\right]$
$= \frac{3}{4}(12p^{1/2} - 5p^{-1/2} - 32)$.
17. 0. **19.** $18x^2 + 94x + 31$.
21. $\frac{(x - 1)(5) - (5x)(1)}{(x - 1)^2} = -\frac{5}{(x - 1)^2}$.
23. $-\frac{9}{x^7}$. **25.** $\frac{(x - 1)(1) - (x + 2)(1)}{(x - 1)^2} = -\frac{3}{(x - 1)^2}$.
27. $\frac{(z^2 - 4)(-2) - (6 - 2z)(2z)}{(z^2 - 4)^2} = \frac{2(z^2 - 6z + 4)}{(z^2 - 4)^2}$.
29. $\frac{(x^2 - 5x)(16x - 2) - (8x^2 - 2x + 1)(2x - 5)}{(x^2 - 5x)^2}$
$= \frac{-38x^2 - 2x + 5}{(x^2 - 5x)^2}$.
31. $\frac{(2x^2 - 3x + 2)(2x - 4) - (x^2 - 4x + 3)(4x - 3)}{(2x^2 - 3x + 2)^2}$
$= \frac{5x^2 - 8x + 1}{(2x^2 - 3x + 2)^2}$.
33. $-\frac{100x^{99}}{(x^{100} + 7)^2}$. **35.** $\frac{4(v^5 + 2)}{v^2}$.
37. $\frac{15x^2 - 2x + 1}{3x^{4/3}}$. **39.** $\frac{4}{(x - 8)^2} + \frac{2}{(3x + 1)^2}$.
41. $\frac{[(x + 2)(x - 4)](1) - (x - 5)(2x - 2)}{[(x + 2)(x - 4)]^2}$
$= \frac{-(x^2 - 10x + 18)}{[(x + 2)(x - 4)]^2}$.

43. $\dfrac{[(t^2-1)(t^3+7)](2t+3)-(t^2+3t)(5t^4-3t^2+14t)}{[(t^2-1)(t^3+7)]^2}$
$=\dfrac{-3t^6-12t^5+t^4+6t^3-21t^2-14t-21}{[(t^2-1)(t^3+7)]^2}$.

45. $3-\dfrac{2x^3+3x^2-12x+4}{[x(x-1)(x-2)]^2}$. **47.** $-\dfrac{2a}{(a+x)^2}$.

49. -6. **51.** $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{15}{2}$. **53.** $y=16x+24$.

55. 1.5. **57.** 1 m, -1.5 m/s. **59.** $\dfrac{dr}{dq}=25-0.04q$.

61. $\dfrac{dr}{dq}=\dfrac{216}{(q+2)^2}-3$. **63.** $\dfrac{dC}{dI}=0.672$.

65. $\dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{4}$. **67.** 0.615; 0.385. **69. a.** 0.32; **b.** 0.026.

71. $\dfrac{dc}{dq}=\dfrac{5q(q+6)}{(q+3)^2}$. **73.** $\dfrac{9}{10}$. **75.** $\dfrac{0.7355}{(1+0.02744x)^2}$.

77. $-\dfrac{1}{120}$. **79.** $6x^2+2x-13$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 10.6

1. $288t$.

EJERCICIO 10.6 (página 490)

1. $(2u-2)(2x-1)=4x^3-6x^2-2x+2$.

3. $\left(-\dfrac{2}{w^3}\right)(-1)=\dfrac{2}{(2-x)^3}$. **5.** -2. **7.** 0.

9. $18(3x+2)^5$. **11.** $-6x(5-x^2)^2$.

13. $200(3x^2-16x+1)(x^3-8x^2+x)^{99}$.

15. $-6x(x^2-x)^{-4}$.

17. $-10(4x-3)(2x^2-3x-1)^{-13/3}$.

19. $\dfrac{1}{2}(10x-1)(5x^2-x)^{-1/2}$. **21.** $\dfrac{1}{2}(2x-1)^{-3/4}$.

23. $\dfrac{12}{5}x^2(x^3+1)^{-3/5}$. **25.** $-6(4x-1)(2x^2-x+1)^{-2}$.

27. $-2(2x-3)(x^2-3x)^{-3}$. **29.** $-8(8x-1)^{-3/2}$.

31. $\dfrac{7}{3}(7x)^{-2/3}+\sqrt[3]{7}$.

33. $(x^2)[5(x-4)^4(1)]+(x-4)^5(2x)$
$=x(x-4)^4(7x-8)$.

35. $(2x)\left[\dfrac{1}{2}(6x-1)^{-1/2}(6)\right]+(\sqrt{6x-1})(2)$
$=6x(6x-1)^{-1/2}+2\sqrt{6x-1}$.

37. $(x^2+2x-1)^3(5)+(5x)[3(x^2+2x-1)^2(2x+2)]$
$=5(x^2+2x-1)^2(7x^2+8x-1)$.

39. $(8x-1)^3[4(2x+1)^3(2)]+(2x+1)^4[3(8x-1)^2(8)]$
$=16(8x-1)^2(2x+1)^3(7x+1)$.

41. $10\left(\dfrac{x-7}{x+4}\right)^9\left[\dfrac{(x+4)(1)-(x-7)(1)}{(x+4)^2}\right]$
$=\dfrac{110(x-7)^9}{(x+4)^{11}}$.

43. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{-1/2}\left[\dfrac{(x+3)(1)-(x-2)(1)}{(x+3)^2}\right]$
$=\dfrac{5}{2(x+3)^2}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{-1/2}$.

45. $\dfrac{(x^2+4)^3(2)-(2x-5)[3(x^2+4)^2(2x)]}{(x^2+4)^6}$
$=\dfrac{-2(5x^2-15x-4)}{(x^2+4)^4}$.

47. $\dfrac{(3x-1)^3[40(8x-1)^4]-(8x-1)^5[9(3x-1)^2]}{(3x-1)^6}$
$=\dfrac{(8x-1)^4(48x-31)}{(3x-1)^4}$.

49. $6\{(5x^2+2)[2x^3(x^4+5)^{-1/2}]+(x^4+5)^{1/2}(10x)\}$
$=12x(x^4+5)^{-1/2}(10x^4+2x^2+25)$.

51. $8+\dfrac{5}{(t+4)^2}-(8t-7)=15-8t+\dfrac{5}{(t+4)^2}$.

53. $\dfrac{(x^2-7)^4[(2x+1)(2)(3x-5)(3)+(3x-5)^2(2)]-(2x+1)(3x-5)^2[4(x^2-7)^3(2x)]}{(x^2-7)^8}$.

55. 0. **57.** 0. **59.** $y=4x-11$.

61. $y=-\dfrac{1}{6}x+\dfrac{5}{3}$. **63.** 96%. **65.** 20. **67.** 13.99.

69. a. $-\dfrac{q}{\sqrt{q^2+20}}$; **b.** $-\dfrac{q}{100\sqrt{q^2+20}-q^2-20}$;

c. $100-\dfrac{q^2}{\sqrt{q^2+20}}-\sqrt{q^2+20}$.

71. -325. **73.** $\dfrac{dc}{dq}=\dfrac{5q(q^2+6)}{(q^2+3)^{3/2}}$. **75.** $48\pi(10)^{-19}$.

77. a. $-0.001424x^3+0.01338x^2+1.692x-34.8$; -22.986;
b. -0.001. **79.** -4. **81.** 40. **83.** 86,111.22.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 10 (página 494)

1. $-2x$. **3.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$. **5.** 0.

7. $28x^3-18x^2+10x=2x(14x^2-9x+5)$.

9. $4s^3+4s=4s(s^2+1)$. **11.** $\dfrac{2x}{5}$.

13. $(x^2+6x)(3x^2-12x)+(x^3-6x^2+4)(2x+6)$
$=5x^4-108x^2+8x+24$.

15. $100(2x^2+4x)^{99}(4x+4)$
$=400(x+1)[(2x)(x+2)]^{99}$.

17. $-\dfrac{6}{(2x+1)^2}$.

19. $(8+2x)(4)(x^2+1)^3(2x)+(x^2+1)^4(2)$
$=2(x^2+1)^3(9x^2+32x+1)$.

21. $\dfrac{(z^2+4)(2z)-(z^2-1)(2z)}{(z^2+4)^2}=\dfrac{10z}{(z^2+4)^2}$.

23. $\dfrac{4}{3}(4x-1)^{-2/3}$.

25. $-\dfrac{1}{2}(1-x)^{-3/2}(-1)=\dfrac{1}{2}(1-x)^{-3/2}$.

27. $(x-6)^4[3(x+5)^2]+(x+5)^3[4(x-6)^3]$
$=(x-6)^3(x+5)^2(7x+2)$.

29. $\dfrac{(x+6)(5)-(5x-4)(1)}{(x+6)^2}=\dfrac{34}{(x+6)^2}$.

31. $2\left(-\dfrac{3}{8}\right)x^{-11/8}+\left(-\dfrac{3}{8}\right)(2x)^{-11/8}(2)$
$=-\dfrac{3}{4}(1+2^{-11/8})x^{-11/8}$.

33. $\dfrac{\sqrt{x^2+5}(2x)-(x^2+6)(1/2)(x^2+5)^{-1/2}(2x)}{x^2+5}$.

$=\dfrac{x(x^2+4)}{(x^2+5)^{3/2}}$.

35. $\left(\dfrac{3}{5}\right)(x^3+6x^2+9)^{-2/5}(3x^2+12x)$.

$=\dfrac{9}{5}x(x+4)(x^3+6x^2+9)^{-2/5}$.

37. $7(1-2z)$. **39.** $y=-4x+3$.

41. $y=\dfrac{1}{12}x+\dfrac{4}{3}$. **43.** $\dfrac{5}{7}\approx 0.714; 71.4\%$.

45. $dr/dq=20-0.2q$. **47.** 0.569, 0.431.

49. $dr/dq=450-q$.

51. $dc/dq=0.125+0.00878q$; 0.7396.

53. 84 huevos/mm. **55.** **a.** $\dfrac{4}{3}$; **b.** $\dfrac{1}{24}$.

57. 8π pies^3/pie.

59. $4q-\dfrac{10{,}000}{q^2}$. **61.** **a.** 240; **b.** $\dfrac{1}{100}$;

c. No, como $dr/dm<300$ cuando $m=80$. **63.** 0.305.

65. −0.32.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 10 (página 497)

1. La pendiente es mayor, por arriba de 0.9. Más de eso es gasto, menos es ahorro. **3.** Gasto \$705, ahorro \$295.

5. Las respuestas pueden variar.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 11.1

1. $\dfrac{dq}{dp}=\dfrac{12p}{3p^2+4}$. **2.** $\dfrac{dR}{dI}=\dfrac{1}{I\ln 10}$.

EJERCICIO 11.1 (página 504)

1. $\dfrac{4}{x}$. **3.** $\dfrac{3}{3x-7}$. **5.** $\dfrac{2}{x}$. **7.** $-\dfrac{2x}{1-x^2}$.

9. $\dfrac{6p^2+3}{2p^3+3p}=\dfrac{3(2p^2+1)}{p(2p^2+3)}$.

11. $t\left(\dfrac{1}{t}\right)+(\ln t)=1+\ln t$.

13. $\dfrac{4x^2}{4x+3}+2x\ln(4x+3)$. **15.** $\dfrac{8}{(\ln 3)(8x-1)}$.

17. $2x\left[1+\dfrac{1}{(\ln 2)(x^2+4)}\right]$.

19. $\dfrac{z\left(\frac{1}{z}\right)-(\ln z)(1)}{z^2}=\dfrac{1-\ln z}{z^2}$.

21. $\dfrac{(\ln x)(2x)-(x^2-1)\left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2}=\dfrac{2x^2\ln(x)-x^2+1}{x\ln^2 x}$.

23. $\dfrac{3(2x+4)}{x^2+4x+5}=\dfrac{6(x+2)}{x^2+4x+5}$. **25.** $\dfrac{9x}{1+x^2}$.

27. $\dfrac{2}{1-t^2}$. **29.** $\dfrac{x}{1-x^4}$. **31.** $\dfrac{4x}{x^2+2}+\dfrac{3x^2+1}{x^3+x-1}$.

33. $\dfrac{5}{x}+\dfrac{5}{2x+1}$. **35.** $\dfrac{2(x^2+1)}{2x+1}+2x\ln(2x+1)$.

37. $\dfrac{3(1+\ln^2 x)}{x}$. **39.** $\dfrac{4\ln^3(ax)}{x}$.

41. $\dfrac{x}{2(x-1)}+\ln\sqrt{x-1}$. **43.** $\dfrac{3}{2x\sqrt{4+3\ln x}}$.

45. $y=4x-12$. **47.** $\dfrac{\ln(3)-1}{\ln^2 3}$. **49.** $\dfrac{25}{7}$.

51. $\dfrac{dq}{dp}=\dfrac{20}{2p+1}$. **53.** $\dfrac{6a}{(T-a^2+aT)(a-T)}$.

57. 1.36.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 11.2

1. $\dfrac{dT}{dt}=Cke^{kt}$.

EJERCICIO 11.2 (página 509)

1. $7e^x$. **3.** $2xe^{x^2+4}$. **5.** $-5e^{9-5x}$.

7. $(6r+4)e^{3r^2+4r+4}=2(3r+2)e^{3r^2+4r+4}$.

9. $x(e^x)+e^x(1)=e^x(x+1)$. **11.** $2xe^{-x^2}(1-x^2)$.

13. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{3}$. **15.** $(6x)4^{3x^2}\ln 4$. **17.** $\dfrac{2e^{2w}(w-1)}{w^3}$.

19. $\dfrac{e^{1+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$. **21.** $5x^4-5^x\ln 5$. **23.** $\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

25. 1. **27.** $(1+\ln x)e^{x\ln x}$. **29.** $-e$.

31. $y-e^{-2}=e^{-2}(x+2)$ o $y=e^{-2}x+3e^{-2}$.

33. $dp/dq=-0.015e^{-0.001q}, -0.015e^{-0.5}$.

35. $dc/dq=10e^{q/700}$; $10e^{0.5}$; $10e$. **37.** −5.

39. e. **41.** $100e^{-2}$. **47.** $-b(10^{A-bM})\ln 10$.

51. 0.0036. **53.** 0.68.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 11.3

1. $\dfrac{dP}{dt}=0.5(P-P^2)$.

2. $\dfrac{dV}{dt}=4\pi r^2\dfrac{dr}{dt}$ y $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{r=12}=2880\pi$ pulgadas/minuto.

3. La parte superior de la escalera está resbalando a una velocidad de $\dfrac{9}{4}$ pies/segundo.

EJERCICIO 11.3 (página 516)

1. $-\dfrac{x}{4y}$. **3.** $\dfrac{7}{12y^3}$. **5.** $-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$. **7.** $-\dfrac{y^{1/4}}{x^{1/4}}$. **9.** $-\dfrac{y}{x}$.

11. $\dfrac{11-y}{x-1}$. **13.** $\dfrac{4y-2x^2}{y^2-4x}$. **15.** $\dfrac{6y^{2/3}}{3y^{1/6}+2}$.

17. $\dfrac{1-6xy^3}{1+9x^2y^2}$. **19.** $\dfrac{xe^y-y}{x(\ln x-xe^y)}$. **21.** $-\dfrac{e^y}{xe^y+1}$.

23. $6e^{3x}(1+e^{3x})(x+y)-1$. **25.** $-\dfrac{3}{5}$.

27. $0; -\dfrac{4x_0}{9y_0}$. **29.** $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$. **31.** $\dfrac{dq}{dp}=-\dfrac{1}{2q}$.

33. $\dfrac{dq}{dp}=-\dfrac{(q+5)^3}{40}$. **35.** $-\lambda I$. **37.** $1.5E\ln 10$.

39. $-\dfrac{V}{0.4T}=-2.5\dfrac{V}{T}$. **41.** $\dfrac{3}{8}$.

EJERCICIO 11.4 (página 520)

1. $(x+1)^2(x-2)(x^2+3)\left[\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2x}{x^2+3}\right]$.

3. $(3x^2-1)^2(2x+5)^3\left[\frac{18x^2}{3x^3-1}+\frac{6}{2x+5}\right]$.

5. $\frac{\sqrt{x+1}\sqrt{x^2-2}\sqrt{x+4}}{2}\cdot\left[\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-2}+\frac{1}{x+4}\right]$.

7. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2x}\left[\frac{x}{x^2-1}+\frac{2}{1-2x}\right]$.

9. $\frac{(2x^2+2)^2}{(x+1)^2(3x+2)}\left[\frac{4x}{x^2+1}-\frac{2}{x+1}-\frac{3}{3x+2}\right]$.

11. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{3x-4}}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{3}{3x-4}\right]$.

13. $x^{2x+1}\left(\frac{2x+1}{x}+2\ln x\right)$. **15.** $\frac{x^{1/x}(1-\ln x)}{x^2}$.

17. $2(3x+1)^{2x}\left[\frac{3x}{3x+1}+\ln(3x+1)\right]$.

19. $4e^x x^{3x}(4+3\ln x)$. **21.** 12. **23.** $y=96x+36$.

25. $y=6ex-3e$. **27.** $\frac{1}{3e^{13}}$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 11.5

1. $\frac{d^2h}{dt^2}=-32$ pies/seg^2. (*Nota*: valores negativos indican la dirección hacia abajo.)
2. $c''(3)=14$ dólares/unidad^2.

EJERCICIO 11.5 (página 524)

1. 24. **3.** 0. **5.** e^x. **7.** $3+2\ln x$. **9.** $-\frac{10}{p^6}$.

11. $-\frac{1}{4(9-r)^{3/2}}$. **13.** $\frac{50}{(5x-6)^3}$. **15.** $\frac{4}{(x-1)^3}$.

17. $-\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+6)^2}\right]$. **19.** $e^z(z^2+4z+2)$.

21. 32. **23.** $-\frac{1}{y^3}$. **25.** $-\frac{4}{y^3}$. **27.** $\frac{1}{8x^{3/2}}$.

29. $\frac{2(y-1)}{(1+x)^2}$. **31.** $\frac{y}{(1-y)^3}$. **33.** $-\frac{16}{125}$.

35. $300(5x-3)^2$. **37.** 0.6. **39.** ±1.
41. -4.99 y 1.94.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 11 (página 526)

1. $2e^x+e^{x^2}(2x)=2(e^x+xe^{x^2})$.

3. $\frac{1}{r^2+5r}(2r+5)=\frac{2r+5}{r(r+5)}$.

5. $e^{x^2+4x+5}(2x+4)=2(x+2)e^{x^2+4x+5}$.

7. $e^x(2x)+(x^2+2)e^x=e^x(x^2+2x+2)$.

9. $\frac{\sqrt{(x-6)(x+5)(9-x)}}{2}\left[\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x-9}\right]$.

11. $\frac{e^x\left(\frac{1}{x}\right)-(\ln x)(e^x)}{e^{2x}}=\frac{1-x\ln x}{xe^x}$.

13. $\frac{2}{q+1}+\frac{3}{q+2}$. **15.** $-7(\ln 10)^{2-7x}$.

17. $\frac{4e^{2x+1}(2x-1)}{x^2}$. **19.** $\frac{16}{(8x+5)\ln 2}$.

21. $\frac{1+2l+3l^2}{1+l+l^2+l^3}$. **23.** $(x+1)^{x+1}[1+\ln(x+1)]$.

25. $2\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-t}\right)(-1)=\frac{5t-8}{2t(t-2)}$.

27. $y\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x^2+2}\right)(2x)+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{x^2+9}\right)(2x)-\frac{4}{11}\left(\frac{1}{x^3+6x}\right)(3x^2+6)\right]$
$=y\left[\frac{3x}{x^2+2}+\frac{8x}{9(x^2+9)}-\frac{12(x^2+2)}{11(x^3+6x)}\right]$,
donde y es como se dio en el problema.

29. $(x^x)^x(x+2x\ln x)$. **31.** 4. **33.** -2.
35. $y=6x+6(1-\ln 2)$ o $y=6x+6-\ln 64$.

37. $(0, 4\ln 2)$. **39.** 18. **41.** 2. **43.** $-\frac{y}{x+y}$.

45. $\frac{xy^2-y}{2x-x^2y}$. **47.** $\frac{4}{9}$.

49. $\frac{dy}{dx}=\frac{y+1}{y}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y+1}{y^3}$.

51. $f'(t)=0.008e^{-0.01t}+0.00004e^{-0.0002t}$. **53.** 0.90.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 11 (página 528)

1. La figura 11.5 muestra que la población alcanza su tamaño final en alrededor de 45 días.
3. La recta tangente no coincidirá de manera exacta con la curva en la primera vez. Pasos más pequeños de tiempo podrían reducir el error.

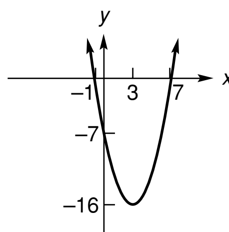
PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 12.1

1. Existe un máximo relativo cuando $x=1$, y un mínimo relativo cuando $x=3$.
2. La droga está en su concentración máxima 2 horas después de su aplicación.

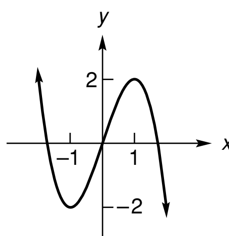
EJERCICIO 12.1 (página 541)

1. Decreciente en $(-\infty,-1)$ y $(3,\infty)$; creciente en $(-1,3)$; mínimo relativo $(-1,-1)$; máximo relativo $(3,4)$.
3. Decreciente en $(-\infty,-2)$ y $(0,2)$; creciente en $(-2,0)$ y $(2,\infty)$; mínimo relativo $(-2,1)$ y $(2,1)$; no hay máximo relativo.
5. Creciente en $(-\infty,-1)$ y $(3,\infty)$; decreciente en $(-1,3)$; máximo relativo cuando $x=-1$; mínimo relativo cuando $x=3$.
7. Decreciente en $(-\infty,-1)$; creciente en $(-1,3)$ y $(3,\infty)$; mínimo relativo cuando $x=-1$.
9. Creciente en $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$; no hay mínimo relativo ni máximo relativo.
11. Creciente en $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$; decreciente en $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$; máximo relativo cuando $x=\frac{1}{2}$.
13. Decreciente en $(-\infty,-5)$ y $(1,\infty)$; creciente en $(-5,1)$; mínimo relativo cuando $x=-5$; máximo relativo cuando $x=1$.
15. Decreciente en $(-\infty,-1)$ y $(0,1)$; creciente en $(-1,0)$ y $(1,\infty)$; máximo relativo cuando $x=0$; mínimo relativo cuando $x=\pm1$.

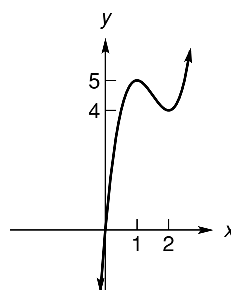
17. Creciente en $(-\infty, 1)$ y $(3, \infty)$; decreciente en $(1, 3)$; máximo relativo cuando $x = 1$; mínimo relativo cuando $x = 3$.
19. Creciente en $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ y $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$; decreciente en $\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right)$; máximo relativo cuando $x = -\frac{2}{3}$; mínimo relativo cuando $x = \frac{5}{2}$.
21. Creciente en $\left(-\infty, \frac{-2 - \sqrt{7}}{3}\right)$ y $\left(\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}, \infty\right)$; decreciente en $\left(\frac{-2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}\right)$; máximo relativo cuando $x = \frac{-2 - \sqrt{7}}{3}$; mínimo relativo cuando $x = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$.
23. Creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; decreciente en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$; máximo relativo cuando $x = -1$; mínimo relativo cuando $x = 1$.
25. Decreciente en $(-\infty, -4)$ y $(0, \infty)$; creciente en $(-4, 0)$; mínimo relativo cuando $x = -4$; máximo relativo cuando $x = 0$.
27. Creciente en $(-\infty, -\sqrt{2})$ y $(0, \sqrt{2})$; decreciente en $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, \infty)$; máximo relativo cuando $x = \pm\sqrt{2}$; mínimo relativo cuando $x = 0$.
29. Creciente en $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ y $(0, \infty)$; nunca es decreciente; no tiene extremos relativos.
31. Decreciente en $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$; no tiene extremos relativos.
33. Decreciente en $(0, \infty)$; no tiene extremos relativos.
35. Decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(4, \infty)$; creciente en $(0, 2)$ y $(2, 4)$; mínimo relativo cuando $x = 0$; máximo relativo cuando $x = 4$.
37. Creciente en $(-\infty, -3)$ y $(-1, \infty)$; decreciente en $(-3, -2)$ y $(-2, -1)$; máximo relativo cuando $x = -3$; mínimo relativo cuando $x = -1$.
39. Decreciente en $\left(-\infty, \frac{-2 - \sqrt{29}}{5}\right)$ y $\left(\frac{-2 + \sqrt{29}}{5}, \infty\right)$; creciente en $\left(\frac{-2 - \sqrt{29}}{5}, \frac{-2 + \sqrt{29}}{5}\right)$; mínimo relativo cuando $x = \frac{-2 - \sqrt{29}}{5}$; máximo relativo cuando $x = \frac{-2 + \sqrt{29}}{5}$.
41. Creciente en $(-\infty, -2)$, $\left(-2, \frac{11}{5}\right)$ y $(5, \infty)$; decreciente en $\left(\frac{11}{5}, 5\right)$; máximo relativo cuando $x = \frac{11}{5}$; mínimo relativo cuando $x = 5$.
43. Creciente en $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{18}{7}\right)$ y $(6, \infty)$; decreciente en $\left(\frac{18}{7}, 6\right)$; máximo relativo cuando $x = \frac{18}{7}$; mínimo relativo cuando $x = 6$.
45. Decreciente en $(-\infty, \infty)$; no tiene extremos relativos.
47. Decreciente en $\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; creciente en $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$; mínimo relativo cuando $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
49. Decreciente en $(-\infty, 0)$; creciente en $(0, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = 0$.
51. Decreciente en $(0, 1)$; creciente en $(1, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = 1$; no tiene máximos relativos.
53. Decreciente en $(-\infty, 3)$; creciente en $(3, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = 3$; intersecciones: $(7, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, -7)$.



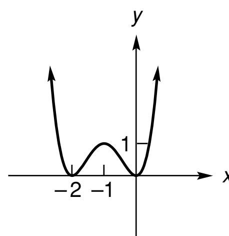
55. Decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; creciente en $(-1, 1)$; mínimo relativo cuando $x = -1$; máximo relativo cuando $x = 1$; simétrica con respecto al origen; intersecciones: $(\pm\sqrt{3}, 0)$, $(0, 0)$.



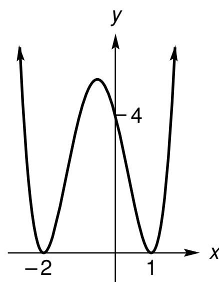
57. Creciente en $(-\infty, 1)$ y $(2, \infty)$; decreciente en $(1, 2)$; máximo relativo cuando $x = 1$; mínimo relativo cuando $x = 2$; intersección: $(0, 0)$.



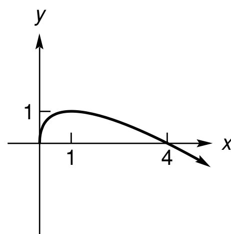
59. Creciente en $(-2, -1)$ y $(0, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(-1, 0)$; máximo relativo cuando $x = -1$; mínimo relativo cuando $x = -2, 0$; intersecciones $(0, 0)$, $(-2, 0)$.



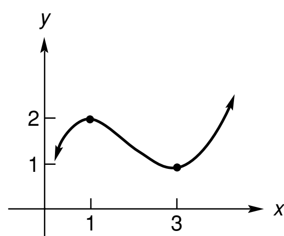
61. Decreciente en $(-\infty, -2)$ y $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$; creciente en $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ y $(1, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = -2, 1$; máximo relativo cuando $x = -\frac{1}{2}$; intersecciones: $(1, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 4)$.



63. Decreciente en $(1, \infty)$; creciente en $(0, 1)$; máximo relativo cuando $x = 1$; intersecciones: $(0, 0)$, $(4, 0)$.



65.



69. Nunca.

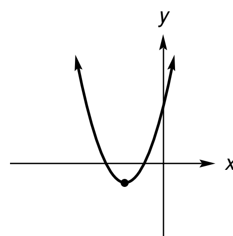
71. 40. **75.** **a.** 25,300; **b.** 4; **c.** 17,200.
77. Mínimo relativo: $(-4.10, -2.21)$.
79. Máximo relativo: $(2.74, 3.74)$; mínimo relativo: $(-2.74, -3.74)$.
81. Mínimo relativo: 0, 1.50, 2.00; máximo relativo: 0.57, 1.77.
83. **a.** $f'(x) = 4 - 6x - 3x^2$.
c. Decreciente: $(-\infty, -2.53)$, $(0.53, \infty)$; creciente: $(-2.53, 0.53)$.

EJERCICIO 12.2 (página 546)

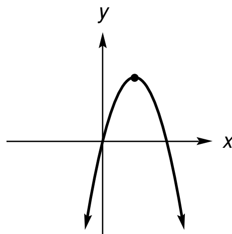
1. Máximo: $f(3) = 6$; mínimo: $f(1) = 2$.
3. Máximo: $f(0) = 1$; mínimo: $f(2) = -\frac{19}{3}$.
5. Máximo: $f(3) = 84$; mínimo: $f(1) = -8$.
7. Máximo: $f(-2) = 56$; mínimo: $f(-1) = -2$.
9. Máximo: $f(\sqrt{2}) = 4$; mínimo $f(2) = -16$.
11. Máximo: $f(0) = f(3) = 2$; mínimo: $f\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{73}{4}$.
13. Máximo: $f(3) \approx 2.08$; mínimo: $f(0) = 0$.
15. **a.** $-3.22, -0.78$; **b.** 2.75; **c.** 9; **d.** 14,283.

EJERCICIO 12.3 (página 552)

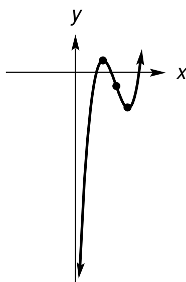
1. Cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$, $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$; cóncava hacia abajo $\left(0, \frac{3}{2}\right)$; puntos de inflexión cuando $x = 0, \frac{3}{2}$.
3. Cóncava hacia arriba $(-\infty, 1)$, $(1, 7)$; cóncava hacia abajo $(7, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 7$.
5. Cóncava hacia arriba $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; no tiene puntos de inflexión.
7. Cóncava hacia abajo $(-\infty, \infty)$.
9. Cóncava hacia abajo $(-\infty, -1)$; cóncava hacia arriba $(-1, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = -1$.
11. Cóncava hacia abajo $\left(-\infty, \frac{7}{4}\right)$; cóncava hacia arriba $\left(\frac{7}{4}, \infty\right)$; punto de inflexión cuando $x = \frac{7}{4}$.
13. Cóncava hacia arriba $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-1, 1)$; puntos de inflexión cuando $x = \pm 1$.
15. Cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$; cóncava hacia abajo $(0, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 0$.
17. Cóncava hacia arriba $\left(-\infty, -\frac{7}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$; cóncava hacia abajo $\left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{3}\right)$; puntos de inflexión cuando $x = -\frac{7}{2}, \frac{1}{3}$.
19. Cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$, $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$; cóncava hacia arriba $\left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$; punto de inflexión cuando $x = 0, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.
21. Cóncava hacia arriba $(-\infty, -\sqrt{5})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{5}, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\sqrt{5}, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \sqrt{5})$; puntos de inflexión cuando $x = \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{2}$.
23. Cóncava hacia abajo $(-\infty, 1)$; cóncava hacia arriba $(1, \infty)$.
25. Cóncava hacia abajo $(-\infty, -1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, \infty)$; cóncava hacia arriba $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$; puntos de inflexión cuando $x = \pm 1/\sqrt{3}$.
27. Cóncava hacia abajo $(-\infty, -3)$, $\left(-3, \frac{2}{7}\right)$; cóncava hacia arriba $\left(\frac{2}{7}, \infty\right)$; punto de inflexión cuando $x = \frac{2}{7}$.
29. Cóncava hacia arriba $(-\infty, \infty)$.
31. Cóncava hacia abajo $(-\infty, -2)$; cóncava hacia arriba $(-2, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = -2$.
33. Cóncava hacia abajo $(0, e^{3/2})$; cóncava hacia arriba $(e^{3/2}, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = e^{3/2}$.
35. Intersecciones $(-3, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 3)$; decreciente en $(-\infty, -2)$; creciente en $(-2, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = -2$; cóncava hacia arriba $(-\infty, \infty)$.



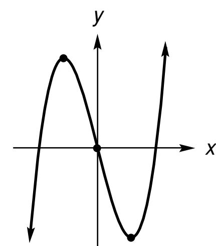
37. Intersecciones $(0, 0)$, $(4, 0)$; creciente en $(-\infty, 2)$; decreciente en $(2, \infty)$; máximo relativo cuando $x = 2$; cóncava hacia abajo $(-\infty, \infty)$.



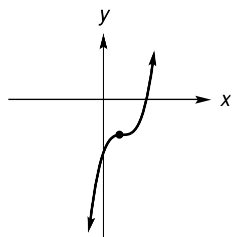
39. Intersección $(0, -19)$; creciente en $(-\infty, 2)$, $(4, \infty)$; decreciente en $(2, 4)$; máximo relativo cuando $x = 2$; mínimo relativo cuando $x = 4$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 3)$; cóncava hacia arriba $(3, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 3$.



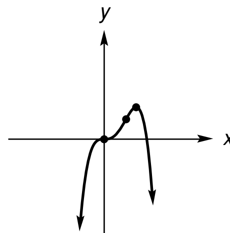
41. Intersecciones $(0, 0)$, $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$; creciente en $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$; decreciente en $(-2, 2)$; máximo relativo cuando $x = -2$; mínimo relativo cuando $x = 2$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$; cóncava hacia arriba $(0, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 0$; simétrica con respecto al origen.



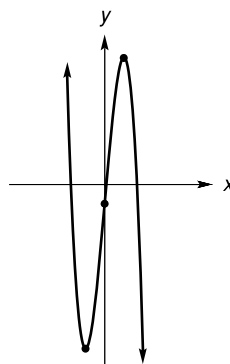
43. Intersección $(0, -3)$; creciente en $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$; no tiene máximos ni mínimos relativos; cóncava hacia abajo $(-\infty, 1)$; cóncava hacia arriba $(1, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 1$.



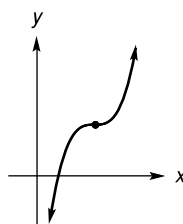
45. Intersecciones $(0, 0)$, $(4/3, 0)$; creciente en $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$; decreciente en $(1, \infty)$; máximo relativo cuando $x = 1$; cóncava hacia arriba $(0, 2/3)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$, $(2/3, \infty)$; puntos de inflexión cuando $x = 0$, $x = 2/3$.



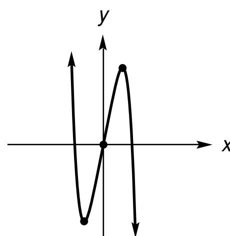
47. Intersección $(0, -2)$; decreciente en $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$; creciente en $(-2, 2)$; mínimo relativo cuando $x = -2$; máximo relativo cuando $x = 2$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$; cóncava hacia abajo $(0, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 0$.



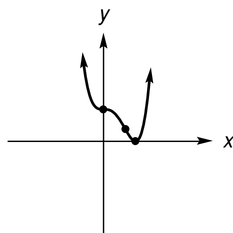
49. Intersección $(0, -6)$; creciente en $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 2)$; cóncava hacia arriba $(2, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 2$.



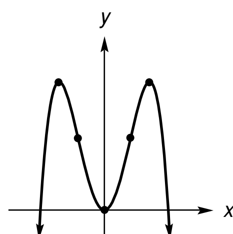
51. Intersecciones $(0, 0)$, $(\pm \sqrt[4]{5}, 0)$; decreciente en $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; creciente en $(-1, 1)$; mínimo relativo cuando $x = -1$; máximo relativo cuando $x = 1$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 0)$; cóncava hacia abajo $(0, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 0$; simétrica con respecto al origen.



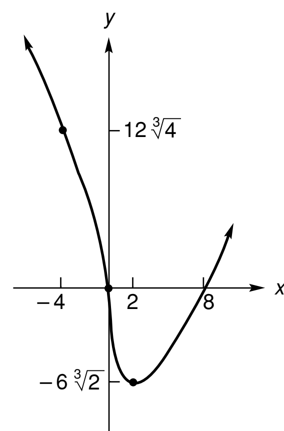
53. Intersecciones $(0, 1), (1, 0)$; decreciente en $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$; creciente en $(1, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = 1$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 0), (2/3, \infty)$; cóncava hacia abajo $(0, 2/3)$; puntos de inflexión cuando $x = 0, x = 2/3$.



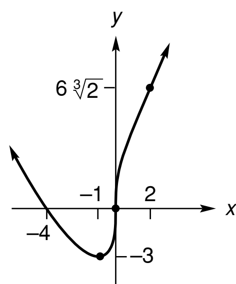
55. Intersecciones $(0, 0), (\pm 2, 0)$; creciente en $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$; decreciente en $(-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, \infty)$; máximo relativo cuando $x = \pm\sqrt{2}$; mínimo relativo cuando $x = 0$; cóncava hacia abajo $(-\infty, -\sqrt{2/3}), (\sqrt{2/3}, \infty)$; cóncava hacia arriba $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$; puntos de inflexión cuando $x = \pm\sqrt{2/3}$; simétrica con respecto al eje y.



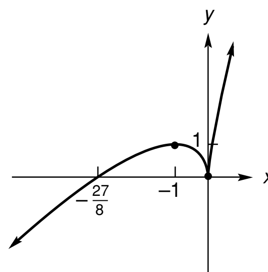
57. Intersecciones $(0, 0), (8, 0)$; decreciente en $(-\infty, 0), (0, 2)$; creciente en $(2, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = 2$; cóncava hacia arriba $(-\infty, -4), (0, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-4, 0)$; puntos de inflexión cuando $x = -4, x = 0$.



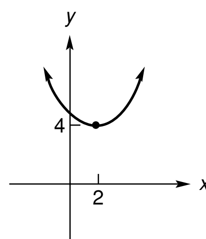
59. Intersecciones $(0, 0), (-4, 0)$; decreciente en $(-\infty, -1)$; creciente en $(-1, 0), (0, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = -1$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 0), (2, \infty)$; cóncava hacia abajo $(0, 2)$; puntos de inflexión cuando $x = 0, x = 2$.



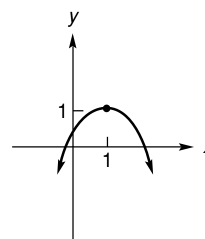
61. Intersecciones $(0, 0), \left(-\frac{27}{8}, 0\right)$; creciente en $(-\infty, -1)$, $(0, \infty)$; decreciente en $(-1, 0)$; mínimo relativo cuando $x = 0$; máximo relativo cuando $x = -1$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0), (0, \infty)$.



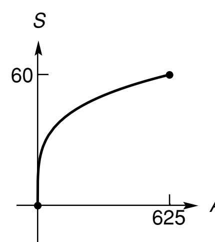
63.



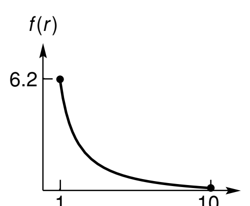
65.



69.



73. b.



c. 0.26.

75. Dos. **77.** Arriba de la recta tangente; cóncava hacia arriba. **79.** $-2.61, -0.26$.

EJERCICIO 12.4 (página 556)

1. Mínimo relativo cuando $x = \frac{5}{2}$; mínimo absoluto.

3. Máximo relativo cuando $x = \frac{1}{4}$; máximo absoluto.

5. Máximo relativo cuando $x = -3$; mínimo relativo cuando $x = 3$.

7. Mínimo relativo cuando $x = 0$; máximo relativo cuando $x = 2$.

9. La prueba falla, cuando $x = 0$ existe un mínimo relativo por la prueba de la primera derivada.

11. Máximo relativo cuando $x = -\frac{1}{3}$; mínimo relativo cuando $x = \frac{1}{3}$.

13. Mínimos relativos cuando $x = -5, -2$; máximo relativo cuando $x = -\frac{7}{2}$.

EJERCICIO 12.5 (página 564)

1. $y = 1, x = 1.$ **3.** $y = \frac{1}{2}, x = -\frac{3}{2}.$

5. $y = 0, x = 0.$ **7.** $y = 0, x = 1, x = -1.$

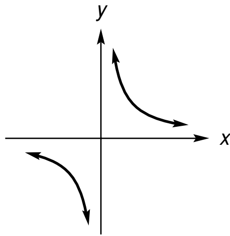
9. Ninguna. **11.** $y = 2, x = 2, x = -3.$

13. $y = -7, x = -2\sqrt{2}, x = 2\sqrt{2}.$ **15.** $y = 7, x = 6.$

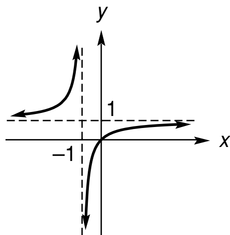
17. $x = 0, x = -1.$ **19.** $y = \frac{1}{4}, x = -\frac{1}{2}.$

21. $y = \frac{1}{2}, x = -\frac{4}{3}.$ **23.** $y = 4.$

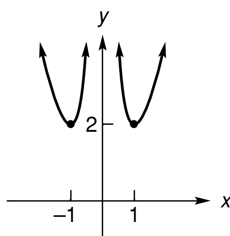
25. Decreciente $(-\infty, 0), (0, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$; cóncava hacia arriba $(0, \infty)$; simétrica con respecto al origen; asíntotas $x = 0, y = 0$.



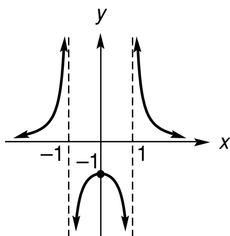
27. Intersección $(0, 0)$; creciente en $(-\infty, -1), (-1, \infty)$; cóncava hacia arriba $(-\infty, -1)$; cóncava hacia abajo $(-1, \infty)$; asíntotas $x = -1, y = 1$.



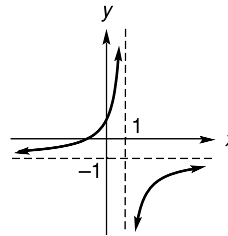
29. Decreciente en $(-\infty, -1), (0, 1)$; creciente en $(-1, 0)$, $(1, \infty)$; mínimos relativos cuando $x = \pm 1$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 0), (0, \infty)$; simétrica con respecto al eje y; asíntota $x = 0$.



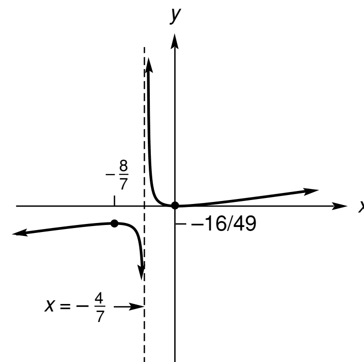
31. Intersección $(0, -1)$; creciente en $(-\infty, -1), (-1, 0)$; decreciente en $(0, 1), (1, \infty)$; máximo relativo cuando $x = 0$; cóncava hacia arriba $(-\infty, -1), (1, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-1, 1)$; asíntotas $x = 1, x = -1, y = 0$; simétrica con respecto al eje y.



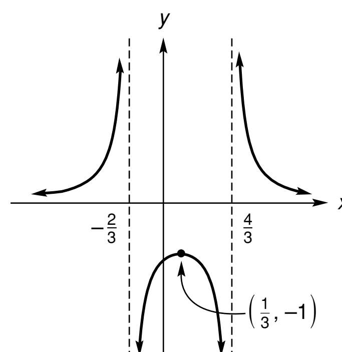
33. Intersecciones $(-1, 0), (0, 1)$; creciente en $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$; cóncava hacia arriba $(-\infty, 1)$; cóncava hacia abajo $(1, \infty)$; asíntotas $x = 1, y = -1$.



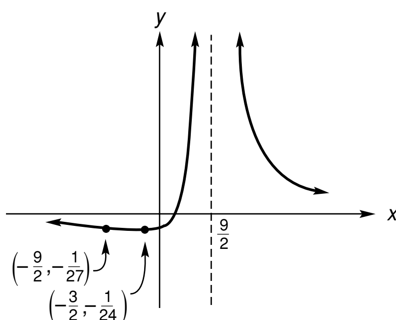
35. Intersección $(0, 0)$; creciente en $\left(-\infty, -\frac{8}{7}\right), (0, \infty)$; decreciente en $\left(-\frac{8}{7}, -\frac{4}{7}\right), \left(-\frac{4}{7}, 0\right)$; máximo relativo cuando $x = -\frac{8}{7}$; mínimo relativo cuando $x = 0$; cóncava hacia abajo $\left(-\infty, -\frac{4}{7}\right)$; cóncava hacia arriba $\left(-\frac{4}{7}, \infty\right)$; asíntotas $x = -\frac{4}{7}$.



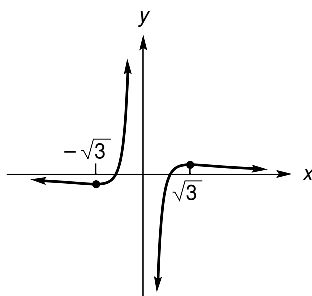
37. Intersección $\left(0, -\frac{9}{8}\right)$; creciente en $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$; decreciente en $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$; máximo relativo cuando $x = \frac{1}{3}$; cóncava hacia arriba $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$; cóncava hacia abajo $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$; asíntotas $y = 0$, $x = -\frac{2}{3}, x = \frac{4}{3}$.



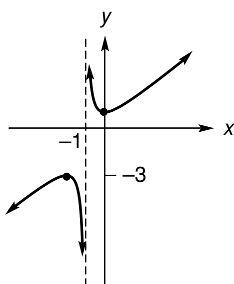
39. Intersección $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{1}{27}\right)$; decreciente en $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{9}{2}, \infty\right)$; creciente en $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$; mínimo relativo cuando $x = -\frac{3}{2}$; cóncava hacia abajo $\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right)$; cóncava hacia arriba $\left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$, $\left(\frac{9}{2}, \infty\right)$; punto de inflexión cuando $x = -\frac{9}{2}$; asíntotas $x = \frac{9}{2}$, $y = 0$.



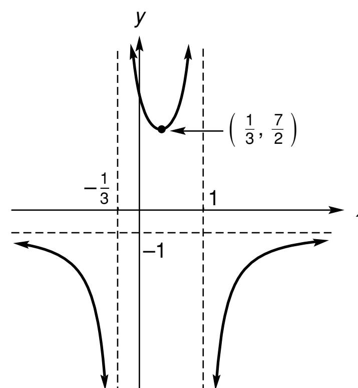
41. Intersección $(-1, 0)$, $(1, 0)$; creciente en $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$; decreciente en $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$; máximo relativo cuando $x = \sqrt{3}$; mínimo relativo cuando $x = -\sqrt{3}$; cóncava hacia abajo $(-\infty, -\sqrt{6})$, $(0, \sqrt{6})$; cóncava hacia arriba $(-\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, \infty)$; puntos de inflexión cuando $x = \pm\sqrt{6}$; asíntotas $x = 0$, $y = 0$; simétrica con respecto al origen.



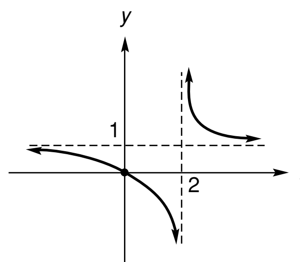
43. Intersección $(0, 1)$; creciente en $(-\infty, -2)$, $(0, \infty)$; decreciente en $(-2, -1)$, $(-1, 0)$; máximo relativo cuando $x = -2$; mínimo relativo cuando $x = 0$; cóncava hacia abajo $(-\infty, -1)$; cóncava hacia arriba $(-1, \infty)$; asíntota $x = -1$.



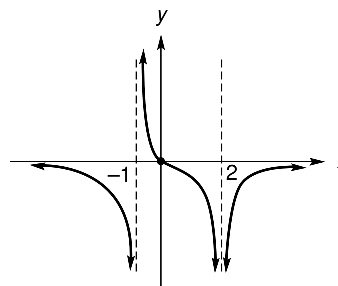
45. Intersección $(0, 5)$; decreciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; creciente en $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, $(1, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = \frac{1}{3}$; cóncava hacia abajo $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$, $(1, \infty)$; cóncava hacia arriba $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$; asíntotas $x = -\frac{1}{3}$, $x = 1$, $y = -1$.



47.



49.



55. $x \approx \pm 2.45$, $x \approx 0.67$, $y = 2$. **57.** $y \approx 0.48$.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 12 (página 567)

1. $y = 3$, $x = 4$, $x = -4$. **3.** $y = \frac{5}{9}$, $x = -\frac{2}{3}$.

5. $x = 0, 4$. **7.** $x = -\frac{15}{8}, -1$.

9. Creciente en $(1, 3)$; decreciente en $(-\infty, 1)$ y $(3, \infty)$.
11. Decreciente en $(-\infty, -\sqrt{6})$, $(0, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$; creciente en $(-\sqrt{6}, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{6}, \infty)$.
13. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; cóncava hacia abajo en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

15. Cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$; cóncava hacia arriba en $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

17. Cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right), \left(-\frac{1}{4}, \infty\right)$; cóncava hacia abajo $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

19. Máximo relativo cuando $x = 1$; mínimo relativo cuando $x = 2$. **21.** Mínimo relativo cuando $x = -1$.

23. Máximo relativo cuando $x = -\frac{2}{5}$; mínimo relativo cuando $x = 0$. **25.** En $x = 3$. **27.** En $x = 1$.

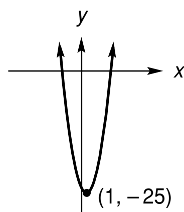
29. En $x = 2 \pm \sqrt{2}$.

31. Máximo: $f(2) = 16$; mínimo: $f(1) = -1$.

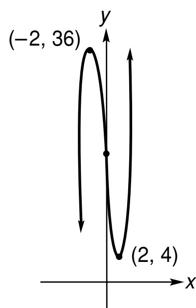
33. Máximo: $f(0) = 0$; mínimo: $f\left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{1}{120}$.

35. a. f no tiene extremos relativos.
b. f es cóncava hacia abajo en $(1, 3)$; puntos de inflexión: $(1, 2e^{-1}), (3, 10e^{-3})$.

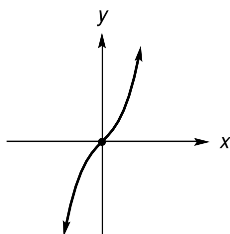
37. Intersecciones $(-4, 0), (6, 0), (0, -24)$; creciente en $(1, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 1)$; mínimo relativo cuando $x = 1$; cóncava hacia arriba $(-\infty, \infty)$.



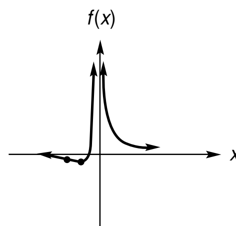
39. Intersección $(0, 20)$; creciente en $(-\infty, -2), (2, \infty)$; decreciente en $(-2, 2)$; máximo relativo cuando $x = -2$; mínimo relativo cuando $x = 2$; cóncava hacia arriba $(0, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$; punto de inflexión cuando $x = 0$.



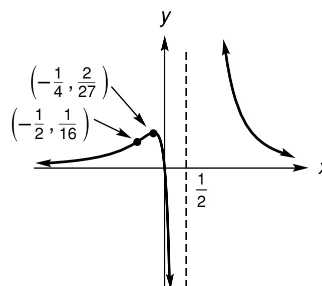
41. Intersección $(0, 0)$; creciente en $(-\infty, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$; cóncava hacia arriba $(0, \infty)$; punto de inflexión cuando $x = 0$; simétrica con respecto al origen.



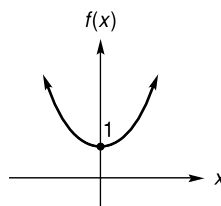
43. Intersección $(-5, 0)$; creciente en $(-10, 0)$; decreciente en $(-\infty, -10), (0, \infty)$; mínimo relativo cuando $x = -10$; cóncava hacia arriba $(-15, 0), (0, \infty)$; cóncava hacia abajo $(-\infty, -15)$; punto de inflexión cuando $x = -15$; asíntota horizontal $y = 0$; asíntota vertical $x = 0$.



45. Intersecciones $(0, 0)$; creciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$; decreciente en $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; máximo relativo cuando $x = -\frac{1}{4}$; cóncava hacia arriba $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; cóncava hacia abajo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; punto de inflexión cuando $x = -\frac{1}{2}$; asíntota horizontal $y = 0$; asíntota vertical $x = \frac{1}{2}$.



47. Intersecciones $(0, 1)$; creciente en $(0, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 0)$; mínimo relativo cuando $x = 0$; cóncava hacia arriba $(-\infty, \infty)$; simétrica con respecto al eje y.



49. a. Falso; **b.** Falso; **c.** Verdadero; **d.** Falso; **e.** Falso.
51. $q > 2$.
57. Máximo relativo $(-1.32, 12.28)$; mínimo relativo $(0.44, 1.29)$. **59.** $x = -0.60$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 12 (página 570)

1. Los datos para 1998-2000 caen en el mismo patrón que los datos para 1959-1969.

EJERCICIO 13.1 (página 582)

1. 13 y 13. **3.** 300 pies por 250 pies. **5.** 100 unidades.
7. \$15. **9. a.** 110 gramos; **b.** $51\frac{9}{11}$ gramos.
11. 525 unidades; precio = \$51; utilidad = \$10,525.
13. \$22. **15.** 120 unidades; \$86,000. **17.** 625 unidades; \$4.

19. \$17; \$86,700. **21.** 4 pies por 4 pies por 2 pies.
23. 2 pulgadas; 128 pulgadas^3.
27. 130 unidades, $p = \$340$, $P = \$36{,}980$; 125 unidades, $p = \$350$, $P = \$34{,}175$. **29.** 250 por lote (4 lotes). **31.** 35.
33. 60 mi/h. **35.** 7; \$1000.
37. $5 - \sqrt{3}$ toneladas; $5 - \sqrt{3}$ toneladas.
41. 10 cajas; \$50.55.

EJERCICIO 13.2 (página 591)

1. $3\,dx$. **3.** $\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+6}}\,dx$. **5.** $-\frac{2}{x^3}\,dx$.
7. $\frac{2x}{x^2+7}\,dx$. **9.** $3e^{2x^2+3}(12x^2+4x+3)\,dx$.
11. $\Delta y = -0.14$, $dy = -0.14$.
13. $\Delta y = -2.5$, $dy = -2.75$.
15. $\Delta y \approx 0.073$, $dy = \frac{3}{40} = 0.075$. **17. a.** -1; **b.** 2.9.
19. 9.95. **21.** $4\frac{1}{32}$. **23.** -0.03. **25.** 1.01.
27. $\frac{1}{2}$. **29.** $\frac{1}{6p(p^2+5)^2}$. **31.** $-p^2$. **33.** $\frac{1}{33}$.
35. $-\frac{4}{5}$. **37.** 44; 41.80. **39.** 2.04. **41.** 0.7.
43. $(1.69 \times 10^{-11})\pi$ cm^3. **45. c.** 42 unidades.

EJERCICIO 13.3 (página 597)

1. -3, elástica. **3.** -1, elasticidad unitaria.
5. $-\frac{53}{52}$, elástica. **7.** $-\left(\frac{150}{e} - 1\right)$, elástica.
9. -1, elasticidad unitaria. **11.** $-\frac{9}{32}$, inelástica.
13. $-\frac{1}{2}$, inelástica.
15. $|\eta| = \frac{10}{3}$ cuando $p = 10$, $|\eta| = \frac{3}{10}$ cuando $p = 3$, $|\eta| = 1$ cuando $p = 6.50$. **17.** -1.2, 0.6% disminuye.
23. b. $\eta = -2.5$, elástica; **c.** 1 unidad;
d. Aumenta, ya que la demanda es elástica.
25. a. $\eta = -\frac{207}{15} \approx -13.8$, elástica; **b.** 27.6%; **c.** Ya que la demanda es elástica, la disminución del precio tiene como resultado un aumento de los ingresos.
27. $\eta = -1.6$; $\frac{dr}{dq} = 30$.
29. Máximo en $q = 5$; mínimo en $q = 95$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 13.4

1. 43 y 1958.

EJERCICIO 13.4 (página 602)

1. 0.25410. **3.** 1.32472. **5.** -2.38769. **7.** 0.33767.
9. 1.90785. **11.** 4.141. **13.** -4.99 y 1.94.
15. 13.33. **17.** 2.880. **19.** 3.45.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 13 (página 604)

1. 20. **3.** 300. **5.** \$2800. **7.** 200 pies por 100 pies.
9. a. 200, \$120; **b.** 300.
11. $\left[\frac{x^2}{x+5} + 2x\ln(x+5)\right]dx$. **13.** $\left(\frac{9}{10}\right)^{\circ}$.
15. 0.99. **17.** $\frac{1}{8y+7}$. **19.** Elástica. **21. a.** -1.
23. a. $\frac{200}{3} < p < 100$;
b. $\eta = -\frac{1}{3}$; la demanda disminuye en aproximadamente 1.67%.
25. 0.619 y 1.512.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 13 (página 606)

1. $F = \$40$, $V = \$20$; sí. **3.** No hay diferencia.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.1

1. $\int 28.3\,dq = 28.3q + C$.
2. $\int 0.12t^2\,dt = 0.04t^3 + C$.
3. $\int -\frac{480}{t^3}\,dt = \frac{240}{t^2} + C$.
4. $\int (500 + 300\sqrt{t})dt = 500t + 200t^{3/2} + C$.
5. $S(t) = 0.7t^3 - 32.7t^2 + 491.6t + C$.

EJERCICIO 14.1 (página 616)

1. $5x + C$. **3.** $\frac{x^9}{9} + C$. **5.** $-\frac{5}{6x^6} + C$.
7. $-\frac{2}{9x^9} + C$. **9.** $-\frac{5}{6y^{6/5}} + C$. **11.** $8u + \frac{u^2}{2} + C$.
13. $\frac{y^6}{6} - \frac{5y^2}{2} + C$. **15.** $t^3 - 2t^2 + 5t + C$.
17. $(7+e)x + C$. **19.** $\frac{x^2}{14} - \frac{3x^5}{20} + C$.
21. $6e^x + C$. **23.** $\frac{x^{9.3}}{9.3} - \frac{9x^7}{7} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^2} + C$.
25. $-\frac{4x^{3/2}}{9} + C$. **27.** $2\sqrt[8]{x} + C$.
29. $\frac{x^4}{12} + \frac{3}{2x^2} + C$. **31.** $\frac{w^3}{2} + \frac{2}{3w} + C$.
33. $\frac{1}{7}(z^2 - 5z) + C$. **35.** $\frac{x^{e+1}}{e+1} + 10e^x + C$.
37. $\frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{12x^{5/4}}{5} + C$.
39. $-\frac{3x^{5/3}}{25} - 7x^{1/2} + 3x^2 + C$.
41. $\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{5x^2}{2} - 15x + C$. **43.** $\frac{2x^{5/2}}{5} + 2x^{3/2} + C$.
45. $\frac{4u^3}{3} + 2u^2 + u + C$. **47.** $\frac{2v^3}{3} + 3v + \frac{1}{2v^4} + C$.
49. $\frac{z^3}{6} + \frac{5z^2}{2} + C$. **51.** $x + e^x + C$.
53. No, $F(x) - G(x)$ debe ser una constante.
55. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.2

1. $N(t) = 800t + 200e^t + 6317.37.$
2. $y(t) = 14t^3 + 12t^2 + 11t + 3.$

EJERCICIO 14.2 (página 621)

1. $y = \frac{3x^2}{2} - 4x + 1.$ **3.** 18.

5. $y = -\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + \frac{4x}{3} + \frac{1}{12}.$

7. $y = \frac{x^4}{12} + x^2 - 5x + 13.$ **9.** $p = 0.7.$

11. $p = 275 - 0.5q - 0.1q^2.$ **13.** $c = 1.35q + 200.$

15. 7715. **17.** $G = -\frac{P^2}{50} + 2P + 20.$

21. \$80 ($dc/dq = 27.50$ cuando $q = 50$ no es relevante para el problema).

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.3

1. $T(t) = 10e^{-0.5t} + C.$ **2.** $35 \ln|t + 1| + C.$

EJERCICIO 14.3 (página 629)

1. $\frac{(x+5)^8}{8} + C.$ **3.** $\frac{(x^2+3)^6}{6} + C.$

5. $\frac{3}{5}(y^3 + 3y^2 + 1)^{5/3} + C.$ **7.** $-\frac{5(3x-1)^{-2}}{6} + C.$

9. $\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C.$ **11.** $\frac{(7x-6)^5}{35} + C.$

13. $\frac{(x^2+3)^{13}}{26} + C.$ **15.** $\frac{3}{5}(27 + x^5)^{4/3} + C.$

17. $e^{3x} + C.$ **19.** $e^{t^2+t} + C.$ **21.** $\frac{1}{14}e^{7x^2} + C.$

23. $-3e^{-2x} + C.$ **25.** $\ln|x + 5| + C.$

27. $\ln|x^3 + x^4| + C.$ **29.** $-\frac{3}{4}(z^2 - 6)^{-4} + C.$

31. $4 \ln|x| + C.$ **33.** $\frac{1}{3}\ln|s^3 + 5| + C.$

35. $-\frac{8}{3}\ln|5 - 3x| + C.$

37. $\frac{2}{15}(5x)^{3/2} + C = \frac{2\sqrt{5}}{3}x^{3/2} + C.$

39. $\sqrt{x^2 - 4} + C.$ **41.** $\frac{1}{2}e^{y^4+1} + C.$

43. $-\frac{1}{6}e^{-2v^3+1} + C.$ **45.** $-\frac{1}{5}e^{-5x} + 2e^x + C.$

47. $-\frac{1}{24}(3 - 3x^2 - 6x)^4 + C.$ **49.** $\frac{1}{3}\ln|x^3 + 6x| + C.$

51. $2\ln|3 - 2s + 4s^2| + C.$ **53.** $\frac{1}{4}\ln(2x^2 + 1) + C.$

55. $\frac{1}{27}(x^3 - x^6)^{-9} + C.$ **57.** $\frac{1}{4}(x^4 + x^2)^2 + C.$

59. $\frac{1}{2}(4 - 9x - 3x^2)^{-4} + C.$ **61.** $\frac{1}{6}e^{4x^3+3x^2-4} + C.$

63. $-\frac{1}{25}(8 - 5x^2)^{5/2} + C.$

65. $\frac{(2x)^{3/2}}{3} - \sqrt{2x} + C = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - \sqrt{2}x^{1/2} + C.$

67. $\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C.$

69. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \frac{1}{6(x^6+1)} + C.$

71. $\frac{1}{3}\ln|3x - 5| + \frac{1}{27}(x^3 - x^6)^{-9} + C.$

73. $\frac{2}{9}(3x + 1)^{3/2} - \ln\sqrt{x^2 + 3} + C.$ **75.** $2e^{\sqrt{x}} + C.$

77. $-\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}e^x + C.$ **79.** $\frac{1}{4}\ln^2(x^2 + 2x) + C.$

81. $y = -\frac{1}{6}(3 - 2x)^3 + \frac{11}{2}.$

83. $y = -\ln|x| = \ln|1/x|.$ **85.** $160e^{0.05t} + 190.$

87. $\frac{Rr^2}{4K} + B_1 \ln|r| + B_2.$

EJERCICIO 14.4 (página 635)

1. $x^2 + 3x - \ln|x| + C.$ **3.** $\frac{1}{3}(2x^3 + 4x + 1)^{3/2} + C.$

5. $-6\sqrt{4 - 5x} + C.$ **7.** $\frac{4^{7x}}{7\ln 4} + C.$

9. $7x^2 - 4e^{(1/4)x^2} + C.$

11. $x^2 - 3x + \frac{2}{3}\ln|3x - 1| + C.$

13. $\frac{3}{2}\ln(e^{2x} + 1) + C.$ **15.** $-\frac{1}{7}e^{7/x} + C.$

17. $x^2 + 4\ln|x^2 - 4| + C.$ **19.** $\frac{2}{9}(\sqrt{x} + 2)^3 + C.$

21. $3(x^{1/3} + 2)^5 + C.$ **23.** $\frac{1}{2}(\ln^2 x) + C.$

25. $\frac{1}{3}\ln^3(r + 1) + C.$ **27.** $\frac{3^{\ln x}}{\ln 3} + C.$

29. $e^{(x^2+3)/2} + C.$ **31.** $8\ln|\ln(x + 3)| + C.$

33. $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x^2 - 3| + C.$

35. $\ln^{3/2}[(x^2 + 1)^2] + C.$

37. $\frac{1}{2}\sqrt{x^4 - 1} - (\ln 4)x + C.$

39. $x^2 - 8x - 6\ln|x| - \frac{2}{x^2} + C.$

41. $x + \ln|x - 1| + C.$ **43.** $\sqrt{e^{x^2} + 2} + C.$

45. $-\frac{(e^{-x} + 6)^3}{3} + C.$ **47.** $\frac{1}{5}(x^2 + e)^{5/2} + C.$

49. $\frac{1}{36\sqrt{2}}[(8x)^{3/2} + 3]^{3/2} + C.$

51. $-\frac{2}{3}e^{-\sqrt{s^3}} + C.$ **53.** $\frac{x^2}{2} + 2x + C.$

55. $\frac{\ln^2 x}{2} + x + C.$ **57.** $p = \frac{100}{q + 2}.$

59. $c = 20\ln|(q + 5)/5| + 2000.$

61. $C = 2(\sqrt{I} + 1).$ **63.** $C = \frac{3}{4}I - \frac{1}{3}\sqrt{I} + \frac{71}{12}.$

65. a. \$150 por unidad; **b.** \$15,000; **c.** \$15,300.
67. $2500 - 800\sqrt{5} \approx$ \$711 por acre. **69.** $I = 3$.

EJERCICIO 14.5 (página 640)

1. 35. **3.** 0. **5.** 25. **7.** $-\frac{3}{16}$. **9.** $-\frac{7}{6}$.

11. $\sum_{k=1}^{19} k$. **13.** $\sum_{k=1}^{4} (2k - 1)$. **15.** $\sum_{k=1}^{10} k^2$.
17. 101,475. **19.** 84. **21.** 273. **23.** 8; \$850.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.6

1. \$5975.

EJERCICIO 14.6 (página 648)

1. $\frac{2}{3}$ unidades cuadradas. **3.** $\frac{14}{27}$ unidades cuadradas.

5. $S_n = \frac{1}{n}\left[4\left(\frac{1}{n}\right) + 4\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + 4\left(\frac{n}{n}\right)\right] = \frac{2(n+1)}{n}$.

7. a. $S_n = \frac{n+1}{2n} + 1$; **b.** $\frac{3}{2}$. **9.** $\frac{1}{2}$ unidades cuadradas.

11. $\frac{1}{3}$ unidades cuadradas. **13.** $\frac{16}{3}$ unidades cuadradas.

15. 6. **17.** -18. **19.** $\frac{5}{6}$. **21.** 0. **23.** $\frac{11}{4}$.
25. 4.3 unidades cuadradas. **27.** 2.4. **29.** -25.5.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 14.7

1. \$32,830. **2.** \$28,750.

EJERCICIO 14.7 (página 657)

1. 14. **3.** $\frac{15}{2}$. **5.** -20. **7.** $\frac{7}{3}$. **9.** $\frac{15}{2}$.

11. $-\frac{7}{6}$. **13.** 0. **15.** $\frac{5}{3}$. **17.** $\frac{32}{3}$. **19.** $-\frac{1}{6}$.

21. $4 \ln 8$. **23.** e^5. **25.** $\frac{1}{3}(e^8 - 1)$. **27.** $\frac{3}{4}$.

29. $\frac{38}{9}$. **31.** $\frac{15}{28}$. **33.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **35.** $e + \frac{1}{2e^2} - \frac{3}{2}$.

37. $3 - \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2}$. **39.** $\frac{e^3}{2}(e^{12} - 1)$. **41.** $6 + \ln 19$.

43. $\frac{47}{12}$. **45.** $6 - 3e$. **47.** 7. **49.** 0. **51.** $\alpha^{5/2}T$.

53. $\int_b^a -Ax^{-B}dx$. **55.** \$8639. **57.** 1,973,333.
59. \$220. **61.** \$2000. **63.** 696; 492. **65.** $2Ri$.
69. 0.05. **71.** 3.52. **73.** 55.39.

EJERCICIO 14.8 (página 663)

En los problemas del **1** *al* **33** *se supone que las respuestas están expresadas en unidades cuadradas.*

1. 8. **3.** $\frac{19}{2}$. **5.** 8. **7.** $\frac{19}{3}$. **9.** 9. **11.** $\frac{50}{3}$.

13. 36. **15.** 8. **17.** $\frac{32}{3}$. **19.** 1. **21.** 18.

23. $\frac{26}{3}$. **25.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$. **27.** $e^2 - 1$.

29. $\frac{3}{2} + 2\ln 2 = \frac{3}{2} + \ln 4$. **31.** 68. **33.** 2.

35. 19 unidades cuadradas. **37. a.** $\frac{1}{16}$; **b.** $\frac{3}{4}$; **c.** $\frac{7}{16}$.

39. a. $\ln\frac{5}{3}$; **b.** $\ln(4) - 1$; **c.** $2 - \ln 3$.
41. 1.89 unidades cuadradas.
43. 11.41 unidades cuadradas.

EJERCICIO 14.9 (página 670)

1. Área $= \int_{-2}^{3}[(x + 6) - x^2]dx$.

3. Área $=$
$$\int_0^3[2x - (x^2 - x)]dx + \int_3^4[(x^2 - x) - 2x]dx.$$

5. Área $= \int_0^1[(y + 1) - \sqrt{1 - y}]dy$.

7. Área $= \int_{-\sqrt{5}}^{2}[(11 - 2x^2) - (x^2 - 4)]dx$.

En los problemas del **9** *al* **33** *se supone que las respuestas están expresadas en unidades cuadradas.*

9. $\frac{4}{3}$. **11.** $\frac{16}{3}$. **13.** $8\sqrt{6}$. **15.** 40. **17.** $\frac{125}{6}$.

19. $\frac{9}{2}$. **21.** $\frac{125}{12}$. **23.** $\frac{32}{81}$. **25.** $\frac{44}{3}$.

27. $\frac{4}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$. **29.** $\frac{1}{2}$. **31.** $\frac{255}{32} - 4\ln 2$.

33. 12. **35.** $\frac{20}{63}$. **37.** $\frac{8}{3m^3}$ unidades cuadradas.
39. $2^{4/3}$. **41.** 4.76 unidades cuadradas.
43. 7.26 unidades cuadradas.

EJERCICIO 14.10 (página 674)

1. EC $= 25.6$, EP $= 38.4$.
3. EC $= 50\ln(2) - 25$, EP $= 1.25$.
5. EC $= 800$, EP $= 1000$. **7.** \$426.67. **9.** \$254,000.
11. EC ≈ 1197, EP ≈ 477.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 14 (página 677)

1. $\frac{x^4}{4} + x^2 - 7x + C$. **3.** $\frac{117}{2}$.

5. $-3(x + 5)^{-2} + C$. **7.** $2\ln|x^3 - 6x + 1| + C$.

9. $\frac{11\sqrt[3]{11}}{4} - 4$. **11.** $\frac{y^4}{4} + \frac{2y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + C$.

13. $\frac{4z^{3/4}}{3} - \frac{6z^{5/6}}{5} + C$. **15.** $\frac{1}{3}\ln\frac{10}{3}$.

17. $\frac{2}{27}(3x^3 + 2)^{3/2} + C$. **19.** $\frac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y}) + C$.

21. $\ln|x| - \frac{2}{x} + C$. **23.** 111. **25.** $\frac{7}{3}$.

27. $4 - 3\sqrt[3]{2}$. **29.** $\frac{3}{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$. **31.** $\frac{3}{2} - 5\ln 2$.

33. $4(x^{3/2} + 1)^{3/2} + C$. **35.** 1. **37.** $\frac{(1 + e^{3x})^3}{9} + C$.

39. $\frac{2\sqrt{10^{3x}}}{\ln 10} + C$. **41.** $y = \frac{1}{2}e^{2x} + 3x - 1$.

En los problemas del **43** *al* **57** *se supone que las respuestas están expresadas en unidades cuadradas.*

43. $\frac{4}{3}$. **45.** $\frac{16}{3}$. **47.** $\frac{125}{6}$. **49.** $6 + \ln 3$. **51.** $\frac{2}{3}$.

53. 36. **55.** $\frac{125}{3}$. **57.** $e - 1$.

59. $p = 100 - \sqrt{2q}$. **61.** \$1900. **63.** 0.5507.

65. 15 unidades cuadradas. **67.** $\text{EC} = 166\frac{2}{3}$, $\text{EP} = 53\frac{1}{3}$.

73. 24.71 unidades cuadradas. **75.** $\text{EC} \approx 1148$, $\text{EP} \approx 251$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 14 (página 680)

1. a. 225; **b.** 125.
3. a. \$2,002,500; **b.** 18,000; **c.** \$111.25.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 15.1

1. $S(t) = -40te^{0.1t} + 400e^{0.1t} + 4600$.
2. $P(t) = 0.025t^2 - 0.05t^2 \ln t + 0.05t^2(\ln t)^2 + C$.

EJERCICIO 15.1 (página 688)

1. $\frac{2}{3}x(x+5)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+5)^{5/2} + C$.

3. $-e^{-x}(x+1) + C$. **5.** $\frac{y^4}{4}\left[\ln(y) - \frac{1}{4}\right] + C$.

7. $x[\ln(4x) - 1] + C$.

9. $10x(x+1)^{3/2} - 4(x+1)^{5/2} + C = 2(x+1)^{3/2}(3x-2) + C$.

11. $-\frac{x}{2(2x+1)} + \frac{1}{4}\ln|2x+1| + C$.

13. $-\frac{1}{x}(1 + \ln x) + C$. **15.** $e^2(3e^2 - 1)$.

17. $\frac{1}{2}(1 - e^{-1})$, no se necesita integración por partes.

19. $2(9\sqrt{3} - 10\sqrt{2})$.

21. $2x(x-1)\ln(x-1) - x^2 + C$.

23. $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.

25. $\frac{x^3}{3} + 2e^{-x}(x+1) - \frac{e^{-2x}}{2} + C$.

27. $\frac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 1) + C$.

29. $\frac{2^{2x-1}}{\ln 2} + \frac{2^{x+1}x}{\ln 2} - \frac{2^{x+1}}{\ln^2 2} + \frac{x^3}{3} + C$.

31. $2e^3 + 1$ unidades cuadradas.

33. $\frac{298}{15}$ unidades cuadradas.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 15.2

1. $r(q) = \frac{5}{2}\ln\left|\frac{3(q+1)^3}{q+3}\right|$.
2. $V(t) = 150t^2 - 900\ln(t^2 + 6) + C$.

EJERCICIO 15.2 (página 695)

1. $\frac{12}{x+6} - \frac{2}{x+1}$. **3.** $1 + \frac{2}{x+2} - \frac{8}{x+4}$.

5. $\frac{4}{x+1} - \frac{9}{(x+1)^2}$. **7.** $\frac{3}{x} - \frac{2x}{x^2+1}$.

9. $2\ln|x| + 3\ln|x-1| + C = \ln|x^2(x-1)^3| + C$.

11. $-3\ln|x+1| + 4\ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{(x-2)^4}{(x+1)^3}\right| + C$.

13. $\frac{1}{4}\left[\frac{3x^2}{2} + 2\ln|x-1| - 2\ln|x+1|\right] + C = \frac{1}{4}\left(\frac{3x^2}{2} + \ln\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2\right) + C$.

15. $\ln|x| + 2\ln|x-4| - 3\ln|x+3| + C = \ln\left|\frac{x(x-4)^2}{(x+3)^3}\right| + C$.

17. $\ln|x^6 + 2x^4 - x^2 - 2| + C$, no se requiere de fracciones parciales.

19. $\frac{4}{x-2} - 5\ln|x-1| + 7\ln|x-2| + C = \frac{4}{x-2} + \ln\left|\frac{(x-2)^7}{(x-1)^5}\right| + C$.

21. $4\ln|x| - \ln(x^2+4) + C = \ln\left[\frac{x^4}{x^2+4}\right] + C$.

23. $-\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{2}{x-3} + C$.

25. $5\ln(x^2+1) + 2\ln(x^2+2) + C = \ln[(x^2+1)^5(x^2+2)^2] + C$.

27. $\frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + C$.

29. $18\ln(4) - 10\ln(5) - 8\ln(3)$.

31. $11 + 24\ln\frac{2}{3}$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 15.3 (página 701)

1. $\frac{x}{9\sqrt{9-x^2}} + C$. **3.** $-\frac{\sqrt{16x^2+3}}{3x} + C$.

5. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x}{6+7x}\right| + C$. **7.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\right| + C$.

9. $\frac{1}{2}\left[\frac{4}{5}\ln|4+5x| - \frac{2}{3}\ln|2+3x|\right] + C$.

11. $\frac{1}{8}(2x - \ln[4 + 3e^{2x}]) + C$.

13. $2\left[\frac{1}{1+x} + \ln\left|\frac{x}{1+x}\right|\right] + C$. **15.** $1 + \ln\frac{4}{9}$.

17. $\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-3} - 3\ln|x + \sqrt{x^2-3}|) + C$.

19. $\frac{1}{144}$. **21.** $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.

23. $2\left(-\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x} + \ln|2x + \sqrt{4x^2+1}|\right) + C$.

25. $\frac{1}{9}\left(\ln|1+3x| + \frac{1}{1+3x}\right) + C$.

27. $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}x}{\sqrt{7}-\sqrt{5}x}\right|\right) + C$.

29. $\frac{4}{81}\left[\frac{(3x)^6 \ln(3x)}{6} - \frac{(3x)^6}{36}\right] + C$

$= x^6[6 \ln(3x) - 1] + C.$

31. $4(9x - 2)(1 + 3x)^{3/2} + C.$

33. $\frac{1}{2}\ln|2x + \sqrt{4x^2 - 13}| + C.$

35. $-\frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{9x} + C.$

37. $\frac{1}{2\pi}(4\sqrt{x} - \ln|\pi + 7e^{4\sqrt{x}}|) + C.$

39. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C.$ **41.** $(2x^2 + 1)^{3/2} + C.$

43. $\ln\left|\frac{x - 3}{x - 2}\right| + C.$ **45.** $\frac{x^4}{4}\left[\ln(x) - \frac{1}{4}\right] + C.$

47. $e^{2x}(2x - 1) + C.$

49. $x(\ln x)^2 - 2x\ln(x) + 2x + C.$

51. $\frac{2}{3}(9\sqrt{3} - 10\sqrt{2}).$ **53.** $2(2\sqrt{2} - \sqrt{7}).$

55. $\frac{7}{2}\ln(2) - \frac{3}{4}.$ **57.** $\ln\left|\frac{q_n(1 - q_0)}{q_0(1 - q_n)}\right|.$

59. **a.** $37,599; **b.** $4924. **61.** **a.** $5481; **b.** $535.

EJERCICIO 15.4 (página 704)

1. $\frac{16}{3}.$ **3.** $-1.$ **5.** 0. **7.** 13. **9.** $12,400.

11. $3155.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 15.5

1. 76.90 pies. **2.** 5.77 gramos.

EJERCICIO 15.5 (página 709)

1. 413. **3.** 0.340; $\frac{1}{3} \approx 0.333.$ **5.** 1.388; $\ln 4 \approx 1.386.$

7. 0.883. **9.** 2,361,375. **11.** 3.0 unidades cuadradas.

13. $\frac{8}{3}.$ **15.** 0.771. **17.** $\frac{35}{6}$ km^2.

19. **a.** $29,750; **b.** $36,600; **c.** $5350.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 15.6

1. $I = I_0 e^{-0.0085x}.$

EJERCICIO 15.6 (página 716)

1. $y = -\frac{1}{x^2 + C}.$ **3.** $y = (x^2 + 1)^{3/2} + C.$

5. $y = Ce^x, C > 0.$ **7.** $y = Cx, C > 0.$

9. $y = \sqrt{2x}.$ **11.** $y = \ln\frac{x^3 + 3}{3}.$

13. $y = \frac{4x^2 + 3}{2(x^2 + 1)}.$ **15.** $y = \sqrt{\left(\frac{3x^2}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 - 1}.$

17. $y = \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3}\right).$ **19.** $c = (q + 1)e^{1/(q+1)}.$

21. 46 semanas.

23. $N = 40{,}000e^{0.018t}$; $N = 40{,}000(1.2)^{t/10}$; 57,600.

25. $2e^{1.08124}$ miles de millones. **27.** 0.01204; 57.57 segundos.

29. 2900 años. **31.** $N = N_0 e^{k(t - t_0)}, t \geq t_0.$

33. 12.6 unidades. **35.** $A = 400(1 - e^{-t/2})$, 157 gramos.

37. **a.** $V = 21{,}000e^{(2\ln 0.9)t}$; **b.** Junio de 2002.

EJERCICIO 15.7 (página 724)

1. 58,800. **3.** 860,000. **5.** 1990. **7.** **b.** 375.

9. 1:06 A.M. **11.** $62,500.

13. $N = M - (M - N_0)e^{-kt}.$

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 15.8

1. 20 ml.

EJERCICIO 15.8 (página 729)

1. $\frac{1}{3}.$ **3.** Div. **5.** $\frac{1}{e}.$ **7.** Div. **9.** $-\frac{1}{2}.$ **11.** 0.

13. **a.** 800; **b.** $\frac{2}{3}.$ **15.** 4,000,000.

17. $\frac{1}{2}$ unidad cuadrada.

19. 20,000 de aumento.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 15 (página 732)

1. $\frac{x^2}{4}[2\ln(x) - 1] + C.$ **3.** $5 + \frac{9}{4}\ln 3.$

5. $9\ln|3 + x| - 2\ln|2 + 3x| + C.$

7. $\frac{1}{2(x + 2)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x + 2}\right| + C.$

9. $-\frac{\sqrt{9 - 16x^2}}{9x} + C.$ **11.** $\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x - 3}{x + 3}\right| + C.$

13. $e^{7x}(7x - 1) + C.$ **15.** $\frac{1}{2}\ln|\ln 2x| + C.$

17. $x - \frac{3}{2}\ln|3 + 2x| + C.$

19. $2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln(x^2 + 1) + C.$

21. $2\sqrt{x + 1}[\ln(x + 1) - 2] + C.$ **23.** 34.

25. **a.** 1.405; **b.** 1.388. **27.** $y = Ce^{x^3 + x^2}, C > 0.$

29. $\frac{1}{18}.$ **31.** Div. **33.** 144,000. **35.** 0.0005; 90%.

37. $N = \frac{450}{1 + 224e^{-1.02t}}.$ **39.** 4:16 P.M. **41.** 1.

43. **a.** 207, 208; **b.** 157, 165; **c.** 41, 41.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 15 (página 734)

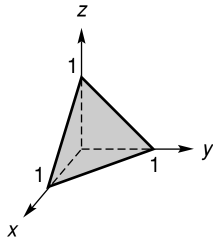
1. 114; 69. **5.** Las respuestas pueden variar.

PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 16.1

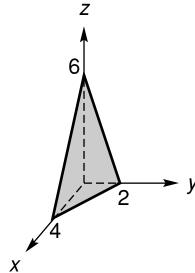
1. **a.** $3260; **b.** $4410.

EJERCICIO 16.1 (página 743)

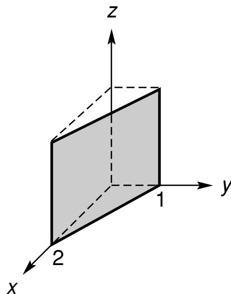
1. 3. **3.** −2. **5.** −1. **7.** 88. **9.** 3.
11. $2x_0 + 2h - 5y_0 + 4$. **13.** 2000. **15.** $y = -4$.
17. $z = 6$.
19.



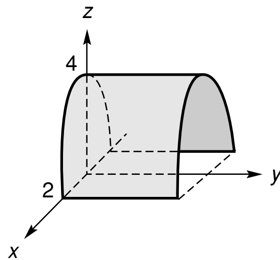
21.



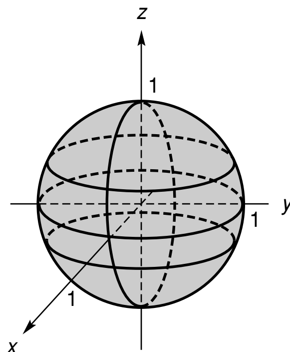
23.



25.



27.



EJERCICIO 16.2 (página 749)

1. $f_x(x, y) = 8x; f_y(x, y) = 6y$.
3. $f_x(x, y) = 0; f_y(x, y) = 2$.
5. $g_x(x, y) = 3x^2y^2 + 4xy - 4y;$
$g_y(x, y) = 2x^3y + 2x^2 - 4x + 3$.
7. $g_p(p, q) = \dfrac{q}{2\sqrt{pq}}; g_q(p, q) = \dfrac{p}{2\sqrt{pq}}$.
9. $h_s(s, t) = \dfrac{2s}{t-3}; h_t(s, t) = -\dfrac{s^2+4}{(t-3)^2}$.
11. $u_{q_1}(q_1, q_2) = \dfrac{3}{4q_1}; u_{q_2}(q_1, q_2) = \dfrac{1}{4q_2}$.
13. $h_x(x, y) = (x^3 + xy^2 + 3y^3)(x^2 + y^2)^{-3/2};$
$h_y(x, y) = (3x^3 + x^2y + y^3)(x^2 + y^2)^{-3/2}$.
15. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5ye^{5xy}; \dfrac{\partial z}{\partial y} = 5xe^{5xy}$.
17. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5\left[\dfrac{2x^2}{x^2+y} + \ln(x^2+y)\right]; \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{5x}{x^2+y}$.
19. $f_r(r, s) = \sqrt{r+2s}\,(3r^2 - 2s) + \dfrac{r^3 - 2rs + s^2}{2\sqrt{r+2s}};$
$f_s(r, s) = 2(s - r)\sqrt{r+2s} + \dfrac{r^3 - 2rs + s^2}{\sqrt{r+2s}}$.
21. $f_r(r, s) = -e^{3-r}\ln(7 - s); f_s(r, s) = \dfrac{e^{3-r}}{s-7}$.
23. $g_x(x, y, z) = 6xy + 2y^2z; g_y(x, y, z) = 3x^2 + 4xyz;$
$g_z(x, y, z) = 2xy^2 + 9z^2$.
25. $g_r(r, s, t) = 2re^{s+t};$
$g_s(r, s, t) = (7s^3 + 21s^2 + r^2)e^{s+t};$
$g_t(r, s, t) = e^{s+t}(r^2 + 7s^3)$.
27. 50. **29.** $\dfrac{1}{\sqrt{14}}$. **31.** 0. **33.** 26.
39. $-\dfrac{ra}{2\left[1 + a\dfrac{n-1}{2}\right]^2}$.

EJERCICIO 16.3 (página 755)

1. 20. **3.** 1374.5.
5. $\dfrac{\partial P}{\partial k} = 1.208648l^{0.192}k^{-0.236}; \dfrac{\partial P}{\partial l} = 0.303744l^{-0.808}k^{0.764}$.
7. $\dfrac{\partial q_A}{\partial p_A} = -50; \dfrac{\partial q_A}{\partial p_B} = 2; \dfrac{\partial q_B}{\partial p_A} = 4; \dfrac{\partial q_B}{\partial p_B} = -20;$
competitivos .

9. $\dfrac{\partial q_A}{\partial p_A} = -\dfrac{100}{p_A^2 p_B^{1/2}}; \dfrac{\partial q_A}{\partial p_B} = -\dfrac{50}{p_A p_B^{3/2}};$
$\dfrac{\partial q_B}{\partial p_A} = -\dfrac{500}{3p_B p_A^{4/3}}; \dfrac{\partial q_B}{\partial p_B} = -\dfrac{500}{p_B^2 p_A^{1/3}}$; complementarios.
11. $\dfrac{\partial P}{\partial B} = 0.01A^{0.27}B^{-0.99}C^{0.01}D^{0.23}E^{0.09}F^{0.27};$
$\dfrac{\partial P}{\partial C} = 0.01A^{0.27}B^{0.01}C^{-0.99}D^{0.23}E^{0.09}F^{0.27}$.
13. 4480; si un gerente con grado de MAN tiene un año adicional de experiencia en el trabajo antes del grado, el gerente recibiría $4480 por año adicionales de compensación.
15. **a.** −1.015; −0.846;
b. Uno para el cual $w = w_0$ y $s = s_0$.
17. $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{1}{V_F} > 0$ para $V_F > 0$. Así, si x aumenta y V_F y V_S están fijas, entonces g aumenta.

19. **a.** Cuando $p_A = 8$ y $p_B = 64$, $\frac{\partial q_A}{\partial p_A} = -5$ y $\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = \frac{15}{32}$; **b.** La demanda de A disminuye en aproximadamente $\frac{15}{8}$ unidades.

21. **a.** No; **b.** 70%. **23.** $\eta_{p_A} = -\frac{5}{46}$, $\eta_{p_B} = \frac{1}{46}$.

25. $\eta_{p_A} = -1$, $\eta_{p_B} = -\frac{1}{2}$.

EJERCICIO 16.4 (página 760)

1. $-\frac{x}{z}$. **3.** $\frac{4y}{3z^2}$. **5.** $\frac{x(yz^2+1)}{z(1-x^2y)}$. **7.** $-e^{y-z}$.
9. $\frac{yz}{9+z}$. **11.** $-\frac{3x}{z}$. **13.** $-\frac{9}{10}$. **15.** $-\frac{4}{e^2}$.
17. 4. **19.** $\frac{5}{2}$.
21. **a.** 36; **b.** Con respecto a q_A, $\frac{60}{13}$; con respecto a q_B, $\frac{288}{65}$.

EJERCICIO 16.5 (página 763)

1. $8xy$; $8x$. **3.** 3; 0; 0.
5. $18xe^{2xy}$; $18e^{2xy}(2xy+1)$; $72x(1+xy)e^{2xy}$.
7. $3x^2y + 4xy^2 + y^3$; $3xy^2 + 4x^2y + x^3$; $6xy + 4y^2$; $6xy + 4x^2$. **9.** $x(x^2+y^2)^{-1/2}$; $y^2(x^2+y^2)^{-3/2}$.
11. 0. **13.** 28,758. **15.** $2e$.
17. $-\frac{1}{8}$. **23.** $-\frac{y^2+z^2}{z^3} = -\frac{3x^2}{z^3}$.

EJERCICIO 16.6 (página 767)

1. $\frac{\partial z}{\partial r} = 13$; $\frac{\partial z}{\partial s} = 9$. **3.** $\left[2t + \frac{3\sqrt{t}}{2}\right]e^{x+y}$.
5. $5(2xz^2 + yz) + 2(xz + z^2) - (2x^2z + xy + 2yz)$.
7. $3(x^2 + xy^2)^2(2x + y^2 + 16xy)$.
9. $-2s(2x + yz) + r(xz + 3y^2z^2) - 5(xy + 2y^3z)$.
11. $19s(2x - 7)$. **13.** 324. **15.** -1.
17. Cuando $p_A = 25$ y $p_B = 4$, $\frac{\partial c}{\partial p_A} = -\frac{1}{4}$ y $\frac{\partial c}{\partial p_B} = \frac{5}{4}$.
19. **a.** $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$; **b.** -15.

EJERCICIO 16.7 (página 775)

1. $\left(\frac{14}{3}, -\frac{13}{3}\right)$. **3.** $(2, 5)$, $(2, -6)$, $(-1, 5)$, $(-1, -6)$.
5. $(50, 150, 350)$. **7.** $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$, mínimo relativo.
9. $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, máximo relativo.
11. $(1, 1)$, mínimo relativo; $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, ninguno.
13. $(0, 0)$, máximo relativo; $\left(4, \frac{1}{2}\right)$, mínimo relativo; $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $(4, 0)$, ninguno.
15. $(122, 127)$, máximo relativo.
17. $(-1, -1)$, mínimo relativo.
19. $(0, -2)$, $(0, 2)$, ninguno. **21.** $l = 24$, $k = 14$.
23. $p_A = 80$, $p_B = 85$.
25. $q_A = 48$, $q_B = 40$, $p_A = 52$, $p_B = 44$, utilidad $= 3304$.
27. $q_A = 3$, $q_B = 2$. **29.** 1 pie por 2 pies por 3 pies.
31. $\left(\frac{105}{37}, \frac{28}{37}\right)$, mínimo relativo. **33.** $a = -8$, $b = -12$, $d = 33$.

35. **a.** 2 unidades de A y 3 unidades de B; **b.** El precio de venta para A es 30 y el precio de venta para B es 19. La utilidad máxima relativa es 25.
37. **a.** $P = 5T(1 - e^{-x}) - 20x - 0.1T^2$; **c.** Máximo relativo en $(20, \ln 5)$; no hay extremo relativo en $\left(5, \ln\frac{5}{4}\right)$.

EJERCICIO 16.8 (página 784)

1. $(2, -2)$. **3.** $\left(3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. **5.** $\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)$.
7. $(6, 3, 2)$. **9.** $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$. **11.** $(3, 3, 6)$.
13. Planta 1, 40 unidades; planta 2, 60 unidades.
15. 74 unidades (cuando $l = 8$, $k = 7$).
17. $15,000 en publicidad en periódicos y $45,000 en publicidad en televisión.
19. $x = 5$, $y = 15$, $z = 5$.
21. $x = 12$, $y = 8$. **23.** $x = 10$, $y = 20$, $z = 5$.

EJERCICIO 16.9 (página 791)

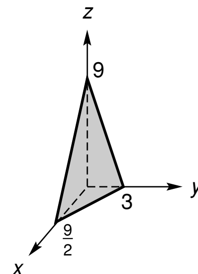
1. $\hat{y} = 0.98 + 0.61x$; 3.12. **3.** $\hat{y} = 0.057 + 1.67x$; 5.90.
5. $\hat{q} = 82.6 - 0.641p$. **7.** $\hat{y} = 100 + 0.13x$; 105.2.
9. $\hat{y} = 8.5 + 2.5x$.
11. **a.** $\hat{y} = 35.9 - 2.5x$; **b.** $\hat{y} = 28.4 - 2.5x$.

EJERCICIO 16.11 (página 798)

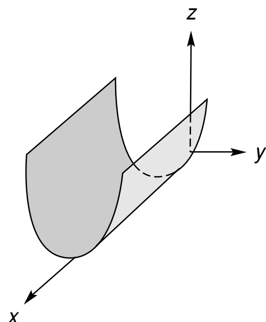
1. 18. **3.** $\frac{1}{4}$. **5.** $\frac{2}{3}$. **7.** 3. **9.** 324. **11.** $-\frac{58}{5}$.
13. $\frac{8}{3}$. **15.** -1. **17.** $\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$. **19.** $-\frac{27}{4}$.
21. $\frac{1}{24}$. **23.** $e^{-4} - e^{-2} - e^{-3} + e^{-1}$. **25.** $\frac{3}{8}$.

PROBLEMAS DE REPASO—CAPÍTULO 16 (página 801)

1.



3.



5. $8x + 6y; 6x + 2y$. **7.** $\frac{y}{(x+y)^2}; -\frac{x}{(x+y)^2}$.

9. $\frac{y}{x^2+y^2}$. **11.** $2xze^{x^2yz}(1 + x^2yz)$. **13.** $2(x + y)$.

15. $xze^{yz}\ln z; \frac{e^{yz}}{z} + ye^{yz}\ln z = e^{yz}\left(\frac{1}{z} + y\ln z\right)$.

17. $\frac{1}{64}$. **19.** $2(x + y)e^r + 2\left(\frac{x+3y}{r+s}\right); 2\left(\frac{x+3y}{r+s}\right)$.

21. $\frac{2x+2y+z}{4z-x}$. **23.** $\frac{\partial P}{\partial l} = 14l^{-0.3}k^{0.3}; \frac{\partial P}{\partial k} = 6l^{0.7}k^{-0.7}$.

25. Competitivos. **27.** (2, 2), mínimo relativo.

29. 4 pies por 4 pies por 2 pies.

31. A, 89 centavos por libra; B, 94 centavos por libra.

33. (3, 2, 1). **35.** $\hat{y} = 12.67 + 3.29x$.

37. 8. **39.** $\frac{1}{30}$.

APLICACIÓN PRÁCTICA—CAPÍTULO 16 (página 803)

1. $y = 9.50e^{-0.22399x} + 5$. **3.** $T = 79e^{-0.01113t} + 45$.

ÍNDICE

Relaciones de negocios

Interés = (capital)(tasa)(tiempo)

Costo total = costo variable + costo fijo

Costo promedio por unidad = $\dfrac{\text{costo total}}{\text{cantidad}}$

Ingreso total = (precio por unidad)(número de unidades vendidas)

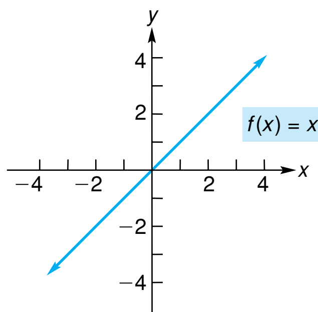
Utilidad = ingreso total − costo total

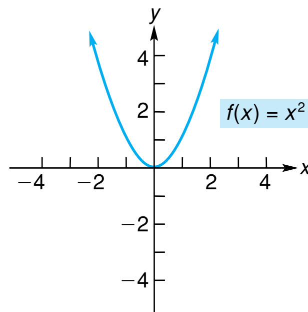
Fórmulas de anualidades ordinarias

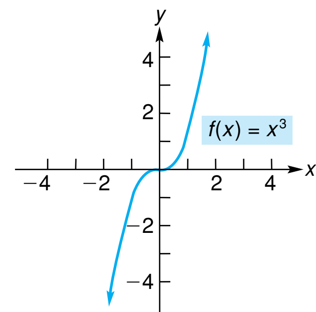
$$A = R\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = Ra_{\overline{n}|r} \qquad \text{(valor presente)}$$

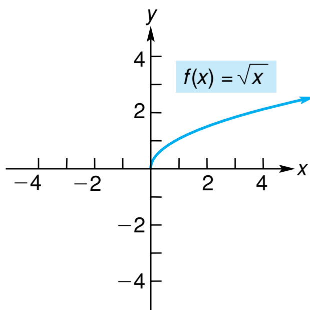
$$S = R\frac{(1+r)^{n}-1}{r} = Rs_{\overline{n}|r} \qquad \text{(valor futuro)}$$

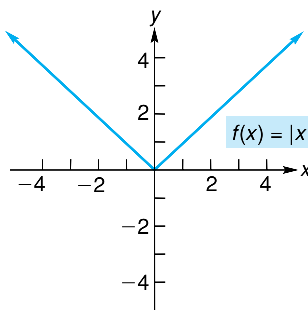
Gráficas de funciones elementales

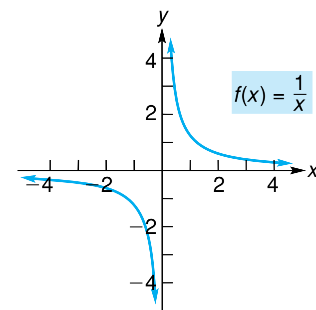












Propiedades de los números reales

$a + b = b + a$

$ab = ba$

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a(bc) = (ab)c$

$a(b + c) = ab + ac$

$a(b - c) = ab - ac$

$(a + b)c = ac + bc$

$(a - b)c = ac - bc$

$a + 0 = a$

$a \cdot 0 = 0$

$a \cdot 1 = a$

$a + (-a) = 0$

$-(-a) = a$

$(-1)a = -a$

$a - b = a + (-b)$

$a - (-b) = a + b$

$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$

$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

$(-a)b = -(ab) = a(-b)$

$(-a)(-b) = ab$

$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$

$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$

$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$

Exponentes

$a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)$

$a^m a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^n = a^n b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Radicales

$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

$(\sqrt[n]{a})^n = a, \sqrt[n]{a^n} = a \qquad (a > 0)$

$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n}$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Productos especiales

$x(y + z) = xy + xz$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$

$(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

Fórmulas de factorización

$ab + ac = a(b + c)$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Fórmula cuadrática

Si $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Líneas rectas

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	(fórmula de la pendiente)
$y - y_1 = m(x - x_1)$	(forma punto-pendiente)
$y = mx + b$	(forma pendiente-ordenada al origen)
$x = \text{constante}$	(recta vertical)
$y = \text{constante}$	(recta horizontal)

Desigualdades

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a(-c) > b(-c)$.

Logaritmos

$\log_b x = y$ donde $x = b^y$

$\log_b (mn) = \log_b m + \log_b n$

$\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

$\log_b m^r = r \log_b m$

$\log_b 1 = 0$

$\log_b b = 1$

$\log_b b^r = r$

$b^{\log_b m} = m$

$\log_b m = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}$

Alfabeto griego

alfa	A	α	nu	N	ν
beta	B	β	xi	Ξ	ξ
gamma	Γ	γ	ómicron	O	o
delta	Δ	δ	pi	Π	π
épsilon	E	ε	rho	P	ρ
zeta	Z	ζ	sigma	Σ	σ
eta	H	η	tau	T	τ
theta	Θ	θ	Ípsilon	Υ	υ
iota	I	ι	fi	Φ	$\phi\varphi$
kappa	K	κ	ji	X	χ
lambda	Λ	λ	psi	Ψ	ψ
mu	M	μ	omega	Ω	ω

Relaciones de negocios

Interés = (capital)(tasa)(tiempo)

Costo total = costo variable + costo fijo

Costo promedio por unidad = $\dfrac{\text{costo total}}{\text{cantidad}}$

Ingreso total = (precio por unidad)(número de unidades vendidas)

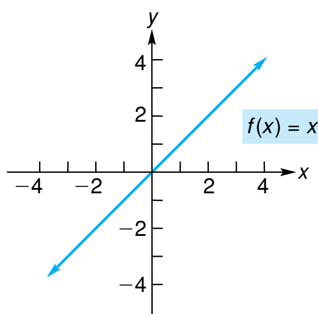
Utilidad = ingreso total − costo total

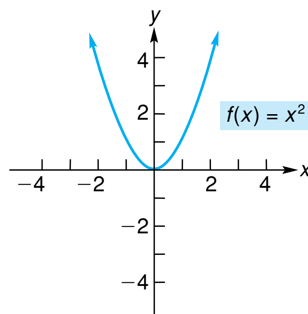
Fórmulas de anualidades ordinarias

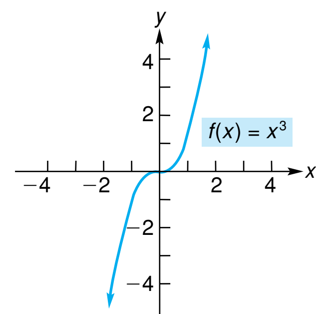
$$A = R\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = Ra_{\overline{n}|r} \qquad \text{(valor presente)}$$

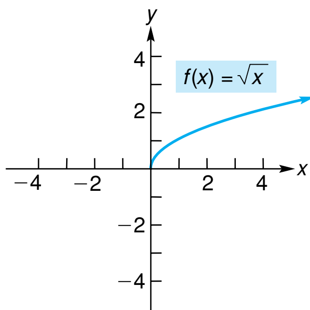
$$S = R\frac{(1+r)^{n}-1}{r} = Rs_{\overline{n}|r} \qquad \text{(valor futuro)}$$

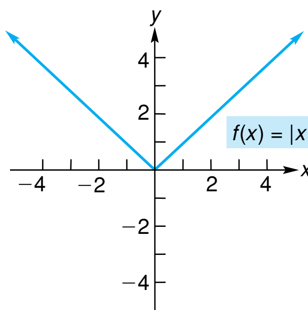
Gráficas de funciones elementales

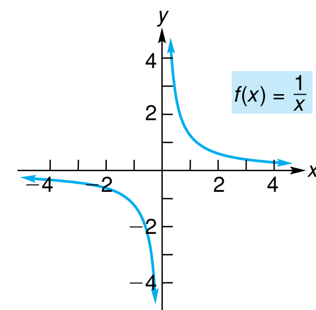












Fórmulas de derivación

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$	$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$	$\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{(\ln b)u} \cdot \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$	$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u(\ln a)\frac{du}{dx}$

Fórmulas de integración

Suponemos que u es una función diferenciable de x.

$\int k\,dx = kx + C$	$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
$\int e^x\,dx = e^x + C,$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$	$\int \frac{1}{u}\,du = \ln\lvert u\rvert + C, \quad u \neq 0$